Théorie du contrôle stochastique

Dr. M. KADA

DECEMBRE 2020

0.1. CONTENNU DE LA MATIERE

1. Stabilité stochastique

   Stabilité de Lyapunov
   Stabilité des moments
   Stabilité des systèmes stochastiques linéaires

2. Propriétés structurelles des systèmes stochastiques

   Stabilisabilité et détectabilité
   Contrôlabilité et observabilité

3. Contrôle optimal

   Contrôle optimal à horizon finie
   Contrôle optimal à horizon infinie

Part I

Stabilité stochastique

0.2. Introduction

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une généralisation de la notion d'équation différentielle prenant en compte un terme de bruit blanc. Les EDS permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion. Elles permettent aussi de traiter théoriquement ou numériquement des problèmes issus de la théorie des équations aux dérivées partielles. Les domaines d'application des EDS sont vastes :

– La modélisation de phénomènes de diffusion en physique (mécanique des fluides, géophysique, ...) : c'est à l'origine de la motivation de l'étude du mouvement brownien.

– Les mathématiques financières

– Les systèmes dynamiques aléatoires.

– Les modèles d'écoulements de polymères multi-échelles

En 1892, A.M. Lyapunov introduit le concept de la stabilité d'un système dynamique. La stabilité signifie l'insensibilité de l'état du système à de petits changements dans l'état initial ou les paramètres du système .Dans ce chapitre, nous allons présenté les divers types de stabilité pour une équation différentielle stochastique de dimension n.

0.3. Stabilité en probabilité

Considérons l'équation différentielle stochastique:

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t), t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

On suppose que cette équation admet une solution unique x(t) et pour simplifier; on suppose que $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On suppose ausssi que $f(t, 0) = 0$ et $g(t, 0) = 0$, $\forall t \geq 0$. Alors $x(t) = 0$ est le point d'équilibre de l'équation (1).

0.3.1. Définitions

1. Le point d'équilibre du système (1) est stochastiquement stable en probabilité si, pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\lim_{x_0 \to 0} P\left\{ \sup_{t \in [0, +\infty]} \|x(t)\| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

sinon il est instable.

2. Le point d'équilibre du système (1) est asymptotiquement stochastiquement stable s'il est stochastiquement stable et

$$\lim_{x_0 \to 0} P\left\{ \lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0 \right\} = 1$$

3. Le point d'équilibre du système (1) est globalemment asymptotiquement stochastiquement stable s'il est stochastiquement stable et

$$P\left\{ \lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0 \right\} = 1, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Avant de donner le théorème de stabilité de Lyapunov, on donne la définition suivante.

Definition 1. *1. Soit V(x) une fonction scalaire continue définie sur le boule fermée*

$$\overline{B_r} = \{x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| \leq r\}, \ r > 0$$

V(x) est définie positive au sens de Lyapunov si $V(0) = 0$ et V(x)>0, $\forall x \neq 0$

2. Soit V(t,x) une fonction scalaire continue définie sur $[0, +\infty[\times \overline{B_r}$. V est dite définie positive au sens de Lyapunov si V(t,0)=0 et il existe une fonction définie positive W(x) telle que

$$V(t, x) \geq W(x) > 0, \ \forall t \neq 0$$

3. Une fonction V(x) ou V(t,x) est définie négative si -V est définie positive.

On a le théorème suivant de stabilité.

Definition 2. *1. Soit V(t,x):$[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de Lyapunov telles que ses dérivés partielles V_t, V_{x_i} et $V_{x_i x_j}$ sont continues sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n/\{0\}$. Supposons que LV(t,x)$\leq 0$ pour tout $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ où*

$$LV(t, x) = V_t(t, x) + V_x(t, x) f(t, x) + \frac{1}{2} trace\left(g^T(t, x) V_{xx}(t, x) g(t, x)\right)$$

avec

$$V_T = \frac{\partial V}{\partial t}, \ V_x = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right] \text{ et } V_{xx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

alors l'origine est stable.

2. *Si en plus* LV *est définie négative alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.*

Remark 3. *Si le système est autonome*

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dw(t), t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

alors on peut construire une fonction de Lyapunov V(x). Si G vérifie

$$yg(x)g(x)y \geq m(x) \|y\|^2, \text{ x, } y \in B_r, \text{ r>0}$$

où m(x) est positive alors la stabilité implique l'asymptotique stabilité.

Pratiquement, on utilise la condition suffisante suivante:

$$LV(t,x) \leq -kV(t,x), \; k > 0, \; (t,x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$$

pour montrer que LV est définie négative.

Example 4. *Considérons le système linéaire stochastique*

$$\begin{cases} dx(t) = ax(t)dt + \sigma x(t)dw(t); \; t \geq 0, \; a, \sigma \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Considérons la fonction de Lyapunov V(x) $= |x|^r$, r≥ 0. *Alors*

$$\begin{aligned} LV(x) &= axV'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx} \\ &= arx\,|x|^{r-1} + \frac{1}{2}\sigma^2 r(r-1)x^2\,|x|^{r-2} \\ &\leq ar\,|x|^r + \frac{1}{2}\sigma^2 r(r-1)\,|x|^r \end{aligned}$$

si a$<\frac{\sigma^2}{2}$, *on peut choisir* 0<r<1-$\frac{2a}{\sigma^2}$ *pour montrer que* LV$\leq -kV$. *Donc le système est globalement asymptotiquement stable.*

Dans le cas où $\sigma = 0$ *le système* $\begin{cases} dx(t) = ax(t)dt \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ *est stable si a=0. Donc le terme aléatoire ne change pas la stabilité dans ce cas.*

Le système stochastique es stable pour a>0 tel que $a < \frac{\sigma^2}{2}$. *Donc le terme* $\sigma^2 x^2/2$ *dans la formule de LV conduit à la stabilité.*

Remark 5. *La méthode de Lyapunov dépend du choix de la fonction de Lyapunov. Pour déterminer V(t,x); on peut , par exemple, résoudre l'équation LV=0 où l'inégalité LV≤ 0 Le choix V(x)=x$^T Px$ où P est une matrice définie positive, nous donne*

$$LV = 2f(t,x)Cx + trace(g(t,x)g^T(t,x)C) \leq 0$$

dans un voisinage de x=0 pour tout t≥ 0.

