Université de Batna 2 Batna, 2020/2021
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques
$1^{ère}$ année Master

Corrigé-type de l'examen Final
Equations Différentielles Stochastiques

Exercice 1 (11 points)

Soit $(w(t))$ le mouvement brownien standard.

1) Considérons l'équation:

$$dx(t) = -x(t)dt + e^{-t}dw(t),\ t > 0,\ x(0) = x_0$$

c'est une équation non homogène, sa solution est donnée par:

$$x(t) = y(t)\left(x_0 + \int_0^t \frac{1}{y(s)}\left(\left(a(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m B_i(s)b_i(s)\right)ds + \sum_{i=1}^m b_i(s)dw_i(s)\right)\right) \tag{1}$$

où

$$y(t) = \exp\left\{\int_0^t \left(A(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m B_i^2(s)\right)ds + \sum_{i=1}^m B_i(s)dw_i(s)\right\} \tag{0.5}$$

alors $y(t) = \exp\left\{\int_0^t -ds\right\} = e^{-t}$ (0.5) et ainsi

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t}\left(x_0 + \int_0^t e^s\left(e^{-s}ds + e^{-s}dw(s)\right)\right) \\ &= e^{-t}x_0 + \int_0^t ds + \int_0^t dw(s) \\ &= e^{-t}x_0 + t + w(t) \qquad (1) \end{aligned}$$

2) Considérons l'équation

$$dx(t) = \left(c + \frac{1}{2}\alpha^2\right)x(t)dt + \alpha x(t)dw(t),\ t > 0,\ x(0) = x_0,\ c, \alpha \in \mathbb{R}.$$

c'est une équation homogène, sa solution est donnée par $x(t) = y(t)x_0$ où

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp\left\{\int_0^t \left(\left(c + \frac{1}{2}\alpha^2\right) - \frac{1}{2}\alpha^2(s)\right)ds + \alpha dw(s)\right\} \\ &= \exp\left\{\int_0^t cds + \alpha dw(s)\right\} \\ &= \exp\left(ct + \alpha w(t)\right) \end{aligned}$$

alors

$$x(t) = \exp\left(ct + \alpha w(t)\right)x_0 \qquad (1.5)$$

3) Considérons l'équation

$$\begin{cases} dx(t) = \left(\frac{2}{1+t}x(t) + (1+t)^2\right)dt + (1+t)^2\,dw(t),\ t > 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

C'est une équation nonhomogène, sa solution est donnée par

$$x(t) = y(t)\left(x_0 + \int_0^t \frac{1}{y(s)}\left(\frac{2}{1+s}ds + (1+s)^2\, dw(s)\right)\right)$$

où

$$y(t) = \exp\int_0^t \frac{2}{1+s}ds = (1+s)^2 \qquad (1)$$

d'où

$$\begin{aligned} x(t) &= (1+t)^2\left(x_0 + \int_0^t \frac{1}{(1+s)^2}\left((1+s)^2\, ds + (1+s)^2\, dw(s)\right)\right) \\ &= (1+t)^2\,(x_0 + t + w(t)) \qquad (2) \end{aligned}$$

4) Considérons l'équation

$$\begin{cases} dx_1(t) = -\frac{1}{2}x_1(t) - x_2(t)dw(t),\ t > 0,\ x_1(0) = x_0^1 \\ dx_2(t) = -\frac{1}{2}x_2(t) + x_1(t)dw(t),\ t > 0,\ x_2(0) = x_0^2 \end{cases}$$

Cette équation peut être présentée sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} dx(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t)dt + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)dw(t),\ t \geq 0,\ x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \qquad (0.5) \\ &= A_0x(t)dt + A_1x(t)dw(t),\ t \geq 0,\ A_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

C'est une équation homogène dans $\mathbb{R}^2$, sa solution est donnée par $x(t) = \Phi(t)x_0$. (0.5) Comme $A_0A_1 = A_1A_0$ alors ∂

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \exp\left\{\left(A_0 - \frac{1}{2}A_1^2\right)t + A_1w(t)\right\} \\ &= \exp\left(\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2\right)t + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w(t)\right) \\ &= \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w(t)\right) \\ &= \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w(t)\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-itw} + \frac{1}{2}e^{itw} & \frac{1}{2}ie^{itw} - \frac{1}{2}ie^{-itw} \\ \frac{1}{2}ie^{-itw} - \frac{1}{2}ie^{itw} & \frac{1}{2}e^{-itw} + \frac{1}{2}e^{itw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos w(t) & -\sin w(t) \\ \sin w(t) & \cos w(t) \end{bmatrix} \qquad (2) \end{aligned}$$

ainsi la solution est donnée par

$$x(t) = \begin{bmatrix} \cos w(t) & -\sin w(t) \\ \sin w(t) & \cos w(t) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Exercice 2 (6 points)

