Equations différentielle stochastiques

1. Formules d'Itô et ses applications

La formule d'Itô est l'un des principaux résultats de la théorie du calcul stochastique. Ce résultat offre un moyen de manipuler le mouvement brownien ou les solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS)

1.1. Le cas scalaire

Soit $T > 0$. On note par $L^2(0,T)$ l'espace des processus réels progressivement mesurables G tel que:

$$E\left(\int_0^T G^2(t)dt\right) < +\infty$$

et par $L^1(0,T)$ l'espace des processus réels progressivement mesurables G tel que:

$$E\left(\int_0^T |G(t)|\, dt\right) < +\infty$$

Définition 1.1. *On suppose que x est un processus stochastique réel tel que*

$$x(r) = x(s) + \int_s^r f(t,x(t))dt + \int_s^r g(t,x(t))dw(t)$$

où $f \in L^1(0,T)$ et $g \in L^2(0,T)$ et $0 \leq r \leq s \leq T$. On dit que x admet la différentielle stochastique

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dw(t)$$

pour $0 \leq t \leq T$.

On donne maintenant la formule d'Itô dans le cas scalaire.

Théorème 1.1. (Formule d'Itô)

Supposons que x admet la différentielle stochastique

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dw(t)$$

pour $f \in L^1(0,T)$ et $g \in L^2(0,T)$. Soit $u : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ existent et sont continues. Posons $y(t) = u(t,x(t))$, alors y admet la différentielle stochastique:

$$dy(t) = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}g^2\, dt$$

On illustre l'application de la formule d'Itô dans les exemples suivants.

Exemple 1.2

Soit $x(t) = w(t)$ et $u(t,x) = x^m$, $y(t) = u(t,x(t))$. Alors

$$\begin{aligned} dy(t) &= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}g^2 dt \\ &= mx^{m-1}dx + \frac{1}{2}m(m-1)x^{m-2}dt \end{aligned}$$

d'où

$$dw^m(t) = mw^{m-1}(t)dw(t) + \frac{1}{2}m(m-1)w^{m-2}(t)dt$$

En particulier pour m=2, on trouve

$$dw^2(t) = 2w(t)dw(t) + dt$$

d'où on obtient

$$\int_0^t dw^2(s) = \int_0^t ds + 2\int_0^t w(s)dw(s)$$

alors

$$\int_0^t w(s)dw(s) = \frac{1}{2}\left(w^2(t) - t\right)$$

Exemple 1.3.
Soit $x(t) = w(t)$ et $u(t,x) = e^x$, $y(t) = u(t, x(t))$. Alors

$$\begin{aligned} dy(t) &= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}g^2 dt \\ &= e^x dx + \frac{1}{2}e^x dt \end{aligned}$$

d'où

$$de^{w(t)} = e^{w(t)}dw(t) + \frac{1}{2}e^{w(t)}dt$$

Exemple 1.4.
Soit $x(t) = w(t)$ et $u(t,x) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}t}$, $y(t) = u(t, x(t))$. Alors

$$\begin{aligned} dy(t) &= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}g^2 dt \\ &= -\frac{\lambda^2}{2}e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}t}dt + \lambda e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}t}dx + \frac{1}{2}\lambda^2 e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}t}dt \\ &= \lambda e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}t}dx \end{aligned}$$

d'où

$$dy(t) = \lambda y(t)dw(t)$$

On déduit que $y(t) = e^{\lambda w(t) - \frac{\lambda^2}{2}t}$ est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dy(t) &= \lambda y(t)dw(t) \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Théorème 1.5. (Loi du produit)
Supposons que

$$\begin{cases} dx_1(t) = f_1(t, x(t))dt + g_1(t, x(t))dw(t) \\ dx_2(t) = f_2(t, x(t))dt + g_2(t, x(t))dw(t) \end{cases}, 0 \le t \le T$$

où $f_1,\ f_2 \in L^1(0,T)$ *et* $g_1,\ g_2 \in L^2(0,T)$. *Alors*

$$d\left(x_1 x_2\right) = x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2 + g_1 g_2\, dt \tag{1}$$

Remarque 1.6.
Si on intègre la formule (1), *on obtient*

$$\int_0^t d\left(x_1 x_2\right) = \int_0^t x_2 dx_1 + \int_0^t x_1 dx_2 + \int_0^t g_1 g_2 dt$$

d'où on obtient la formule d'intégration par partie:

$$\int_s^t x_2\, dx_1 = x_1(t)x_2(t) - x_1(s)x_2(s) - \int_0^t x_1\, dx_2 - \int_0^t g_1 g_2\, dt$$

1.2. Le cas vectoriel

Un processus $F=(F_i)_{1\leq i\leq n} \in L^1_n(0,T)$ si $F_i \in L^1(0,T)$, $1 \leq i \leq n$. Un processus $G = (G_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \in L^2_{n\times m}(0,T)$ si $G_{ij} \in L^2(0,T)$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

Défintion 1.7. *Soit x est un processus stochastique n-dimensionnel tel que*

$$x(r) = x(s) + \int_s^r F(t,x(t))dt + \int_s^r G(t,x(t))dw(t)$$

où $F \in L^1_n(0,T)$ et $G \in L^2_{n\times m}(0,T)$ et $0\leq r \leq s \leq T$. On dit que x admet la différentielle stochastique

$$dx(t) = F(t,x(t))dt + G(t,x(t))dw(t)$$

qui veut dire que

$$dx_i(t) = F_i(t,x(t))dt + \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(t,x(t))dw_j(t),\ 1 \leq i \leq n$$

On donne maintenant la formule d'Itô dans le cas vectoriel.