0.4. Stabilité exponentielle presque sûre

On donne maintenant un théorème pour la stabilité presque sûre.

Definition 6. *Le point d'équilibre du système (1) est exponentiellement presque sûrement stable'il existe une constante $\alpha>$ 0 telle que*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|) < -\alpha \ p.s.$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, où $\lim\limits_{t\to+\infty} \sup \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|)$ est l'exposant de Lyapunov de la solution x(t).

Remark 7. *La relation (??) est équivalente à l'existence d'une constante $\alpha>$ 0 et $M > 0$ telle que*

$$\|x(t)\| \leq M \|x_0\| e^{-\alpha(t-t_0)} \ \ p.s.$$

On a le théorème suivant.

Theorem 8. *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov définie positive V(t,x(t)) et des constantes p>0, $c_1 > 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ et $c_3 \geq 0$, telles que*

$$c_1 \|x(t)\|^p \leq V(t,x(t)), \ \text{LV(t,x(t))} \leq c_2 V(t,x(t)), \ \|\mathcal{B}Vx(t,x(t))\|^2 \geq c_3 V^2(t,x(t)),$$

pour $t \geq 0$, x$\neq 0$, où $\mathcal{B}V(t,x(t)) = V_x(t,x(t))g(t,x(t))$. Alors

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|) \leq \frac{2c_2 - c_3}{2p}, \ \ p.s. \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

et le point d'équilibre du système (1) est exponentiellement presque sûrement stable si $c_3 > 2c_2$.

On a le résultat suivant.

Theorem 9. *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov définie positive V(t,x(t)) et des constantes p>0,* α, $\lambda \in \mathbb{R}$ *, telles que*

$$\alpha \left\| x(t) \right\|^p \leq V(t, x(t)),\ LV(t,x(t)) \leq -\lambda V(t, x(t)),$$

pour $t \geq 0$, $x \neq 0$. *Alors*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup \frac{1}{t} \ln \left(\left\| x(t) \right\| \right) \leq \frac{-\lambda}{p},\ p.s.\ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

et le point d'équilibre du système (1) est presque sûrement exponentiellement stable .

0.5. Stabilité des moments

Definition 10.

1. *Soit p>0. Le point d'équilibre est stable en moment d'ordre p si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\sup_{t \geq 0} E \left(\left\| x(t) \right\|^p \right) \leq \varepsilon$, *pour tout* x_0 *tel que* $\left\| x_0 \right\| < \delta$.
2. *Le point d'équilibre est asymptotiquement stable en moment d'ordre p s'il est stable et* $\lim_{t \to +\infty} E \left(\left\| x(t) \right\|^p \right) = 0$, *pour tout* x_0 *au voisinage de 0.*
3. *Le point d'équilibre est exponentiellement stable en moment d'ordre p s'il existe* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *et* $\delta > 0$ *tels que*

$$E \left(\left\| x(t) \right\|^p \right) \leq c_1 \left\| x_0 \right\|^p e^{-c_2(t-t_0)}$$

pour tout x_0 *tel que* $\left\| x_0 \right\| < \delta$.

Dans le cas où $p = 1$ ou $p = 2$, on parle de la stabilité en moment d'ordre 1 ou la stabilité d'ordre 2.

Example 11. *Considérons le système*

$$dx(t) = ax(t)dt + \sigma x(t)dw(t),\ t \geq 0$$

on remarque

$$E \left| x(t) \right|^p = \left| x_0 \right|^p \exp \left(p(a - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{p}{2}\sigma^2) \right) t,\ t \geq 0$$

que le point d'équilibre est exponentiellement stable ssi $a < \frac{1-p}{2}\sigma^2$.

Le théorème suivant illustre l'application des fonctions de Lyapunov pour montrer la stabilité en moment d'ordre p.

Theorem 12. *Une condition suffisante pour l'exponentielle stabilité en moment d'ordre p est l'existence d'une fonction V(t,x), définie sur* $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ *et continuement différentielle par rapport à t et de classe* C^2 *par rapport à x et qui satisfait l'inégalité:*

$$c_1 \|x\|^p \leq V(t,x) \leq c_2 \|x\|^p \,, \; LV(t,x) \leq -c_3 \|x\|^p$$

pour des constantes positives c_1, c_2 *et* c_3.

Remark 13. *Généralement, la stabilité exponentielle en moment d'ordre 2 n'implique pas la stabilité exponentielle presque sûre et la stabilité exponentielle presque sûre n'implique pas la stabilité exponentielle en moment d'ordre 2. Cependant, la stabilité exponentielle en moment d'ordre 2 implique la stabilité exponentielle presque sûre si on ajoute des conditions supplémentaires.*

On définit maintenant les notions de la stabilité en moyenne et la stabilité en moyenne quadratique.

Definition 14.

1. *On dit que le point d'équilibre du système 1 set stable en moyenne si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\sup_{t \geq 0} \|E(x(t))\| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } x_0 \text{ tel que } \|x_0\| \leq \delta$$

2. *On dit que le point d'équilibre du système 1 set stable en moyenne quadratique si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\sup_{t \geq 0} \left\|E(x(t)x^T(t))\right\| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } x_0 \text{ tel que } \|x_0\| \leq \delta$$

0.6. Stabilité des systèmes linéaires

Considérons l'équation linéaire homogène:

$$\begin{cases} dx(t) = A(t)x(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)x(t)dw_i(t), \; \mathrm{t} \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

Dans cette section on donne des conditions de stabilité des systèmes linéaires. Soit $m(t) = E(x(t))$. On a

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= A(t)m(t), \\ m(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3}$$

Alors la stabilité en moyenne de l'équation (2) est équivalente à l'étude de la stabilité de l'quation déterministe (3). La stabilité en moyenne quadratique de l'équation (2) est équivalente à la stabilité de l'équation matricielle déterministe

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + \sum_{i=}^{m} B_i(t)P(t)B_i^T(t) \\ P(t_0) &= x_0 x_0^T \end{aligned}$$

On a le théorème suivant.

