**Corrigé-type de l'examen final**
**Théorie du Contrôle stochastique**

**Exercice 1**

1. On a

$$dx(t) = A_0 x(t)dt + A_1 x(t)dw_1(t) + A_2 x(t)dw_2(t);\ t \succeq 0,$$

où $A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_1 \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$.

2. Etudions la stabilité en moment d'ordre 2.L'équation de Lyapunov correspondante à ce système est

$$A_0^T P + P A_0 + A_1^T P A_1 = -I_2$$

Soit $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$. On a trouve $\begin{cases} 2p_2 = 0 \\ p_1 = \frac{1}{2-\alpha^{\text{`}}} \\ p_3 = \frac{1}{2-\beta^{\text{`}}} \end{cases}$.

donc le système est stable en moment d'ordre 2.si $\alpha^2 \prec 2$ et $\beta^2 \prec 2$.

1/ $(A_0, A_1, B)$ est stabilisable ssi $(B^T, A_0^T, A_1^T)$ est détectable. Mais $(B^T, A_0^T, A_1^T)$ est détectable ssi $\exists$ $P \succ 0$ et $K$ solution de l'équation

$$(A_0^T)^T P + P A_0^T + \left(A_1^T\right)^T Y A_1^T + K B^T + B K^T + I = 0$$

ainsi $P$ satsfait l'équation

$$A_0 P + P A_0^T + A_1 Y A_1^T + \Gamma^T B^T + B\Gamma + I = 0$$

où $\Gamma = K^T$.

2. 1/ Supposons que $(C, A, A_1)$ est détectable. Alors $\left(A^T, A_1, C^T\right)$ est stabilisable. Alors il existe $F$ tel que le système en boucle fermé

$$\begin{cases} dx(t) = (A^T + C^T F)x(t)dt + A_1^T x(t)dw(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

est stable en moment d'ordre 2. Alors il existe $X > 0$ solution de l'équation de Lyapunov

$$\left(A + F^T C\right)^T X + X\left(A + F^T C\right) + A_1 X A_1^T + I = 0$$

ainsi

$$\left(A + F^T C\right)^T X + X\left(A + F^T C\right) = -\left(A X A_1^T + I\right)$$

Soit $Q = A_1 X A_1^T + I$. Comme $X > 0$ alors $Q > 0$. Alors on déduit qu'il existe une solution $X > 0$ de l'équation de Lyapunov

$$\left(A + F^T C\right)^T X + X\left(A + F^T C\right) = -Q$$

ainsi il existe $F$ tel que le système en boucle fermé

$$\begin{cases} dx(t) = (A + F^T C)x(t)dt \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

est stable, d'où on déduit que $(C, A)$ est détectable.

Soit $\Gamma^T = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}$. On a

$$A_0 Y + Y A_0^T + A_1 Y A_1^T + \Gamma^T B^T + B\Gamma + I = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} + \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+\beta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (\beta^2-1)y_1 + 2f_1 + 1 = 0 & (1) \\ (\beta^2-0.5)y_2 + f_2 = 0 & (2) \\ (\beta^2-1)y_3 + 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Supposons $f_2 = 0$, on trouve. Si $y_2 = 0$, $y_1 = \frac{-1-2f_1}{\beta^2-1}, y_3 = \frac{-1}{\beta^2-1}$. Alors pour f$_1$ tel que $-1-2f_1 < 0$, la solution est Y=$\begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_3 \end{bmatrix} > 0$ pour tout $\beta^2 < 1$. Ainsi la système ets stabilisable.

On a u(t)=Fx(t), où $F = \Gamma Y^{-1} = (f_1, 0) \begin{bmatrix} \frac{-1-2f_1}{\beta^2-1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\beta^2-1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -f_1\frac{\beta^2-1}{2f_1+1} & 0 \end{bmatrix}$.

**Exercice 3**

1. a. C'est un problème de contrôle optimal à horizon infinie. Pour montrer qu'il admet une solution unique on montre que $(A-\lambda I, B)$ est stabilisable et que $(G, A-\lambda I)$ est détectable où $G^TG = Q$, et $\lambda = 2$.