Théorème 1.8. (Formule d'Itô vectorielle)

Supposons que x admet la différentielle stochastique

$$dx(t) = F(t,x(t))dt + G(t,x(t))dw(t)$$

pour $F \in L^1_n(0,T)$ et $G \in L^2_{n,m}(0,T)$. Soit $u : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec dérivés partielles continues $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Posons $y(t) = u(t,x(t))$, alors y admet la différentielle stochastique:

$$dy(t) = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{l=1}^{m} G_{il}\, G_{lj}\, dt$$

Exemple 1.9.

Soit $x(t) = w(t)$ et $y(t) = u(t,x(t)) = (\cos x(t), \sin x(t))^T$. D'aprés la formule d'Itô, on a:

$$\begin{aligned} dy(t) &= \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 \\ &= (-\sin x(t), \cos x(t))^T dw(t) + \frac{1}{2}(-\cos x(t), \sin x(t))^T dt \\ &= (-\sin w(t), \cos w(t))^T dw(t) + \frac{1}{2}(-\cos w(t), \sin w(t))^T dt \end{aligned}$$

2. Equations différentielles stochastiques

Les équations différentielles gouvernent de nombreux phénomènes déterministes. Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des "différentielles stochastiques", ce qui transforme les équations en équations différentielles stochastiques (EDS).

Les équations différentielles sont des équations d'évolution du type

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{2}$$

Les EDS sont des généralisations des équations (2) où la dynamique déterministe d'évolution est perturbée par un terme aléatoire. On peut considérer que ce bruit est un processus gaussien généralement modélisé par un mouvement brownien w et une intensité de bruit $g(x;t)$:

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t)$$

2.1. Définitions et propriétés

Soit (Ω, F, p) un espace de probabilité complet. Soit w un processus de Wiener d-dimensionnel. Soit x_0 une variable aléatoire de carré intégrable et indépendante de w. On considère la filtration définie, pour tout t≥ 0, par $F_t = \sigma\{x_0, w(s);\ 0 \leq s \leq t\}$.

Soit $T > 0$. On considère deux fonctions $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ qui sont mesurables. On cherche à résoudre l'équation différentielle stochastique:

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t),\ t \geq 0 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3}$$

le coefficient f s'appelle la dérive tandis que la matrice g s'appelle la matrice de diffusion.

Précisons tout d'abord ce que nous entendons par une solution de l'EDS (3).

Définition 2.1. *Une solution (forte) de l'EDS (3) est un processus x continu tel que:*
1/ x est mesurable;
2/

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(r, x(r))dr + \int_0^t g(r, x(r))dw(r),\ 0 \leq t \leq T$$

On note par S^2 l'espace de Banach constitué des processus x, progressivement mesurables, tels $E\left(\sup_{0\leq t\leq T} \|x(t)\|^2\right) < +\infty$ muni de la norme $\|x\| = E\left(\sup_{0\leq t\leq T} \|x(t)\|^2\right)^{1/2}$ et par S_c^2 le sous espace de S^2 formé des processus continus.

Avant de donner le théorème d'existence et unicité pour l'équation (3), on donne le lemme de Gronwall qui est utile pour la suite.

Lemme 2.2. (Lemme de Gronwall). *Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t,*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds,$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$. Alors, $g(t) \leq a\exp(bt), \forall t \in [0,T]$.

Théorème 2.3.
Supposons qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour $t \in [0,T]$ et x, $y \in \mathbb{R}^n$,on a:

1. *condition de Lipschitz en espace:*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| + \|g(t,x) - g(t,y)\| \leq K\|x - y\|$$

2. *croissance linéaire:*

$$\|f(t,x)\| + \|g(t,y)\| \leq K(1 + \|x\|)$$

Supposons que $E\left(\|x_0\|^2\right) < +\infty$. *Alors il existe une solution unique* $x \in S^2$ *de l'équation (3).*

Preuve.

La preuve consiste à utiliser la méthode itérative de Picard. Pour $x \in S_c^2$, posons pour $t \in [0,T]$,

$$\Phi(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(r,x(r))dr + \int_0^t g(r,x(r))dw(r),$$

le processus $\Phi(x)$ est bien défini et continu.