Theorem 15. *Supposons que les fonctions $A(t)$ et $B(t)$ sont bornée sur $[t_0, +\infty[$. Alors une condition nécéssaire pour la stabilité exponentielle en moment d'ordre 2 est que pour toute matrice symétrique définie positive et bornée $C(t)$ telle que $x^T C(t)x \geq k_1 \|x\|^2$, $k_1 > 0$, l'équation différentielle matricielle*

$$\frac{dP(t)}{dt} + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \sum_{i=}^{m} B_i^T(t)P(t)B_i(t) = -C(t) \tag{4}$$

admet comme solution une matrice $P(t)$ qui admet les mêmes propriétés que $C(t)$.

Remark 16. *Quand $B_i(t)$=0 pour tout i$\in$ $\{1, ..., m\}$, l'équation (4) se réduit à une équation de différentielle de Lyapunov qui donne un critère de la stabilité exponentielle pour les systèmes déterministes.*

Pour les systèmes à temps invariant, on a le résultats suivant.

Corollary 17. *Si le système (2) est à temps invariant, une condition nécessaire pour la stabilité exponentielle en moment d'ordre 2 est que, pour toute matrice symétrique définie positive C, l'équation matriceille*

$$A^T P + PA + \sum_{i=}^{m} B_i^T P B_i = -C \tag{5}$$

admet une solution symétrique définie positive.

Example 18. *Considérons le système*

$$\begin{cases} dx(t) = A(t)x(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)x(t)dw_i(t), \ t \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où $A+A^T = cI$ *et* $Bi = d_i I$, *1*$\leq i \leq m$, c *et* d_i *sont des constanes réelles.*

Pour C=-$\left(c + \sum_{i=1}^{m} d_i^2\right)$, *avec* $\left(c + \sum_{i=1}^{m} d_i^2\right) < 0$, *on peut vérifier que D=I est une solution pour l'équation de Lyapunov (5) associée à ce système. Donc le système est stable en moment d'ordre 2.*

Example 19. *Considérons l'équation différentielle stochastique suivante*

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)x(t)dw(t), \ t \geq 0, \tag{6}$$

avec $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$, *w(t) est un mouvement brownien scalaire et*

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix},$$

Puisque AB=BA alors la solution de l'équation (6) est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left(\left(A - \frac{B^2}{2}\right)t + Bw(t)\right)x_0 \\ &= \exp\left(\begin{bmatrix} a - 0.5b^2 & 0 \\ 0 & a - 0.5b^2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} w(t)\right)x_0. \end{aligned}$$

Comme on a $\lim_{t\to+\infty} \frac{w(t)}{t} = 0$, *alors* $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\| = a - 0.5b^2$ *p.s., alors le système (6) est exponentiellement presque sûrement stable si et seulement 2a<*b^2.

Ainsi, si 0$\leq$ $2a < b^2$, *l'équation déterministe* $dx(t) = A(t)x(t)dt$ *est instable tandis que l'équation stochastique 6) est exponentiellement presque sûrement stable.*

Etudions maintenant la stabilité en moment d'ordre 2 pour l'équation (6). L'équation de Lyapunov associée à ce système est

$$A^T P + PA + \sum_{i=}^{m} B_i^T P B_i = -C \tag{7}$$

Soient C=I et P=$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$ *. L'équation de Lyapunov (7) est équivalente à*

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi

$$\begin{bmatrix} aP_1 & aP_2 \\ aP_2 & aP_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} aP_1 & aP_2 \\ aP_2 & aP_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b^2P_3 & b^2P_2 \\ b^2P_2 & b^2P_1 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} P_3b^2+2aP_1 & P_2b^2+2aP_2 \\ P_2b^2+2aP_2 & P_1b^2+2aP_3 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on obtient

$$\begin{cases} P_3b^2+2aP_1=-1 \\ P_2b^2+2aP_2=0 \\ P_1b^2+2aP_3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_3b^2+2aP_1=-1 \\ P_2b^2+2aP_2=0 \\ P_1b^2+2aP_3=-1 \end{cases}$$

Si $2a+b^2\neq 0$, *on obtient* $P_2=0$ *et* $P_1\left(b^2-2a\right)+\left(2a-b^2\right)P_3=0$. *D'où on trouve* $P_1=P_3$. *Alors* $P_1=P_3=\frac{-1}{2a+b^2}$. *Donc la solution de l'équation de Lyapunov (7) est*

$$P=\begin{bmatrix} \frac{-1}{2a+b^2} & 0 \\ . & \frac{-1}{2a+b^2} \end{bmatrix}$$

P est définie positive ssi $2a+b^2<0$. *On déduit que l'equation (6) est stable ssi* $2a<-b^2$.

Ainsi, si $0\geq 2a\geq -b^2$,*l'équation déterministe* $dx(t)=A(t)x(t)dt$ *est exponentiellement stable tandis que l'équation stochastique (6) n'est pas exponentiellement stable en moment d'ordre 2. Enfin, on remarque que si* $2a<-b^2$ *alors* $2a<b^2$ *, alors pour cet exemple la stabilité en moment d'ordre 2 implique la stabilité presque sûre.*

On termine ce chapitre par le résultat suivant:

Proposition 20. *Considérons le système*

$$\begin{cases} dx(t)=Ax(t)dt+bc^Tx(t)dw(t),\ t\geq 0, \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \tag{8}$$

où A est une matrice d'ordre n et b, c$\in\mathbb{R}^n$.

Le système (8) est exponentiellement stable en moment d'ordre 2 ssi A est stable et $\int_0^{+\infty}\left(c^Te^{At}b\right)^2<1$.

Proof. 1. On suppose que le système (8) est exponentiellement stable en moment d'ordre 2. Alors l'équation de Lyapunov

$$A^T P + PA + Cb^T Pbc^T = -I \tag{9}$$

admet une solution unique définie positive P. On a

$$A^T P + PA + Cb^T Pbc^T = -I$$

$$\begin{aligned} &\iff A^T P + PA = -(Cb^T Pbc^T + I) \\ &\iff A^T P + PA = -Q,\ Q = Cb^T Pbc^T + I \end{aligned}$$

comme $Q > 0$ alors A est stable.