Comme $rang(B, (A-\lambda I)B) = 2$, alors $(A-\lambda I, B)$ est contrôlable alors $(A-\lambda I, B)$ est stabilisable.

On remarque que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors la matrice $G$ telle que $G^TG = Q$ est $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrons que $(G, A_0)$ est détectable. On a

$$rang \begin{pmatrix} G \\ G(A-\lambda I) \end{pmatrix} = 2$$

Alors $(G, A-\lambda I)$ est observable ainsi le système $(G, A-\lambda I)$ est détectable.Alors le problème de contrôle optimal admet une solution unique.

b. Trouvons le contrôle optimal. D'aprés le cours, le contrôle optimal est donné par $u^*(t) = -R^{-1}B^TPx(t)$ où $P$ est la solution de l'équation de Riccati

$$(A-\lambda I)^TP + P(A-\lambda I) - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$

On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $R = 1$. Soit $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}$, on trouve

$$(A-\lambda I)^TP + P(A-\lambda I) - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^T \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$-\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1-p_2^2 & p_1 - p_2p_3 + 1 \\ p_1 - p_2p_3 + 1 & -p_3^2 + 2p_2 + 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 1 - p_2^2 = 0 \\ p_1 - p_2p_3 + 1 = 0 \\ -p_3^2 + 2p_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

dont la solution est : $p_1 = \sqrt{3} - 1, p_2 = 1,, p_3 = 3$. Alors le contrôle optimal est

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -R^{-1}B^TPx(t) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} x(t) \\ &= -\begin{pmatrix} p_2 & p_3 \end{pmatrix} x(t) = -p_2x_1(t) - p_3x_2(t) \end{aligned}$$

Le coût minimal est

$$\begin{aligned} J(u^*) &= E\left(x_0^T P x_0\right) + \frac{1}{2} trace\left(CC^T P\right) = E\left(x_0^T P x_0\right) + \frac{1}{2} trace\left(\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}\right) \\ &= E\left(x_0^T P x_0\right) + \frac{2\sqrt{3}+1}{2} \end{aligned}$$

2. En utilisant la programmation dynamique, on va résoudre le problème de contrôle optimal:

$$\lim_{T\to+\infty} E(\frac{1}{T}\int_0^T (x^2(t) + u^2(t)dt)$$

correspondant au système

$$\begin{aligned} dx(t) &= (ax(t)dt + bu(t))\, dt + x(t)dw_1(t) + u(t)dw_2(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

L'équation de Bellman correspondante à ce problème est

$$\inf_{u\in U} \{\mathcal{A}_u V_x + \Phi(x,u) - \eta\} = 0,$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U} \left\{\mathcal{A}_u V_x + x^2(t) + u^2(t) - \eta\right\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U} \left\{xaV_x + ubV_x + \frac{1}{2} trace\left(C^T V_{xx} C\right) + x^2(t) + u^2(t) - \eta\right\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U} \left\{xaV_x + ubV_x + \frac{1}{2} trace\left(\begin{pmatrix} x & u \end{pmatrix}^T V_{xx} \begin{pmatrix} x & u \end{pmatrix}\right) + x^2(t) + u^2(t) - \eta\right\} = 0$$

Soit $V(x) = Px^2$, où $P$ est une matrice symétrique définie positive. L'équation de HJB est équivalente à

$$\inf_{u\in U} \{2Px + 2bPxu + x^2(t) + u^2(t)$$

$$+ trace\left(\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x & u \end{pmatrix}\right) - \eta\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U} \{2Px + x^2(t) + Px^2 + u^2(t) + 2bPxu + Pu^2 - \eta\} = 0$$

On remarque qu'on atteint le minimum pour $u^*$ tel que:

$$2bPx + 2\,(P+1)\,u^* = 0$$

alors

$$u^*(t) = -b\,(P+1)^{-1}\,Px(t)$$

Remplaçons cette valeur de u$^*$ dans l'équation de HJB, on trouved'où on obtient

$$(2a+1)\,P - b^2P^2\,(P+1)^{-1} + 1 = 0$$

Le contrôle optimal est

$$u^*(t) = -\,(P+1)^{-1}\,Px(t)$$