Soit $(w(t))$ le mouvement brownien standard. Montrer que

1. On applique la formule d'Itô sur la fonction $u(t,x) = e^x$ et $x = w(t)$. On trouve

$$\begin{aligned} du(t,x) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)dt + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)dx + \frac{1}{2}g^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)dt \qquad (1) \\ &= e^x dx + \frac{1}{2}e^x dt, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow de^{w(t)} = e^{w(t)}dw(t) + \frac{1}{2}e^{w(t)}dt, \qquad (1)$$

2. On applique la formule d'Itô sur la fonction $u(t,x) = x^3$ et $x = w(t)$. On trouve

$$\begin{aligned}
du(t,x) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)dt + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)dx + \frac{1}{2}g^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)dt \\
&= 3x^2dx + \frac{1}{2}6xdt, \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \; dw^3(t) = 3w^2(t)dw(t) + 3w(t)dt, \\
&\Longrightarrow \; \int_0^T dw^3(t) = 3\int_0^T w^2(t)dw(t) + 3\int_0^T w(t)dt, \\
&\Longrightarrow \; w^3(T) - w^3(0) = 3\int_0^T w^2(t)dw(t) + 3\int_0^T w(t)dt, \\
&\Longrightarrow \; 3\int_0^T w^2(t)dw(t) = w^3(T) + 3\int_0^T w(t)dt, \\
&\Longrightarrow \; \int_0^T w^2(t)dw(t) = \frac{1}{3}w^3(T) + \int_0^T w(t)dt,
\end{aligned}$$

alors

$$\int_0^T w^2(t)dw(t) = \frac{1}{3}w^3(T) + \int_0^T w(t)dt \qquad (1)$$

3. Soit $x(t) = \int_0^T w(s)ds$. On a

$$E(x^2(t)) = E\left(\int_0^t w(s)ds\right)^2 = \int_0^t E\,(w(s))^2\,ds = \int_0^t s^2ds = \frac{1}{3}t^3 \qquad (2)$$

Exercice 3 (03 points)

Considérons l'équation différentielle

$$\begin{aligned}
dx(t) &= A_0x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} A_kx(t)dw_k(t),\; t \geq 0 \qquad (1) \\
x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

où A_k sont des matrices telles que $A_0A_i = A_iA_0$ et $A_iA_j = A_jA_i$, $1 \leq i,j \leq r$.

4. La solution de cette equation est donnée par $x(t) = \Phi(t)x_0$. (0.5) Comme

$$A_0A_i = A_iA_0 \text{ et } A_iA_j = A_jA_i,\; 1 \leq i,j \leq r$$

alors

$$\Phi(t) = \exp\left\{\left(A - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} A_i^2\right)(t - t_0) + \sum_{i=1}^{m} A_i(t)\left(w_i(t) - w_i(t_0)\right)\right\} \qquad (1)$$

5. On calcule $dx(t)$ et $dx^T(t)$ puis on applique la formule d'Itô pour calculer $d(xx^T(t))$, on trouve

$$d(xx^T(t)) = x(t)dx^T(t) + x^T(t)dx(t) + \sum_{k=1}^{r} A_k(t)x(t)\left(A_k(t)x(t)\right)^T dt$$

Integrant de t_0 à t et appliquant l'espérance, on trouve

$$\begin{aligned} E\left(x(t)x^T(t)\right) &= E(x_0x_0^T) + \int_{t_0}^{t} A_0 E\left(x(s)x^T(s)\right) ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} E\left(x(s)x^T(s)\right) A_0^T ds + \sum_{k=1}^{r} \int_{t_0}^{t} (A_k(E\left(x(s)x^T(s)\right) A^T \end{aligned} \tag{1}$$

Posons $R_x(t) = E(x(t)x^T(t))$, on trouve

$$\dot{R}_x(t) = A_0 R_x(t) + R_x(t) A_0^T + \sum^{r} A_k R_x(t) A_k^T \tag{0.5}$$