Maintenant, définissons l'opérateur

$$G(Q) = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

Appliquons l'opérateur G sur l'équation (9), on obtient

$$G\left(A^T P + PA\right) + G\left(Cb^T Pbc^T\right) = -G(I_n)$$

Comme A est stable alors $G\left(A^T P + PA\right) = -P$. Ainsi P satisfait l'équation

$$-P + G\left(Cb^T Pbc^T\right) = -G(I_n)$$

qui est équivalente à

$$\begin{aligned} -P + G\left(cb^T Pbc^T\right) &= -G(I_n) \iff -b^T Pb + b^T G\left(cb^T Pbc^T\right) b = -b^T G(I_n) b \\ &\iff -b^T Pb + \left(b^T Pb\right) b^T G\left(c^T\right) b = -b^T G(I_n) b \\ &\implies b^T Pb\left(b^T G\left(cc^T\right) b - 1\right) = -b^T G(I_n) b \end{aligned}$$

1. Si $b = 0$ alors $b^T G\left(cc^T\right) b = 0 < 1$.
2. Si $b \neq 0$ alors

$$\implies b^T G\left(cc^T\right) b - 1 = -b^T G(I_n) b / b^T Pb < 0$$

ainsi

$$\int_0^{+\infty} b^T e^{A^T t} cc^T e^{At} b dt < 1$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \left(c^T e^{At} b\right)^2 dt < 1$$

2. Supposons maintenant que A est stable et $\int_0^{+\infty} \left(c^T e^{At} b\right)^2 < 1$. Soit

$$P = \frac{-b^T G(I_n) b}{b^T G\left(cc^T\right) b - 1} G(cc^T) + G\left(I_n\right)$$

Alors P satisfait l'équation

$$-P + b^T P b G(cc^T) + G\left(I_n\right) = 0$$

Comme A est stable, alors

$$-G\left(A^T P + PA\right) + b^T P b G(cc^T) + G\left(I_n\right) = 0$$

ainsi

$$-A^T P + PA + cb^T P b c^T + I_n = 0$$

Alors A est exponeniellement stable en moment d'ordre 2. ■

Part II

Propriétés structurelles des systèmes linéaires stochastiques

Dans ce chapitre on présente la version stochastique stochastique de quelques concepts de base dans la théorie de contrôle qui sont: Stabilisabilité, détectabilité, l'observabilité et la contrôlabilité.

0.7. Stabilisabilité et détectabilité des systèmes linéaires stochastiques

Considérons le système suivant

$$
\begin{aligned}
dx(t) &= (A_0(t)x(t) + B_0(t)u(t))dt + \sum_{k=1}^{r} A_k(t)x(t)dw_k(t),\ t \geq 0, \\
y(t) &= C_0 x(t)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

l'entré $u \in \mathbb{R}^m$ et la sortie $y \in \mathbb{R}^p$. Notons par $A = [A_0, A_1, ..., A_r]$.

Definition 21. *1. On dit que le système (10) est stabilisable s'il existe $F : R_+ \to \mathbb{R}^{m\times n}$ une fonction continue et borbée telle que l'origine du système en boucle fermé*

$$
dx(t) = (A_0(t) + B_0(t)F(t))x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} A_k(t)x(t)dw_k(t),\ t \geq 0,
$$

est exponentiellement stable en moment d'ordre 2.

2. On dit que le système (10) est détectable s'il existe $K : R_+ \to \mathbb{R}^{n\times p}$ une fonction continue et borbée telle que l'origine du système en boucle fermé

$$
dx(t) = (A_0(t) + K(t)C_0(t))x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} A_k(t)x(t)dw_k(t),\ t \geq 0,
$$

est exponentiellement stable en moment d'ordre 2.

Notation 22. *Si le système (10) est stabilisable on dit que (A,B) est stabilisable et quand le système (10) est détectable on dit que (C_0, A) est détectable.*

Pour lse systèmes à temps invariant, on a le résultat suivant.

Proposition 23. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le système (10) est stabilsable.*

2. *L'équation matricielle*

$$A_0X + XA_0^* + B_0\Gamma + \Gamma^* B_0^* + \sum_{k=1}^{r} A_k X A_k^* + I_n = 0 \tag{11}$$

   admet une solution (X,Γ) $\in H_N \times \mathbb{R}^{m\times n}$, et si (X,Γ) est une solution de l'équation (11), avec X>0, alors le feedback stabilisant est donné par F= ΓX^{-1}.

Pour la détectabilité, on a la proposition suivante.

Proposition 24. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le système (10) est détectable.*

2. *L'équation matricielle*

$$A_0^*Y + YA_0 + GC_0 + C_0^* G^* + \sum_{k=1}^{r} A_k^* y A_k + I_n = 0 \tag{12}$$

   admet une solution (Y,G) $\in H_N \times \mathbb{R}^{n\times P}$, et si (Y,G) est une solution de l'équation (12), avec Y>0, alors l'injection stabilisante est donnée par K= $Y^{-1}G$.

Proof. Montrons que 1$\Longrightarrow$ 2. Supposons que le système (10) est détectable. Alors, il existe K telle que l'origine du système en boucle fermé

$$dx(t) = (A_0 + KC_0)x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} A_k x(t) dw_k(t), \ t \geq 0,$$

est exponentiellement stable en moment d'ordre 2. D'aprés le théorème de Lyapunov, on déduit que l'équation

$$(A_0 + KC_0)^T Y + Y(A_0 + KC_0) + \sum_{i=}^{m} B_i^T Y B_i = -I$$

admet une solution définie positive P. On a

$$(A_0+KC_0)^TY+Y(A_0+KC_0)+\sum_{i=}^{m}B_i^TYB_i=-I$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow\quad {A_0}^TY+C_0^TK^TY+YA_0+YKC_0+\sum_{i=}^{m}B_i^TYB_i=-I\\
&\Longleftrightarrow\quad {A_0}^TY+YA_0+C_0^TK^TY+YKC_0+\sum_{i=}^{m}B_i^TYB_i=-I
\end{aligned}$$

Posons $G=YK$ alors

$${A_0}^TY+YA_0+C_0^TG^T+GC_0+\sum_{i=}^{m}B_i^TYB_i=-I$$

et comme $G=YK$ alors $K=Y^{-1}G$.

