Université de Batna 2 Batna, 2020/2021
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

$2^{ème}$ année Master

Corrigé-type de l'examen Final
Théorie du Contrôle stochastique

Exercice 1 (04 points)

Considérons l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dx(t) &= (A_0x(t) + Bu(t))\, dt + \sum_{k=1}^{m} A_k x(t) dw_k(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

où A et B sont des matrices et $w_i(t)$, $i = 1, ..., m$, sont des mouvement Browniens scalaires.

1. Le système $(C, A_{0,} A_1, ..., A_m)$ est observable $\Longrightarrow$Le système $(C, A_{0,} A_1, ..., A_m)$ est détectable. (Faux) **(1.5)**

   Soient $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dans le cours on a vu que (A_0, A_1, B) est contrôlable donc le système (B^T, A_0^T, A_1^T) est observable.

   On a aussi montré que (A_0, A_1, B) n'est pas stabilisable alors (B^T, A_0^T, A_1^T) n'est pas détectable. Alors le système (B^T, A_0^T, A_1^T) est observable mais n'est pas détectable.

   Le système (C, A_0, A_1) est observale mais n'est pas détectable.

2. Les paires (A_k, B) ne sont pas contrôlables$\Longrightarrow$ Le système $(A_{0,} A_1, ..., A_m, B)$ est contrôlable. (Faux) **(1.5)**

   Cette implication n'est pas toujours vraie. Dans la **Proposition 39** on a montré que pour n=2, m=1, r=1, si les paires (A_0, B),(A_1, B) ne sont pas contrôlables alors le système $(A_{0,} A_1, B)$ n'est pas contrôlable. l'exemple, et dans l'**exemple 40** les paires (A_0, B),(A_1, B) ne sont pas contrôlable tandis que le système $(A_{0,} A_1, B)$ est contrôlable.

3. Le système $(A_{0,} A_1, ..., A_m)$ est exponentiellement stable en moment d'ordre 2$\Longrightarrow$.l'équation $A_0^T X + XA_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k^T X A_k + C^T C = 0$ admet une solution $X > 0$.(Faux) **(1)**

   Si le système $(A_{0,} A_1, ..., A_m)$ est exponentiellement stable en moment d'ordre 2 et si le système $(C, A_{0,} A_1, ..., A_m)$ est observable.alors.l'équation $A_0^T X + XA_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k^T X A_k + C^T C = 0$ admet une solution $X > 0$.

Exercice 2

Soient $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrons que le problème de contrôle optimal

$$\inf E(\int_0^{+\infty} e^{-2t}(x(t)^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \mathrm{u}(t)^2)dt$$

associé au système:

$$\begin{aligned} dx(t) &= Ax(t)dt + Bu(t)dt + Cdw(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

admet une solution unique. D'aprés le cours on a, si

1. Le système $\left(\left(A-\frac{\lambda}{2}I\right),B\right)$ est stabilisable,
2. Le système $\left(\left(A-\frac{\lambda}{2}I\right),G\right)$ est détectable où G^TG =Q

alors

1. Il existe une solution unique de l'équation algébrique de Riccati

$$\left(A-\frac{\lambda}{2}I\right)^T P+P\left(A-\frac{\lambda}{2}I\right)-PBR^{-1}B^TP+Q=0$$

telle que $\mathrm{spec}\left(A-\frac{\lambda}{2}I-BR^{-1}B^TP\right)\subset\mathbb{C}_-$.

2. Un contrôle optimal u^* existe il est donné par $u^*(t)=-R^{-1}B^TPx(t)$, et le coût minimal est

$$J(u^*)=E\left(x_0^TPx_0\right)+\frac{1}{\lambda}trace\left(CC^TP\right)$$

On a $\lambda=2$, alors on montre que $((A-I),B)$ est stabilisable. On a:
$rang(B,AB)=rang\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=2$, alors $((A-I),B)$ est contrôlable donc il est stabilisable. (01 point)

Pour $G=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}$(0.5 point)) on a $G^TG=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=Q$. Montrons que $\left(\left(A-\frac{\lambda}{2}I\right),G\right)$ est obsrvable.