Soient x et y deux élements de $x \in S_c^2$. Comme $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$, on a:

$$\|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\|^2 \leq 2 \sup_{0\leq t\leq u} \int_0^t \|(f(r,x(r)) - f(r,y(r)))\, dr\|^2 + 2 \sup_{0\leq t\leq u} \int_0^t \|(g(r,x(r)) - g(r,y(r)))\, dw(r)\|^2$$

En utilisant les propriétés de l'intégrale stochastique, on obtient:

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq u} \|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\|^2\right) \leq 2E\left[\int_0^u \|(f(r,x(r)) - f(r,y(r)))\, dr\|^2\right] + 8E\left[\int_0^u \|g(r,x(r)) - g(r,y(r))\|^2\, dr\right]$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majoration

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq u} \|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\|^2\right) \leq 2TE\left[\int_0^u \|(f(r,x(r)) - f(r,y(r)))\, dr\|^2\right] + 8E\left[\int_0^u \|g(r,x(r)) - g(r,y(r))\|^2\, dr\right]$$

comme les fonctions f et g sont Libshitziennes en espace, on obtient, pour tout $u \in [0,T]$,

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq u} |\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)|^2\right) \leq 2K^2\,(T+4)\, E\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq u} \|x(t) - y(t)\|^2\, dr\right] \tag{4}$$

Notant par 0 le processus nul. Comme $(a+b+c)^3 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$, alors

$$\|\Phi(0)(t)\| \leq 3{x_0}^2 + 3 \sup_{0\leq t\leq u} \left\|\int_0^t f(r,0)dr\right\|^2 + \sup_{0\leq t\leq u} \left\|\int_0^t g(r,0)dw(r)\right\|^2,$$

En utillisant l'inégalité de Doob et la croissance linéaire de f et g, on obtient de la dernière inégalité que

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq u} \|\Phi(0)(t)\|^2\right) \leq 3\left(E({x_0}^2) + K^2T^2 + 4K^2T\right) \tag{5}$$

Les estimations (4) et (5) montrent alors que le processus $\Phi(x)$ appartient à S_c^2 dés que x appartient à S_c^2.

On définit alors par récurrence une suite de processus de S_c^2 en posant

$$x_0 = 0 \text{ et } x^{n+1} = \Phi(x_n), \text{ pour } n \geq 0.$$

On obtient de la formule (4) l'estimation suivante

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left\|x^{n+1}(t) - x^n(t)\right\|^2\right) \leq \frac{C^nT^n}{fact(n)} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|x^1(t)\right|^2\right],\ n \geq 0$$

où $C = 2K^2\,(T+4)$. On obtient de l'inégalité (5)

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left\|x^{n+1}(t) - x^n(t)\right\|^2\right) \leq D\frac{C^nT^n}{fact(n)}$$

où $D = 3\left(E({x_0}^2) + K^2T^2 + 4K^2T\right)$. Il résulte de cette dernière inégalité que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \left\|\sup_{0\leq t\leq T} \left\|x^{n+1}(t) - x^n(t)\right\|\right\|_{L^1} &\leq \sum_{n\geq 0} \left\|\sup_{0\leq t\leq T} \left|x^{n+1}(t) - x^n(t)\right|\right\|_{L^2} \\
&\leq \sqrt{D}\sum_{n\geq 0} \frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{fact(n)}} < +\infty
\end{aligned}$$

ainsi x_n converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus x continu, de plus $x \in S_c^2$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} &= \Phi(\lim_{n\to+\infty} x^n)\\ &\Longrightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t f(r,x(r))dr + \int_0^t g(r,x(r))dw(r)\end{aligned}$$

d'où on déduit que x est une solution de l'équation (3).

Si x et y sont deux solutions de l'EDS (3) dans S_c^2, alors $x = \Phi(x)$ et $y = \Phi(y)$. L'inégalité (4) ,donne alors, pour tout $u \in [0,T]$,

$$E\left(\sup_{0\le t\le u} \|x(t)-y(t)\|^2\right) \le 2K^2\,(T+4)\,E\left[\int_0^u \sup_{0\le t\le u} \|x(t)-y(t)\|^2\,dt\right]$$

Appliquant le lemme de Gronwall, on trouve

$$E\left(\sup_{0\le t\le u} |x(t)-y(t)|^2\right) = 0$$

Considérons le temps d'arrêt $\tau_n = \inf\{t \in [0,T]\,,\ \|x(t)\| > n\}$. Si u$\in [0,T]$, on a

$$\|x_{u\wedge\tau_n}\|^2 \le 3\left(\|x_0\|^2 + \sup_{0\le u\le t}\left\|\int_0^{u\wedge\tau_n} f(r,x(r))dr\right\|^2 + \sup_{0\le u\le t}\left\|\int_0^{u\wedge\tau_n} g(r,x(r))dw(r)\right\|^2\right)$$

Il vient alors,

$$E\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\tau_n} \|x_u\|^2\right) \le 3\left(E\,\|x_0\|^2 + E\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} \|f(r,x(r))\|\,dr\right)^2 + 4E\left\|\int_0^{u\wedge\tau_n} \|g(r,x(r))\|^2\,dr\right\|\right) \quad (6)$$

en utilisant la croissance linéaire de f et g, on obtient:

$$E\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\tau_n} \|x_u\|^2\right) \le 3\left(E\,\|x_0\|^2 + 2K^2T^2 + 8K^2T + \left(2K^2T + 8K^2\right)\int_0^{u\wedge\tau_n} E\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\tau_n} \|x_u\|^2\right)dr\right)$$

