Théorie du contrôle stochastique

Dr. M. KADA

2020/2021

Contents

1 Stabilité stochastique **2**
1.1 Introduction 2
1.2 Stabilité en probabilité 2
1.3 Stabilité exponentielle presque sûre 5
1.4 Stabilité des moments 6
1.5 Stabilité des systèmes linéaires 8

2 Propriétés structurelles des systèmes linéaires stochastiques **14**
2.1 Stabilisabilité et détectabilité des systèmes linéaires stochastiques 14
2.2 Observabilité stochastique 19
2.3 Contrôlabilité stochastique 23

3 Contrôle optimal **28**
3.1 Rappel sur le contrôle optimal des systèmes déterministes 28
3.1.1 Principe de maximum de pontryaguine 28
3.1.2 Application au problème de régulateur linéaire quadratique 30
3.2 Contrôle optimal stochastique 32
3.2.1 Contrôle optimal à horizon fini 32
3.2.2 Le problème de régulateur linéaire stochastique 33
3.2.3 Problème de régulateur linéaire avec bruit sur l'état et le contrôle 38
3.3 Contrôle optimal à horizon infini 40
3.3.1 Problème avec coût actualisé 40
3.3.2 Problème avec coût moyen 43

1. Stabilité stochastique

1.1. Introduction

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une généralisation de la notion d'équation différentielle prenant en compte un terme de bruit blanc. Les EDS permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion. Elles permettent aussi de traiter théoriquement ou numériquement des problèmes issus de la théorie des équations aux dérivées partielles. Les domaines d'application des EDS sont vastes :

– La modélisation de phénomènes de diffusion en physique (mécanique des fluides, géophysique, ...) : c'est à l'origine de la motivation de l'étude du mouvement brownien.

– Les mathématiques financières

– Les systèmes dynamiques aléatoires.

– Les modèles d'écoulements de polymères multi-échelles

En 1892, A.M. Lyapunov introduit le concept de la stabilité d'un système dynamique. La stabilité signifie l'insensibilité de l'état du système à de petits changements dans l'état initial ou les paramètres du système .Dans ce chapitre, nous allons présenté les divers types de stabilité pour une équation différentielle stochastique de dimension n.

1.2. Stabilité en probabilité

Considérons l'équation différentielle stochastique:

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t), t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

On suppose que cette équation admet une solution unique x(t) et pour simplifier; on suppose que $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On suppose ausssi que $f(t, 0) = 0$ et $g(t, 0) = 0$, $\forall t \geq 0$. Alors $x(t) = 0$ est le point d'équilibre de l'équation (1).

Définition 1.

1. Le point d'équilibre du système (1.1) est stochastiquement stable en probabilité si, pour tout $\varepsilon \geqslant 0$ on a

$$P\left\{\sup_{t\in[0,+\infty]}\|x(t)\| \geq \varepsilon\right\} = 0, \ \ \|x_0\| < \delta$$

sinon il est instable.

2. Le point d'équilibre du système (1.1) est asymptotiquement stochastiquement stable s'il est stochastiquement stable et

$$P\left\{\lim_{t\to+\infty}\|x(t)\| = 0\right\} = 1, \ \ \|x_0\| < \delta$$

3. Le point d'équilibre du système (1.1) est globalemment asymptotiquement stochastiquement stable s'il est stochastiquement stable et

$$P\left\{\lim_{t\to+\infty}\|x(t)\| = 0\right\} = 1, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Avant de donner le théorème de stabilité de Lyapunov, on donne la définition suivante.

Définition 2. 1. *Soit V(x) une fonction scalaire continue définie sur le boule fermée*

$$\overline{B_r} = \{x \in \mathbb{R}^n, \ \ \|x\| \leq r\}, \ r > 0$$

V(x) est définie positive au sens de Lyapunov si $V(0) = 0$ *et V(x)>0,* $\forall x \neq 0$

2. *Soit V(t,x) une fonction scalaire continue définie sur* $[0, +\infty[\times \overline{B_r}$. *V est dite définie positive au sens de Lyapunov si V(t,0)=0 et il existe une fonction définie positive W(x) telle que*

$$V(t,x) \geq W(x) > 0, \ \forall t \neq 0$$

3. *Une fonction V(x) ou V(t,x) est définie négative si -V est définie positive.*

On a le théorème suivant de stabilité.