On a $rang\begin{pmatrix}G\\GA\end{pmatrix}=2$, alors $\left(\left(A-\frac{\lambda}{2}I\right),G\right)$ est observable alors il est detectable.(01 point)

On déduit que le ,problème de contrôle optimal admet une solution unique. (0.5 point)

On résoud maintenant l'équation de Riccati

$$\left(A-\frac{\lambda}{2}I\right)^T P+P\left(A-\frac{\lambda}{2}I\right)-PBR^{-1}B^TP+Q=0 \tag{0.5}$$

Soit $P=\begin{bmatrix}p_1&p_2\\p_2&p_3\end{bmatrix}$. L'équation de Riccati correspondante à ce problème est On a $\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\left(A-\frac{\lambda}{2}I\right)^T P+P\left(A-\frac{\lambda}{2}I\right)-PBR^{-1}B^TP+Q=0 \qquad 0.5$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1&p_2\\p_2&p_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_1&p_2\\p_2&p_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$
$$-\begin{bmatrix}p_1&p_2\\p_2&p_3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}p_1&p_2\\p_2&p_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \begin{bmatrix}p_1&p_2\\p_1+p_2&p_2+p_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_1&p_1+p_2\\p_2&p_2+p_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_2^2&p_2p_3\\p_2p_3&p_3^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=0\\
&\Longleftrightarrow \begin{bmatrix}-p_2^2+2p_1+1&p_1+2p_2-p_2p_3+1\\p_1+2p_2-p_2p_3+1&-p_3^2+2p_3+2p_2+1\end{bmatrix}=0\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases}-p_2^2+2p_1+1=0\\p_1+2p_2-p_2p_3+1=0\\-p_3^2+2p_3+2p_2+1=0\end{cases} \qquad (1.5)\\
&\Rightarrow \quad p_1=2\sqrt{5}+4, p_2=\sqrt{5}+2, p_3=\sqrt{5}+2 \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Alors le contrôle optimal est

$$\begin{aligned}
u^*(t) &= -R^{-1}B^TPx(t)=B^TPx(t)=\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}p_1&p_2\\p_2&p_3\end{bmatrix}x(t)\\
&= \begin{bmatrix}p_2&p_3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=\left(\sqrt{5}+2\right)(x_1(t)+x_2(t)) \quad (1)
\end{aligned}$$

2. Le coût minimal.est

$$\begin{aligned}
J(u^*) &= E\left(x_0^T P x_0\right) + \frac{1}{\lambda} trace\left(CC^T P\right) \\
&= E\left(x_0^T P x_0\right) + \frac{1}{2} trace\left(CC^T P\right) \\
&= E\left(x_0^T P x_0\right) + \frac{1}{2} trace\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1 \quad 1 \quad \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= E\left(x_0^T P x_0\right) + \frac{1}{2} trace\left(\begin{bmatrix} p_1 + p_2 & p_2 + p_3 \\ p_1 + p_2 & p_2 + p_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= E\left(x_0^T P x_0\right) + \frac{1}{2}(p_1 + 2p_2 + p_3) \\
&= E\left(x_0^T P x_0\right) + \frac{1}{2}(5\sqrt{5} + 10) \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Exercice 3

Soient $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (01 point)

1. L'équation est stable en moment d'ordre 1ssi A est stable. Les valeurs propores de A sont à partie réelle négative donc A est stable.