On obtient, en appliquant le lemme de Gronwall, à la fonction $t \to E\left\|\sup_{0\le u\le t\wedge\tau_n} \|x_u\|^2\right\|$

$$E\left(\sup_{0\le u\le T\wedge\tau_n} \|x_u\|^2\right) \le 3\left(E\left(\|x_0\|^2\right) + 2K^2T^2 + 8K^2T + \left(2K^2T + 8K^2\right)\right)\exp\left\{3\left(2K^2 + 8K^2\right)\right\}$$

et le lemme de Fatou donne

$$E\left(\sup_{0\le u\le T} \|x_u\|^2\right) \le 3\left(E\left(\|x_0\|^2\right) + 2K^2T^2 + 8K^2T + \left(2K^2T + 8K^2\right)\right)\exp\left\{3\left(2K^2 + 8K^2\right)\right\}$$

2.2. Exemples d'équations différentielles stochastiques

Exemple 2.1.

Considérons l'équation

$$\begin{cases} dx(t) = gx(t)dw(t) \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Appliquons la formule d'Itô sur la fonction $u(y) = e^y$ où $dy(t) = -\frac{1}{2}g^2dt + gdw(t)$,on trouve:

$$\begin{aligned} de^y &= \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}g^2dt \\ &= e^y\left(-\frac{1}{2}g^2dt + gdw(t)\right) + \frac{1}{2}g^2e^y = ge^ydw(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} de^y &= \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}g^2 dt \\ &= e^y\left(-\frac{1}{2}g^2 dt + g dw(t)\right) + \frac{1}{2}g^2 e^y = g e^y dw(t) \end{aligned}$$

ainsi $de^y = ge^y dw(t)$, alors $x(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t g^2 ds + \int_0^t g dw(s)\right)$ est la solution de l'équation (7).

Exemple 2.2. (Modèle de Black and Scholes)

Considérons l'équation:

$$\begin{gathered} dx(t) = \mu x(t)dt + \sigma x(t)dw(t) \\ x(0) = x_0 \end{gathered}$$

On applique la formule d'Itô sur la fonction $u(t,x) = lnx$,on obtient

$$\begin{aligned} d\left(\ln x(t)\right) &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sigma^2 x^2 dt \\ &= \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\sigma^2 x^2 dt \\ &= \frac{1}{x}\left(\mu x(t)dt + \sigma x(t)dw(t)\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\sigma^2 x^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dw(t) \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} \ln(x(t)) &= \ln x(0) + \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)ds + \sigma\int_0^t dw(s) \\ &= \ln\left(x_0\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma w(t) \end{aligned}$$

ainsi

$$x(t) = x_0 \exp(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma w(t))$$

Exemple 2.3. (Equation de Langevin)

$$\begin{gathered} dx(t) = -bx(t)dt + \sigma dw(t),\ t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{gathered}$$

avec $b > 0$. On applique la formule d'Itô sur la fonction $u(t,x) = e^{bt}x(t)$, on obtient:

$$\begin{aligned} d\left(e^{bt}x(t)\right) &= be^{bt}x(t)dt + e^{bt}dx(t) \\ &= be^{bt}x(t)dt + e^{bt}\left(-bx(t)dt + \sigma dw(t)\right) \\ &= e^{bt}\sigma dw(t) \end{aligned}$$

ainsi

$$e^{bt}x(t) = x_0 + \sigma\int_0^t e^{bs}dw(s)$$

Alors

$$x(t) = e^{-bt}x_0 + \sigma\int_0^t e^{b(t-s)}dw(s)$$

2.3. Les équations différentielles stochastiques linéaires

Dans cette section on présente, quelques formules explicites pour les solutions des équations différentielles stochastiques linéaires.

Considérons l'équation homogène:

$$\begin{cases} dx(t) = A(t)x(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)x(t)dw_i(t), \ t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{8}$$

et l'équation non homogène

$$\begin{cases} dx(t) = (A(t)x(t) + a(t))\, dt + \sum_{i=1}^{m} (B_i(t)x(t) + b_i(t))\, dw_i(t), \ t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{9}$$

où $w(t) = (w_1(t), ..., w_m(t))$ est un processus de Wiener m-dimensionnel. $a(t)$ et $b_i(t)$, $1 \leq i \leq m$, sont des fonctions vectorielles continues et $A(t), B_i(t)$, $1 \leq i \leq m$, sont des fonctions matricielles continues. x_0 est une variable aléatoire telle que $E(\|x_0\|^2) < +\infty$ et indépendante de $w(t)$ pour tout $t \in [t_0, T]$.

2.3.1. Le cas scalaire

Théorème 2.3.1. *La solution de l'équation (9) est donnée par*

$$x(t) = y(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{y(s)}\left[\left(a(s) - \sum_{i=1}^{m} B_i(s)b_i(s)\right) ds + \sum_{i=1}^{m} b_i(s)dw_i(s)\right]\right) \tag{10}$$

où

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t}\left(A(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} {B_i}^2(s)\right) ds + \sum_{i=1}^{m} B_i(s)dw_i(s)\right)$$

et la solution de l'équation homogène est donnée par $x(t) = x_0 y(t)$. De plus ces solutions sont uniques p.s.