Définition 3. *1. Soit V(t,x):*$[0,+\infty[\,\times\,\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de Lyapunov telles que ses dérivés partielles* V_t, V_{x_i} *et* $V_{x_i x_j}$ *sont continues sur* $[0,+\infty[\,\times\,\mathbb{R}^n/\{0\}$. *Supposons que LV(t,x)*≤ 0 *pour tout* $(t,x) \in [0,+\infty[\,\times\,\mathbb{R}^n$ *où*

$$LV(t,x) = V_t(t,x) + V_X(t,x)f(t,x) + \frac{1}{2}trace\left(g^T(t,x)V_{xx}(t,x)g(t,x)\right)$$

avec

$$V_T = \frac{\partial V}{\partial t},\ V_x = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} ... \frac{\partial V}{\partial x_n}\right] \text{ et } V_{xx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial xn \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

alors l'origine est stable.

2. *Si en plus LV est définie négative alors l'origine est globalemment asymptotiquement stable.*

Remarque 4. *Si le système est autonome*

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dw(t), t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

alors on peut construire une fonction de Lyapunov V(x). Si G vérifie

$$yg(x)g(x)y \geq m(x)\left\|y\right\|^2,\ \text{x, } y \in B_r,\ \text{r>0}$$

où m(x) est positive alors la stabilité implique l'asymptotique stabilité.

Pratiquement, on utilise la condition suffisante suivante:

$$LV(t,x) \leq -kV(t,x),\ k > 0,\ \text{(t,x)} \in [0,+\infty[\,\times\,\mathbb{R}^n$$

pour montrer que LV est définie négative.

Exemple 5. *Considérons le système linéaire stochastique*

$$\begin{cases} dx(t) = ax(t)dt + \sigma x(t)dw(t);\ t \geq 0,\ \text{a, } \sigma \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Considérons la fonction de Lyapunov V(x) = $|x|^r$ *, r*≥ 0*. Alors*

$$\begin{aligned} LV(x) &= axV^{'}(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx} \\ &= arx\,|x|^{r-1} + \frac{1}{2}\sigma^2 r(r-1)x^2\,|x|^{r-2} \\ &\leq ar\,|x|^r + \frac{1}{2}\sigma^2 r(r-1)\,|x|^r \end{aligned}$$

si a<$\frac{\sigma^2}{2}$*, on peut choisir 0<r<1-*$\frac{2a}{\sigma^2}$ *pour montrer que LV*$\leq -kV$*. Donc le système est globalement asymptotiquement stable.*

Dans le cas où $\sigma = 0$ *le système* $\begin{cases} dx(t) = ax(t)dt \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ *est stable si a=0. Donc le terme aléatoire ne change pas la stabilité dans ce cas.*

Le système stochastique es stable pour a>0 tel que $a < \frac{\sigma^2}{2}$*. Donc le terme* $\sigma^2 x^2/2$ *dans la formule de LV conduit à la stabilité.*

Remarque 6. *La méthode de Lyapunov dépend du choix de la fonction de Lyapunov. Pour déterminer V(t,x); on peut , par exemple, résoudre l'équation LV=0 où l'inégalité LV*≤ 0 *Le choix V(x)=x*$^T Px$ *où P est une matrice définie positive, nous donne*

$$LV = 2f(t,x)Cx + trace(g(t,x)g^T(t,x)C) \leq 0$$

dans un voisinage de x=0 pour tout t≥ 0*.*

1.3. Stabilité exponentielle presque sûre

On donne maintenant un théorème pour la stabilité presque sûre.