Montrons que 2$\Longrightarrow$ 1. Supposons que l'équation matricielle

$$A_0^*Y+YA_0+GC_0+C_0^TG^T+\sum_{k=1}^{r}A_k^TYA_k+I_n=0 \tag{13}$$

admet une solution $(Y,G)\in H_N\times\mathbb{R}^{n\times P}$, avec $Y>0$ et $K=Y^{-1}G$. On a

$$A_0^*Y+YA_0+GC_0+C_0^TG^T+\sum_{k=1}^{r}A_k^TYA_k+I_n=0$$

$$\Longleftrightarrow {A_0}^TY+YA_0+C_0^TK^TY+YKC_0+\sum_{i=}^{m}B_i^TYB_i=-I$$

$$\Longleftrightarrow {A_0}^TY+YA_0+C_0^TK^TY+YKC_0+\sum_{i=}^{m}B_i^TYB_i=-I$$

$$(A_0+KC_0)^TY+Y(A_0+KC_0)+\sum_{i=}^{m}B_i^TYB_i=-I$$

Alors, il existe K telle que l'origine du système en boucle fermé

$$dx(t) = (A_0 + KC_0)x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} A_k x(t) dw_k(t), \ t \geq 0,$$

est exponentiellement stable en moment d'ordre 2. On déduit que le système (10) est détectable. ■

La proposition suivante montre la dualité entre la stabilisabilité et la détectabilité.

Proposition 25. *1. Le système (A,B) est stabilisable ssi (B^T,A^T) est déctable, où* $A^T = \left(A_0^T, A_1^T, ..., A_r^T\right)$.

2. Le système (C,A) est détectable ssi (A^T,C^T) est stabilisable.

On termine cette section par le théorème suivant qui est une généralisation au cas stochastique d'un résultat connu en déterministe.

Theorem 26. *Supposons que*

1. *(C_0, A) est stochastiquement détectable,*

2. *L'équation différentielle*

$$\frac{d}{dt}K(t) + A_0^*(t)K(t) + K(t)A_0(t) + C_0(t)C_0^*(t) + \sum_{k=1}^{r} A_k^*(t)K(t)A_k(t) = 0$$

admet une solution bornée symétrique $K(t) \geq 0$, $t \geq 0$. Alors la solution du système (10) est exponentiellemnt stable en moment d'ordre 2.

Example 27. *Considérons le système*

$$dx(t) = A_0 x(t)dt + A_1(t)x(t)dw(t) + Bu(t)dt,$$

où $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Montrons que le système (A_0, A_1, B) n'est pas stabilisable. Soit $X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & y_2 & y_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$.

On a:

$$
\begin{aligned}
A_0X + XA_0^* &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & y_2 & y_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & y_2 & y_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2x_1 & 3x_3 & 3x_3 \\ 3x_3 & 6y_3 - 2y_2 & y_3 + 3z_3 \\ 3x_3 & y_3 + 3z_3 & 4z_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_1XA_1^* &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & y_2 & y_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 9x_1 & 6x_1 + 3x_2 & -3x_3 \\ 6x_1 + 3x_2 & 4x_1 + 4x_2 + y_2 & -2x_3 - y_3 \\ -3x_3 & -2x_3 - y_3 & z_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_0\Gamma + \Gamma^* B_0^* &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2f_1 & f_1 + f_2 & f_1 + f_3 \\ f_1 + f_2 & 2f_2 & f_2 + f_3 \\ f_1 + f_3 & f_2 + f_3 & 2f_3 \end{pmatrix}; \ f_1, , f_2, f_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Alors l'équation (11) est équivalente à

$$
\begin{bmatrix} 2x_1 & 3x_3 & 3x_3 \\ 3x_3 & 6y_3 - 2y_2 & y_3 + 3z_3 \\ 3x_3 & y_3 + 3z_3 & 4z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9x_1 & 6x_1 + 3x_2 & -3x_3 \\ 6x_1 + 3x_2 & 4x_1 + 4x_2 + y_2 & -2x_3 - y_3 \\ -3x_3 & -2x_3 - y_3 & z_3 \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{pmatrix} 2f_1 & f_1 + f_2 & f_1 + f_3 \\ f_1 + f_2 & 2f_2 & f_2 + f_3 \\ f_1 + f_3 & f_2 + f_3 & 2f_3 \end{pmatrix} = 0
$$

on obtient les systèmes suivants: $\left\{ \begin{array}{c} 2f_1 + 11x_1 = 0 \\ f_1 + f_2 + 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ f_1 + f_3 = 0 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{c} 2f_2 + 4x_1 + 4x_2 - y_2 + 6y_3 \\ f_2 + f_3 - 2x_3 + 3z_3 = 0 \\ 2f_3 + 5z_3 = 0 \end{array} \right.$

Si on suppose que le système (A_0, A_1, B) est stabilisable alors il existe $X > 0$ solution de l'équation (11). Alors $x_1 > 0$ et $z_3 > 0$.

D'autre part, on a

$$\begin{cases} 2f_1 + 11x_1 = 0 \Longrightarrow f_1 = \frac{-11}{2}x_1 < 0 \\ f_1 + f_3 = 0 \Longrightarrow f_1 = -f_3 \\ 2f_3 + 5z_3 = 0 \Longrightarrow f_3 = \frac{-5}{2}z_3 < 0 \end{cases}$$

. On déduit que $f_1 < 0$ et $f_3 < 0$, ce qui contrdit le fait que $f_1 = -f_3$. On conclut que le système (A_0, A_1, B) n'est pas stabilisable.