Dans le théorème suivant, on donne quelques propriétés de la solution de l'équation non homogène.

Théorème 2.3.2. *Soit $x(t)$ la solution de l'équation linéaire (9). On a les propriétés suivantes:*

1. *$E\left(|x(t)|^p\right) < +\infty$ pour tout $t \in [t_0, T]$ ssi $E\left(|x_0|^p\right) < +\infty$, $1 \leq p \leq +\infty$.*
2. *$m(t) = E(x(t))$ satisfait l'équation différentielle*

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = A(t)m(t) + a(t), \ t \in [t_0, T] \\ m(t_0) = E(x_0) \end{cases}$$

3. *La fonction $R_x(t) = E\left(x^2(t)\right)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire*

$$\begin{cases} \dot{R_x}(t) = \left(2A(t) + \sum_{i=1}^{m} {B_i}^2(t)\right) R_x(t) + 2m(t)\left(a(t)) + \sum_{i=1}^{m} Bi(t)bi(t)\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i^2(t) \\ R_X(t_0) = E(x_0^2) \end{cases}$$

4. *Pour $x(t)$ la solution de l'équation homogène (8) on a:*

$$E\left|x(t)\right|^p = \left(E\left(|x_0|^p\right) \exp\left(p\int_{t_0}^{t}\left[\left(A(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} {B_i}^2(s)\right) ds + \frac{p^2}{2}\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{m} B_i^2(s)ds\right]\right)\right)$$

où $1 \leq p \leq +\infty$.

Preuve

1. Soit x la solution de l'équation (9). Pour tout $t \in [t_0, T]$, on a

$$\begin{aligned}
dx(t) &= (A(t)x(t) + a(t))\,dt + \sum_{i=1}^{m} (B_i(t)x(t) + b_i(t))\,dw_i(t), t \geq t_0 \\
&\Longrightarrow x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} (A(s)x(s) + a(s))\,ds + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} (B_i(s)x(s) + b_i(s))\,dw_i(s), t \geq t_0 \\
&\Longrightarrow E(x(t)) = E(x_0) + \int_{t_0}^{t} (A(s)E(x(s)) + a(s))\,ds + \sum_{i=1}^{m} E\left(\int_{t_0}^{t} (B_i(s)x(s) + b_i(s))\,dw_i(s)\right) \\
&\Longrightarrow m(t) = E(x_0) + \int_{t_0}^{t} (A(s)m(s) + a(s))\,ds \\
&\Longrightarrow \dot{m}(t) = A(t)m(t) + a(t),\ m(t_0) = E(x_0)
\end{aligned}$$

2. D'aprés la formule d'Itô, on a pour tout $t \in [t_0, T]$

$$\begin{aligned}
dx^2(t) &= x(t)dx(t) + x(t)dx(t) + \sum_{i=1}^{m} (B_i(s)x(s) + b_i(s))^2\,ds \\
&\Longrightarrow dx^2(t) = 2x(t)dx(t) + \sum_{i=1}^{m} (B_i(s)x(s) + b_i(s))^2\,ds \\
&\Longrightarrow x^2(t) - x^2(t_0) = \int_{t_0}^{t} 2x(s)dx(s) + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} (B_i(s)x(s) + b_i(s))^2\,ds \\
&\Longrightarrow x^2(t) - x^2(t_0) = \int_{t_0}^{t} 2x(s)dx(s) + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} (B_i(s)x(s) + b_i(s))^2\,ds \\
&\Longrightarrow x^2(t) = x_0^2 + \int_{t_0}^{t} 2x(s)\,(A(s)x(s) + a(s))\,ds + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} (B_i(s)x(s) + b_i(s))\,dw_i(s) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} (B_i(s)x(s) + b_i(s))^2\,ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow E\left(x^2(t)\right) = E\left(x_0^2\right) + E\left(\int_{t_0}^{t} 2\left(A(s)x^2(s) + x(s)a(s)\right)ds\right) + \sum_{i=1}^{m} E\left(\int_{t_0}^{t} (B_i(s)x(s) + b_i(s))\,dw_i(s)\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} E \int_{t_0}^{t} \left(B_i^2(s)x^2(s) + 2B_i(s)b_i(s)x(s) + b_i^2(s)\right)ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_x(t) &= E\left(x_0^2\right) + \int_{t_0}^{t} (2A(s)R_x(s) + 2m(s)a(s))\,ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \left(B_i^2(s)R_x(s) + 2B_i(s)b_i(s)m(s) + b_i^2(s)\right)ds
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \dot{R}_x(t) = \left(2A(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i^2(t)\right) R_x(t) + 2 \left(a(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)b_i(t)\right) m(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i^2(t)$$