2. On a A est stable. et $\int_0^{+\infty} \left(c^T e^{At} b\right)^2 dt = \int_0^{+\infty} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2 dt = 0 < 1$, alors d'aprés le cours l'équation $dx(t) = Ax(t)dt + bc^T x(t)dw(t)$, $t > 0$ est stable en moment d'ordre 2. (02 points)

Exercice 4

Considérons l'équation différentielle

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + \sum_{i=1}^{r} B_i x(t) dw_i(t), \; t \geq t_0 \tag{1}$$

où f est une fonction vectorielle sur $\mathbb{R}^n \times [t_0, +\infty[$.telle que $\|f(x,t)\| \leq K \|x\|$,pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, +\infty[$, et B_i, $1 \leq i \leq r$, sont des matrices de type $n \times n$, telles que

$$\sum_{i=1}^{r} \|B_i x\|^2 \leq \lambda \|x\|^2 \text{ et } \sum_{i=1}^{r} \left\|x^T B_i x\right\|^2 \geq \rho \|x\|^4, \; \forall x \in \mathbb{R}^n$$

1/ Etudions la stabilité du point d'équilibre de l'équation (1). Soit $V(x) = x^T x$. Pour $x(t)$ la solution du système (1), on a

$$\begin{aligned}
LV(x(t)) &= 2x^T f(x(t), t) + \sum_{i=1}^{r} \|B_i x(t)\|^2 \\
&\leq (2K + \lambda) \|x(t)\|^2
\end{aligned}$$

Si $2K + \lambda < 0$, on obtient

$$LV(x(t)) \leq -MV(x(t)), \; M > 0$$

D'aprés le théorème de Lyapunov, on déduit que le système (1) est exponentiellement stable en moment d'ordre 2.(02 *points*)

2. On a

$$\begin{aligned}
dV(x(t)) &= LV(x(t)) + V_x(x(t)) g(x(t)) dw(t) \\
&= LV(x(t)) + 2x(t)^T \sum_{i=1}^{r} B_i x(t) dw_i(t)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{t_0}^{t} dV(x(s)) = \int_{t_0}^{t} LV(x(s))ds + \sum_{i=1}^{r} \int_{t_0}^{t} 2x^T B_i x(s) dw_i(s)$$

$$\Longrightarrow \quad V(x(t)) = V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t} LV(x(s))ds + \sum_{i=1}^{r} \int_{t_0}^{t} 2x^T B_i x(s) dw_i(s)$$

alors

$$\ln V(x(t)) < \ln V(x_0) + C_2(t - t_0) + M(t) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \frac{\|V_x(x(s))g(x(s))\|^2}{\|V(x(s))\|^2} ds$$

où $M(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{V_x(x(s))g(x(s))^2}{V(x(s))^2} ds$. On a $\|V_x(x(t))g(x(t))\|^2 = 4\sum_{i=1}^{r} \left\|x(t)^T B_i x(t)\right\|^2 \geq 4\rho \|x(t)\|^4$. Comme on a

$$M(t) \leq \frac{2}{\varepsilon} \ln n + \frac{\varepsilon}{2} \int_{t_0}^{t} \frac{\|V_x(x(s))g(x(s))\|^2}{\|V(x(s))\|^2} ds$$

pour $t_0 \leq t \leq t_0 + n$, alors

$$\ln V(x(t)) < \ln V(x_0) - \frac{1}{2} \left[(1 - \varepsilon) C_3 - 2C_2\right] (t - t_0) + \frac{2}{\varepsilon} \ln n$$

pour $t_0 \leq t \leq t_0 + n$, $n \geq n_0$, où $C_2 = 2K + \lambda$ et $\mathrm{C}_3 = 4\rho$. d'où

$$\frac{1}{t} \ln V(x(t)) < -\frac{1}{2t} \left[(1 - \varepsilon) C_3 - 2C_2\right] (t - t_0) + \frac{\left(\ln V(x_0) + \frac{2}{\varepsilon} \ln n\right)}{t_0 + n - 1}$$

On déduit que

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|^2 < -\frac{1}{2} \left[(1 - \varepsilon) C_3 - 2C_2\right]$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, ainsi

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\| < -\frac{1}{4} \left[C_3 - 2C_2\right]$$

or

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\| < -\left[\rho - K - \frac{\lambda}{2}\right] \qquad \text{(02 points)}$$