0.8. Observabilité stochastique

Soit H_n l'espace des matrices symétriques d'ordre n. On définit l'opérateur $L(t); H_n \longrightarrow H_n$, définie par

$$L(t)S = A_0(t)S + SA_0^*(t) + \sum_{k=1}^{r} A_k(t)SA_k^*(t)$$

l'opérateur L est appelé l'opérateur de Lyapunov associé à $A_0, A_1, ..., A_r$. L'opérateur $L^*, H_n \longrightarrow H_n$ est définit par

$$L^*(t)S = A_0^*(t)S + SA_0 + \sum_{k=1}^{r} A_k^*(t)SA_k(t)$$

On définit dans l'espace H_n l'opérateur d'évolution T_F

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}T_F(t, t_0) = L_F(t)T_F(t, t_0), \\ T_F(t, t_0) = I \end{cases}$$

où $L_F(t)$ est définit par:

$$L_F(t)S = (A_0 + BF)\,S + S\,(A_0 + BF)^* + \sum_{k=1}^{r} A_k^*(t)SA_k(t)$$

Definition 28. *On dit que le système (10) est observable s'il existe $\tau > 0$, $\beta > 0$ tel que*

$$\int_t^{t+\tau} T^*(s, t)C_0^*(s)C_0(s)ds \geq \beta I, \forall t \geq 0,$$

Dans le cas invariant on a les résultats suivants.

Proposition 29. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le système (10) est observable,*
2. *il existe $\tau > 0$ tel que*
$$\int_0^\tau e^{L^* s} C_0^* C_0 ds > 0,$$
3. *Il existe $\tau > 0$ tel que $Z(\tau) > 0$, où $Z(t)$ est la solution du problème à valeur initiale:*
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} Z(t) = L^* Z(t) + C_0^* C_0, \ t > 0, \\ Z(0) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Proof. Le système (10) est observable si et seulement s'il existe $\tau>0$ tel que

$$\int_t^{t+\tau} T^*(s,t) C_0^*(s) C_0(s) ds \geq \beta I, \forall t \geq 0,$$

Dans le cas invariant, les opérateurs L et L* sont donnés par:

$$\begin{aligned} L^* S &= A_0^* S + S A_0 + \sum_{k=1}^r A_k^* S A_k \\ LS &= A_0 S + S A_0^* + \sum_{k=1}^r A_k S A_k^* \end{aligned}$$

Dans ce cas l'opérateur d'évolution T est défini par l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} S(t) = LS(t)$$

Il est donné par $\mathrm{T}(t, t_0) = e^{L(t-t_0)}$. Alors le système (10) est observable si et seulement s'il existe $\tau>0$ tel que

$$\int_t^{t+\tau} e^{L^*(s-t)} C_0^* C_0 ds \geq \beta I, \forall t \geq 0,$$

et comme

$$\int_t^{t+\tau} e^{L^*(s-t)} C_0^* C_0 ds = \int_0^\tau e^{L^*(s'-t)} C_0^* C_0 ds'$$

Alors le système (10) est observable si et seulement s'il existe $\tau>0$ tel que

$$\int_0^{\tau} e^{L^*(s-t)}C_0^*C_0 ds > 0, \forall t \geq 0,$$

Montrons maintenant que (2)$\Longleftrightarrow$ (3).

La solution du système

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Z(t) = L^*Z(t) + C_0^*C_0,\ t > 0, \\ Z(0) = 0 \end{cases}$$

est donnée par $Z(t) = \int_0^t e^{L^*s}C_0^*C_0 ds$. Donc il existe $\tau > 0$ tel que $Z(\tau) > 0$ ssi il $\tau > 0$ tel que $\int_0^{\tau} e^{L^*s}C_0^*C_0 ds > 0$. ■

Remark 30. *L'équation (14) peut être écrite d'une manière équivalente comme suit*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Z(t) = A_0^*Z(t) + Z(t)A_0 + \sum_{k=1}^{r} A_k^*Y(t)A_k + C_0^*C_0,\ t > 0, \\ Y(0) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

On termine cette section par le corollaire suivant.

Corollary 31. *Supposons que* $(C_0, A_0, A_1, ..., A_r)$ *est observable et que l'équation algébrique*

$$A_0^*S + SA_0 + \sum_{k=1}^{r} A_k^*SA_k + C_0^*C_0 = 0 \tag{16}$$

admet une solution $X \geq 0$. *Alors*

1. *Le système* $(A_0, A_1, ..., A_r)$ *est exponentiellement stable en moment d'ordre 2,*
2. *X>0,*
3. *L'équation (16) admet une solution unique définie positive.*

Example 32. *Soient* $A_0 = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_1 = \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, C=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. *Etudions la détectabilité du système* (C,A_0, A_1). *Soit* $G=\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}$.

   On a
$$A_0^*Y + YA_0 + GC_0 + C_0^*G^* + A_1^*YA_1 + I_n = 0$$
$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [g_1, g_2] + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$
$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha y_1 & 2\alpha y_2 \\ 2\alpha y_2 & 2\alpha y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta^2 y_1 & \beta^2 y_2 \\ \beta^2 y_2 & \beta^2 y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2g_1 + 1 & g_2 \\ g_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2g_1 + 2\alpha y_1 + \beta^2 y_1 + 1 = 0 \\ g_2 + 2\alpha y_2 + \beta^2 y_2 = 0 \\ 2\alpha y_3 + \beta^2 y_3 + 1 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_1 = (-1 - 2g_1) \,/\, (2\alpha + \beta^2) \\ y_2 = -g_2 / \,(2\alpha + \beta^2) \\ y_3 = \frac{-1}{2\alpha+\beta^2} \end{array} \right.$$
   On a
$$-1 - 2g_1 < 0 \Longleftrightarrow -1 < 2g_1 \Longleftrightarrow \frac{-1}{2} < g_1$$
   Ainsi pour G=$[g_1, 0]$ *avec* $\frac{-1}{2} < g_1$, *l'equation (12) admet une solution définie positive* Y *si* $2\alpha + \beta^2 < 0$. *Alors le système* (C,A_0, A_1) *est détectable si* $2\alpha + \beta^2 < 0$.