$$R_x(t_0) = E\left(x_0^2\right)$$

3. Soit $x(t)$ la solution de l'équation homogène (8). Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on a

$$\begin{aligned}
|x(t)|^p &= |x(t_0)|^p \exp p \left(\int_{t_0}^{t} \left(A(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} {B_i}^2(s)\right) ds + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} B_i(s)dw_i(s)\right) \\
&= |x_0|^p \exp p \left(\left(\int_{t_0}^{t} \left(A(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} {B_i}^2(s)\right) ds\right) \exp p \left(\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{m} B_i(s)dw_i(s)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E\left(|x(t)|^p\right) &= E\left(|x_0|\right)^p \exp p\left(\int_{t_0}^t \left(A(s)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m {B_i}^2(s)\right)ds+\int_{t_0}^t \sum_{i=1}^m B_i(s)dw_i(s)\right)\\
&= E\left(|x_0|\right)^p \exp p\left(\left(\int_{t_0}^t \left(A(s)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m {B_i}^2(s)\right)ds\right)E\left(\exp p\left(\int_{t_0}^t \sum_{i=1}^m B_i(s)dw_i(s)\right)\right)\right)\\
&= E\left(|x_0|\right)^p \exp p\left(\left(\int_{t_0}^t \left(A(s)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m {B_i}^2(s)\right)ds\right)\left(\exp \frac{1}{2}p^2\left(\int_{t_0}^t \sum_{i=1}^m B_i^2(s)ds\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

d'où on déduit que $E\left(|x(t)|^p\right) < +\infty$ *pour tout* $t \in [t_0, T]$ *ssi* $E\left(|x_0|^p\right) < +\infty$.

Exemple 2.3.3.
Considèrons l'équation:

$$
\begin{cases} dx(t) = \alpha x(t)dt + dw(t)(t),\ t \geq 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{11}
$$

x_0 est une variable aléatoire indépendante de $w(t)$, pour tout $t \geq 0$, telle que $E(x_0) < +\infty$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Appliquons la formule (10), on obtient:

$$
x(t) = x_0 y(t) + y(t)\int_0^t \frac{1}{y(s)}dw(s),\ \text{où } y(t) = \exp(\int_0^t \alpha ds) = \exp(\alpha t)
$$

alors

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 \exp(\alpha t) + \exp(\alpha t)\int_0^t \exp(-\alpha s)dw(s)\\
&= x_0 \exp(\alpha t) + \int_0^t \exp \alpha(t-s)dw(s)
\end{aligned}
$$

Soit $t \geq$. Calculons $E(x(t))$. On a

$$
E(x(t)) = \exp(\alpha t)E\left(x_0\right) + E\left(\int_0^t \exp \alpha(t-s)dw(s)\right)
$$

$$
\Longrightarrow E(x(t)) = \exp(\alpha t)E\left(x_0\right)
$$

Calculons $E(x^2(t))$. On a

$$
\begin{aligned}
E(x^2(t)) &= E\left(x_0^2 \exp(2\alpha t)\right) + E\left(\int_0^t \exp \alpha(t-s)dw(s)\right)^2\\
&\quad +2E\left(\left(x_0 \exp(\alpha t)\right)\left(\int_0^t \exp \alpha(t-s)dw(s)\right)\right)
\end{aligned}
$$

Utilisant les propriétés de l'intégrale d'Itô, on obtient:

$$
\begin{aligned}
E(x^2(t)) &= E(x_0^2)\exp(2\alpha t) + \left(\int_0^t \exp 2\alpha(t-s)ds\right)\\
&= \exp(2\alpha t)E(x_0^2) - \frac{1}{2\alpha}(1-e^{2\alpha t})
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
var(x(t)) &= E(x_0^2)\exp(2\alpha t) - \frac{1}{2\alpha}(1-e^{2\alpha t}) - \exp(2\alpha t)\left(E(x_0)\right)^2\\
&= \exp(2\alpha t)var(x_0) - \frac{1}{2\alpha}(1-e^{2\alpha t})
\end{aligned}
$$

2.3.2. Le cas vectoriel

On généralise dans cette section les résultats établis dans le cas scalaire au cas n-dimensionnel. Considérons l'équation homogène:

$$\begin{cases} dx(t) = A(t)x(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)x(t)dw_i(t), \ t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{12}$$

où $w(t) = (w_1(t), ..., w_m(t))$ est un processus de Wiener m-dimensionnel. $A(t)$ et $B_i(t)$, $1 \leq i \leq m$, sont des fonctions matricielles continues, x_0 est une variable aléatoire telle que $E(\|x_0\|^2) < +\infty$ et indépendante de $w(t)$ pour tout $t \in [t_0, T]$.

Soit $x_i(t)$ la solution de l'équation (12) correspondante à la valeur initiale déterministe $x_0 = e_i$, la ième colonne de la matrice identité, et soit $\Phi(t)$ la matrice définie par

$$\Phi(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$$

on peut montrer que $\Phi(t)$ satisfait l'équation différentielle matricielle suivante:

$$\begin{cases} d\Phi(t) = A(t)\Phi(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\Phi(t)dw_i(t), \ t \geq t_0 \\ x(t_0) = I_n \end{cases}$$

La matrice $\Phi(t)$ est appelée la matrice fondamentale de l'équation (12).

En utilisant $\Phi(t)$, on peut résoudre l'équation non homogène suivante:

$$\begin{cases} dx(t) = (A(t)x(t) + a(t))\, dt + \sum_{i=1}^{m} (B_i(t)x(t) + b_i(t))\, dw_i(t), \ t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{13}$$

où $a(t)$ et $b_i(t)$, $1 \leq i \leq m$, sont des fonctions vectorielles. On a le résultat suivant.

Théorème 2.3.4. *L'unique solution de l'équation (12) est donnée par:*

$$x(t) = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)dy(s)\right)$$

où $y(t)$ est une solution de l'équation différentielle

$$dy(t) = \left(a(t) - \sum_{i=1}^{m} B_i(t)b_i(t)\right) dt + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)dw_i(t)$$

Preuve

Soit $t \in [t_0, T]$. Posons $x(t) = \Phi(t)z(t)$, où

$$dz(t) = \Phi^{-1}(t)\left(\left(a(t) - \sum_{i=1}^{m} B_i(t)b_i(t)\right) dt + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)dw_i(t)\right)$$

D'aprés la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned} dx(t) &= d\Phi(t)Z(t) + \Phi(t)dz(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t)b_i(t)dt \\ &= \left(A(t)\Phi(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\Phi(t)dw_i(t)\right) Z(t) + \Phi(t) \\ &\quad \Phi^{-1}(t)\left(\left(a(t) - \sum_{i=1}^{m} B_i(t)b_i(t)\right) dt + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)dw_i(t)\right) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)b_i(t)dt \\ &= \left(A(t)\Phi(t)Z(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\Phi(t)Z(t)dw_i(t)\right) + a(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)dw_i(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad dx(t) &= \left(A(t)x(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)x(t)dw_i(t)\right) + a(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)dw_i(t) \\
&= \left(A(t)x(t)dt + a(t)\right)dt + \left(\sum_{i=1}^{m} B_i(t)x(t) + b_i(t)\right)dw_i(t)
\end{aligned}$$

d'où on déduit que $x(t)$ est la solution de l'équation *(12)*.

Remarque 2.3.5.

La matrice $\Phi(t)$ n'a pas une formule explicite en général. Cependant, dans le cas où $A(t) = A$, $B_i(t) = B(t)$, $1 \leq i \leq m$, et

$$AB_i = B_iA \text{ et } B_iB_j = B_jB_i,\ i,j = 1,...,m$$

on peut vérifier que

$$\Phi(t) = \exp\left(\left(A - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} B_i^2(t)\right)(t - t_0) + \sum_{i=1}^{m} B_i\left(w_i(t) - w_i(t_0)\right)\right)$$

Des propriétés de la solution $x(t)$ sont données dans le théorème suivant.

Théorème 2.3.6.

Soit $x(t)$ la solution de l'équation non homogène (13) et soient $m(t) = E(x(t))$ et $R_x(t) = E(x(t)x^T(t))$. Alors

1.
$$\begin{cases} \dot{m}(t) = A(t)m(t) + a(t),\ t \in [t_0, T] \\ m(t_0) = E(x_0) \end{cases} \tag{14}$$

2.
$$\begin{cases} \dot{R}_x(t) = A(t)R_x(t) + R_x(t)A^T(t) + m(t)a^T(t) + a(t)m^T(t) + \sum_{i=1}^{m} Bi(t)R_x(t)Bi^T(t) \\ \qquad + Bi(t)m(t)b_i^T(t) + b_i(t)m^T(t)B_i^T(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)b_i^T(t) \\ R_X(t_0) = E(x_0x_0^T) \end{cases} \tag{15}$$

Preuve

La preuve de (14) est similaire à celle du cas scalaire. Montrons (15).

D'aprés la formule d'Itô, on a pour tout $t \in [t_0, T]$

$$\begin{aligned}
dx(t)x^T(t) &= \left(\left(A(t)x(t) + a(t)\right)dt + \sum_{i=1}^{m}\left(B_i(t)x(t) + b_i(t)\right)dw_i(t)\right)x^T(t) \\
&\quad + x(t)\left(\left(A(t)x(t) + a(t)\right)dt + \sum_{i=1}^{m}\left(B_i(t)x(t) + b_i(t)\right)dw_i(t)\right)^T \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m}\left(B_i(s)x(s) + b_i(s)\right)\left(B_i(s)x(s) + b_i(s)\right)^T ds
\end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\begin{aligned}
x(t)x^T(t) - x(t_0)x^T(t_0) &= \int_{t_0}^{t}\left(\left(A(s)x(s)x^T(s) + a(s)x^T(s)\right)ds + \sum_{i=1}^{m}\left(B_i(s)x(s)x^T(s) + b_i(s)x^T(s)\right)dw_i(s)\right) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t}\left(\left(x(s)x^T(s)A^T(s) + x(s)a^T(s)\right)ds + \sum_{i=1}^{m}\left(x(s)x^T(s)B_i^T(s) + x(s)b_i^T(s)\right)dw_i(s)\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\left(B_i(s)x(s)x^T(s)B_i^T(s) + b_i(s)x^T(s)B_i^T(s) + B_i(s)x(s)b_i^T(s) + b_i(s)b_i(s)^T\right)ds
\end{aligned}$$