2. *Etudions maintenant l'observabilité du système* (C,A_0, A_1). *L'équation (14) correspondante à ce système est;*
$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{d}{dt}Z(t) = A_0^*Z(t) + Z(t)A_0 + \sum_{k=1}^{r} A_k^*Z(t)A_k + C^*C, \;\; t > 0, \\ Z(0) = 0 \end{array} \right.$$
   Soit $Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_2(t) & z_3(t) \end{bmatrix}$. *On obtient le système suivant*
$$\begin{bmatrix} \dot z_1(t) & \dot z_2(t) \\ \dot z_2(t) & \dot z_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha z_1(t) & 2\alpha z_2(t) \\ 2\alpha z_2(t) & 2\alpha z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta^2 z_1(t) & \beta^2 z_2(t) \\ \beta^2 z_2(t) & \beta^2 z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \;\; Z(0) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dot z_1(t) = 2\alpha z_1(t) + \beta^2 z_1(t) + 1 \\ \dot z_2(t) = 2\alpha z_2(t) + \beta^2 z_2(t) \\ \dot z_3(t) = 2\alpha z_3(t) + \beta^2 z_3(t) \\ z_1(0) = z_2(0) = z_3(0) = z_4(0) = 0 \end{array} \right.$$

On a

$$\dot{z}_3(t) = 2\alpha z_3(t) + \beta^2 z_3(t) \Longleftrightarrow \dot{z}_3(t) = \left(2\alpha + \beta^2\right) z_3(t) \Longrightarrow z_3(t) = e^{\left(2\alpha+\beta^2\right)t} z_3(0) = 0$$

Alors la solution du système (14) n'est pas définie positive, donc le système (C, A_0, A_1) n'est pas observable.

0.9. Contrôlabilité stochastique

Dans cette section on introduit la notion de la contrôlabilité stochastique.

Definition 33. *On dit que le système (10) est contrôlable s'il existe $\tau > 0$ tel que*

$$\int_0^\tau e^{Lt} BB^* ddt > 0,$$

Comme dans le cas déterministe, il existe une relation de dualité entre la contrôlabilité et l'observabilité dans le cas stochastique. On a le résultat suivant.

Proposition 34. *Le système $(A_0, A_1, ..., A_r, B)$ est contrôlable ssi le système $(B^*, A_0, A_1^*, ..., A_r^*)$ est observable.*

En utilisant cette relation de dualité et les résultats de la section précédente, on obtient le résultat suivant.

Proposition 35. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le système $(A_0, A_1, ..., A_r, B)$ est contrôlable,*

2. *Il existe $\tau > 0$ tel que $Z(\tau) > 0$, où $Z(t)$ est la solution du problème à valeur initiale:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Y(t) = LY(t) + BB^*, \ t > 0, \\ Z(0) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Remark 36. *L'équation (17) peut être écrite d'une manière équivalente comme suit*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Y(t) = A_0Y(t) + Y(t)A_0^* + \sum_{k=1}^{r} A_kY(t)A_k^* + BB^*, \ t > 0, \\ Y(0) = 0 \end{cases} \tag{18}$$

Le corollaire suivant donne la relation entre la contrôlabilité du système $(A_0, A_1, ..., A_r, B)$ et la contrôlabilité des paires (A_k, B), $1\leq k \leq r$.

Proposition 37. *S'il existe $k \in \{1, ..., r\}$ tel que la paire (A_k, B) est contrôlable alors le système $(A_0, A_1, ..., A_r, B)$ est contrôlable.*

L'inverse de ce corollaire n'est pas toujours vérifié. Pour n=2 et r=1 et m=1, on montrera dans le la proposition suivante que l'inverse est vérifié dans ce cas.

Proposition 38. *Soient $A_0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Si (A_0, B) et (A_1, B) ne sont pas contrôlables, alors le système (A_0, A_1, B) n'est pas contrôlable.*

Proof. Supposons que (A_0, B) et (A_1, B) ne sont pas contrôlables. D'aprés le critère de Kalman, on a:

$$\begin{aligned}
(A_0, B) \text{ n'est pas contrôlable} &\iff rang(B, A_0B) < n \\
&\implies \det\left[B, A_0B\right] = 0 \\
&\implies \begin{vmatrix} b_1 & ab_1 + bb_2 \\ b_2 & cb_1 + db_2 \end{vmatrix} = 0 \\
&\implies b_1\left(cb_1 + db_2\right) - b_2\left(ab_1 + bb_2\right) = 0
\end{aligned}$$

On obtient

$$b_1b_2\left(d - a\right) = bb_2{}^2 - cb_1{}^2 \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
(A_1, B) \text{ n'est pas contrôlable} &\iff rang(B, A_1B) < n \\
&\implies \det\left[B, A_1B\right] = 0 \\
&\implies \begin{vmatrix} b_1 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ b_2 & \gamma b_1 + \delta b_2 \end{vmatrix} = 0 \\
&\implies b_1\left(\gamma b_1 + \delta b_2\right) - b_2(\alpha b_1 + \beta b_2) = 0
\end{aligned}$$

On obtient

$$b_1b_2\left(\delta - \alpha\right) = \beta b_2{}^2 - \gamma b_1{}^2 \tag{20}$$

Supposons que le système (A_0, A_1, B) est contrôlable. Alors il existe une solution définie positive de l'équation (17). Soit $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_2(t) & y_3(t) \end{bmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} A_0 Y(t) + Y(t) A_0^T + A_1 Y(t) A_1^T + BB^T &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T \\ &+ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 2ay_1 + 2by_2 & ay_2 + by_3 + cy_1 + dy_2 \\ ay_2 + by_3 + cy_1 + dy_2 & 2cy_2 + 2dy_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} b_1^2 + \alpha(\alpha y_1 + \beta y_2) + \beta(\alpha y_2 + \beta y_3) & \gamma(\alpha y_1 + \beta y_2) + \delta(\alpha y_2 + \beta y_3) + b_1 b_2 \\ \alpha(\gamma y_1 + \delta y_2) + \beta(\gamma y_2 + \delta y_3) + b_1 b_2 & b_2^2 + \gamma(\gamma y_1 + \delta y_2) + \delta(\gamma y_2 + \delta y_3) \end{bmatrix}$$