appliquant l'espérance mathématique, on trouve

$$\begin{aligned} R_x(t) &= E(x_0x_0^T) + \int_{t_0}^{t} \left(A(s)R_x(s) + a(s)m^T(s)\right) ds + \int_{t_0}^{t} R_x(s)A^T(s) + m(s)a^T(s)ds \\ &+\sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \left(B_i(s)R_x(s)B_i^T(s) + b_i(s)m^T(s)B_i^T(s) + B_i(s)m(s)b_i^T(s) + b_i(s)b_i(s)^T\right) ds \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \dot{R}_x(t) &= A(t)R_x(t) + R_x(t)A^T(t) + \left(a(t)m^T(t) + m(t)a^T(t)\right) \\ &+\sum_{i=1}^{m} \left(B_i(t)R_x(t)B_i^T(t) + b_i(t)m^T(t)B_i^T(t) + B_i(t)m(t)b_i^T(t) + b_i(t)b_i(t)^T\right) \\ R_x(t_0) &= E(x_0x_0^T) \end{aligned}$$

Exemple 2.3.7.
Considrons l'équation différentielle stochastique:

$$\begin{aligned} dx(t) &= -\frac{1}{2}x(t)dt + Bx(t)dw(t), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

où $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $w(t)$ est le mouvement brownien standard. On remarque que $AB = BA$, alors d'aprés la remarque 2.3.5, on a

$$\Phi(t) = \exp\left(\left(A - \frac{1}{2}B^2(t)\right)(t - t_0) + B\left(w(t) - w(t_0)\right)\right)$$

alors

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \exp\left(\left(-\frac{1}{2}I_2 - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2\right)t + Bw(t)\right) \\ &= \exp\left(\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)t + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w(t)\right) \\ &= \exp(-t)\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & -w(t) \\ w(t) & 0 \end{bmatrix} w\right) \end{aligned}$$

Alors

$$x(t) = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)dy(s)\right)$$

où $y(t)$ est une solution de l'équation différentielle

$$dy(t) = \left(a(t) - \sum_{i=1}^{m} B_i(t)b_i(t)\right)dt + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)dw_i(t) = 0$$

alors

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x_0 \\ &= \exp(-t)\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & -w(t) \\ w(t) & 0 \end{bmatrix}\right)x_0 \end{aligned}$$

Exemple 2.3.8.

Considérons l'équation différentielle stochastique:

$$\begin{cases} dx_1(t) = x_2(t)dt + \alpha dw_1(t) \\ dx_2(t) = -x_1(t)dt + \beta dw_2(t) \end{cases}$$

où $w_1(t)$ et $w_2(t)$ sont deux mouvements browniens réels et α, β sont de constantes. Sous la forme matricielle ce système peut être présenter sous la forme suivante:

$$dx(t) = Ax(t)dt + Bdw(t), \text{ où } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \ x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Comme $AB \neq BA$, alors on ne peut pas utiliser la remarque 2.3.5. Dans cette exemple, on procède comme suit

$$\begin{aligned} \exp(-At)dx(t) &= \exp(-At)Ax(t)dt + \exp(-At)Bdw(t) \\ &\Longrightarrow \exp(-At)dx(t) - \exp(-At)Ax(t)dt = \exp(-At)Bdw(t) \\ &\Longrightarrow d(\exp(-At)x(t)) = \exp(-At)Bdw(t) \\ &\Longrightarrow \exp(-At)x(t) = \exp(-At_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp(-As)Bdw(s) \\ &\Longrightarrow x(t) = \exp(A(t-t_0))x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp(A(t-s))Bdw(s) \end{aligned}$$

On a $\exp(A(t-t_0)) = \begin{bmatrix} \cos(t-t_0) & \sin(t-t_0) \\ -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{bmatrix}$, donc

$$\exp(A(t-s))B = \begin{bmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\cos(t-s) & \beta\sin(t-s) \\ -\alpha\sin(t-s) & \beta\cos(t-s) \end{bmatrix}$$

ainsi

$$\int_{t_0}^{t} \exp(A(t-s))Bdw(s) = \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} \alpha\cos(t-s) & \beta\sin(t-s) \\ -\alpha\sin(t-s) & \beta\cos(t-s) \end{bmatrix} dw(s)$$

Alors la solution est donnée par

$$x(t) = \begin{bmatrix} \cos(t-t_0) & \sin(t-t_0) \\ -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{bmatrix} x_0 + \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} \alpha\cos(t-s) & \beta\sin(t-s) \\ -\alpha\sin(t-s) & \beta\cos(t-s) \end{bmatrix} dw(s)$$

Références

1. L. Arnold, Stochastic Differential Equations: Theory and Applications, Wiley, 1974.
2. Guanrong. Chen, Goong. Chen and Shih-Hsun Hsu, Linear Stochastic Control Systems, CRC Press, New-York 1995.
3. Lawrence C. Evans, An Introduction to Stochastic Differential Equations, UC Berkeley.
4. B. Oksendale, Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications, Springer, Verlag, Berlin, 1985.