Ainsi (17) est équivalente à

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y_1(t) = 2ay_1(t) + 2by_2(t) + b_1^2 + \alpha(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)) + \beta(\alpha y_2(t) + \beta y_3(t)), \ t > 0, \\ \frac{d}{dt} y_2(t) = (c + \alpha\gamma) y_1(t) + (a + d + \gamma\beta + \alpha\delta) y_2(t) + (b + \delta\beta) y_3(t) + b_1 b_2 \\ \frac{d}{dt} y_3(t) = 2cy_2(t) + 2dy_3(t) + b_2^2 + \gamma(\gamma y_1(t\grave{a} + \delta y_2(t)) + \delta(\gamma y_2(t) + \delta y_3(t)) \\ y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0 \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y_1(t) = (2a + \alpha^2) y_1(t) + 2(b + \alpha\beta) y_2(t) + \beta^2 y_3(t) + b_1^2, \ t > 0, & * \\ \frac{d}{dt} y_2(t) = (c + \alpha\gamma) y_1(t) + (a + d + \gamma\beta + \alpha\delta) y_2(t) + (b + \delta\beta) y_3(t) + b_1 b_2, & ** \\ \frac{d}{dt} y_3(t) = \gamma^2 y_1(t) + 2(c + \delta\gamma) y_2(t) + (2d + \delta^2) y_3(t) + b_2^2, & *** \\ y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0 \end{cases} \tag{21}$$

1. Si $b_1 \neq 0$ et $b_2 = 0$, on obtient des équations (19) et (20)

$$\begin{aligned} cb_1^2 &= 0 \Longrightarrow c = 0, \\ \gamma b_1^2 &= 0 \Longrightarrow \gamma = 0 \end{aligned}$$

alors l'équation (***) est équivalente à

$$\frac{d}{dt} y_3(t) = \left(2d + \delta^2\right) y_3(t), \ y_3(0) = 0$$

ainsi $y_3(t) = 0$, $t \geq 0$.

2. Si $b_2 \neq 0$ et $b_1 = 0$, on obtient des équations (19) et (20)

$$\begin{aligned} bb_2^2 &= 0 \Longrightarrow b = 0, \\ \beta b_2^2 &= 0 \Longrightarrow \beta = 0 \end{aligned}$$

alors l'équation (*) est équivalente à

$$\frac{d}{dt} y_1(t) = \left(2a + \alpha^2\right) y_1(t), \ y_1(0) = 0$$

ainsi $y_1(t) = 0$, $t \geq 0$.

3. Supposons maintenant que $b_2 \neq 0$ et $b_1 \neq 0$. En utilisant les équations (19) et (20) on peut montrer que ($\overline{x}$,$\overline{y}$,$\overline{z}$) satisfait le système (21)

$$\overline{x}(t) = \frac{b_1}{b_2} \overline{y}(t), \ \overline{z}(t) = \frac{b_2}{b_1} \overline{y}(t)$$

où $\overline{y}(t)$ est la solution du système

$$\frac{d}{dt} \overline{y}(t) = \left(\frac{(c + \alpha\gamma)}{b_2} b_1 + (a + d + \gamma\beta + \alpha\delta) + (b + \delta\beta) \frac{b_2}{b_1} \right) \overline{y}(t) + b_1 b_2, \quad \overline{y}(0) = 0$$

Comme la solution du système (21) est unique, alors ($\overline{x}$,$\overline{y}$,$\overline{z}$) est l'unique solution de ce système. Mais

$$\overline{x}(t)\overline{z}(t) - \overline{y}(t)^2 = 0, \text{ pour tout } t \geq 0,$$

alors $detY(t) = 0$, donc $Y(t)$ n'est pas définie positive, donc le système (A_0, A_1, B) n'est pas contrôlable. ■

Dans l'exemple suivant on va montré qu'on peut avoir un système (A_0, A_1, B) contrôlable tandis que les paires (A_0, B) et (A_1, B) ne sont pas contrôlables.

Example 39. *Considérons le système*

$$dx(t) = A_0 x(t) dt + A_1(t) x(t) dw(t) + Bu(t) dt,$$

où $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a rang$\begin{pmatrix} B & A_1B & A_1{}^2B \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ et rang$\begin{pmatrix} B & A_0B & A_0{}^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2$, *alors les systèmes* (A_0, B) *et* (A_1, B) *ne sont pas contrôlables.*

Soit $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_2(t) & y_4(t) & y_5(t) \\ y_3(t) & y_5(t) & y_6(t) \end{bmatrix}$. *L'équation (17). correspondante à ce système est*

$$\begin{cases} dy_1(t) = 11y_1(t) + 1 \\ dy_2(t) = 3y_2(t) + 6y_1(t) + 3y_3(t) + 1 \\ dy_3(t) = 1 \\ dy_4(t) = -y_4(t) + 6y_5(t) + 4y_1(t) + 4y_2(t) + 1 \\ dy_5(t) = 3y_6(t) - 2y_3(t) + 1 \\ dy_6(t) = 5y_6(t) + 1 \\ y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = y_6(0) \end{cases}$$

La solution de ce système est

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{1}{11}\left(e^{11t} - 1\right), \ y_2(t) = \frac{3}{44}e^{11t} + \frac{5}{12}e^{3t} - t - \frac{16}{33}, \ y_3(t) = t, \\ y_5(t) = \frac{3}{25}\left(e^{5t} - 1\right) - t^2 + \frac{2}{5}t, \ y_6(t) = \frac{1}{5}\left(e^{5t} - 1\right) \end{cases}$$

et $y_4(t)$ *admet la forme*

$$y_4(t) = \frac{17}{132}e^{11t} + \alpha_1 e^{5t} + \alpha_2 e^{3t} + \alpha_3 e^{-t} + \alpha_4 t^2 + \alpha_5 t + \alpha_6$$

On a Y(t)>0, $\forall t \geq 0$, *et ainsi le système* (A_0, A_1, B) *est contrôlable.*

Remark 40. *Dans cette exemple on a montré que* (A_0, A_1, B) *est contrôlable, et dans l'exemple (26) on a monté qu'il n'est pas stabilsable. Donc on conclut que la contrôlabilité stochastique n'implique pas la stabilisation stochastique.*