Définition 7. *Le point d'équilibre du système (1.1) est exponentiellement presque sûrement stable'il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{1}{t} \ln\left(\|x(t)\|\right) < -\alpha \ p.s.$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, où* $\lim\limits_{t\to+\infty} \sup \frac{1}{t} \ln\left(\|x(t)\|\right)$ *est l'exposant de Lyapunov de la solution x(t).*

Remarque 8. *La relation (??) est équivalente à l'existence d'une constante* $\alpha >$ *0 et* $M > 0$ *telle que*

$$\|x(t)\| \leq M \|x_0\| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad p.s.$$

On a le théorème suivant.

Théorème 9. *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov définie positive V(t,x(t)) et des constantes p>0,* $c_1 > 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ *et* $c_3 \geq 0$, *telles que*

$$c_1 \|x(t)\|^p \leq V(t,x(t)),\ LV(t,x(t)) \leq c_2 V(t,x(t)),\ \ \|\mathcal{B}Vx(t,x(t))\|^2 \geq c_3 V^2(t,x(t)),$$

pour $t \geq 0$, $x \neq 0$, *où* $\mathcal{B}V(t,x(t)) = V_x(t,x(t))g(t,x(t))$. *Alors*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|) \leq \frac{2c_2 - c_3}{2p},\ \ p.s.\ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

et le point d'équilibre du système (1.1) est exponentiellement presque sûrement stable si $c_3 > 2c_2$.

On a le résultat suivant.

Théorème 10. *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov définie positive V(t,x(t)) et des constantes p>0,* α, $\lambda \in \mathbb{R}$, *telles que*

$$\alpha \|x(t)\|^p \leq V(t,x(t)),\ LV(t,x(t)) \leq -\lambda V(t,x(t)),$$

pour $t \geq 0$, $x \neq 0$. *Alors*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|) \leq \frac{-\lambda}{p},\ \ p.s.\ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

et le point d'équilibre du système (1.1) est presque sûrement exponentiellement stable .

1.4. Stabilité des moments

Définition 11. 1. *Soit p>0. Le point d'équilibre est stable en moment d'ordre p si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\sup_{t\geq 0} E(\|x(t)\|^p) \leq \varepsilon$, *pour tout* x_0 *tel que* $\|x_0\| < \delta$.

2. *Le point d'équilibre est asymptotiquement stable en moment d'ordre p s'il est stable et* $\underset{t\to+\infty}{lim} E\left(\|x(t)\|^p\right) = 0$, *pour tout* x_0 *au voisinage de 0.*

3. *Le point d'équilibre est exponentiellement stable en moment d'ordre p s'il existe* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *et* $\delta > 0$ *tels que*

$$E\left(\|x(t)\|^p\right) \leq c_1 \|x_0\|^p e^{-c_2(t-t_0)}$$

pour tout x_0 *tel que* $\|x_0\| < \delta$.

Dans le cas où $p = 1$ ou $p = 2$, on parle de la stabilité en moment d'ordre 1 ou la stabilité d'ordre 2.

Exemple 12. *Considérons le système*

$$dx(t) = ax(t)dt + \sigma x(t)dw(t), \ t \geq 0$$

on remarque

$$E|x(t)|^p = |x_0|^p \exp\left(p(a - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{p}{2}\sigma^2)\right)t, \ t \geq 0$$

que le point d'équilibre est exponentiellement stable ssi $a < \frac{1-p}{2}\sigma^2$.

Le théorème suivant illustre l'application des fonctions de Lyapunov pour montrer la stabilité en moment d'ordre p.

Théorème 13. *Une condition suffisante pour l'exponentielle stabilité en moment d'ordre p est l'existence d'une fonction V(t,x), définie sur* $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ *et continuement différentielle par rapport à t et de classe* C^2 *par rapport à x et qui satisfait l'inégalité:*

$$c_1 \|x\|^p \leq V(t,x) \leq c_2 \|x\|^p, \ LV(t,x) \leq -c_3 \|x\|^p$$

pour des constantes positives c_1, c_2 *et* c_3.

Remarque 14. *Généralement, la stabilité exponentielle en moment d'ordre 2 n'implique pas la stabilité exponentielle presque sûre et la stabilité exponentielle presque sûre n'implique pas la stabilité exponentielle en moment d'ordre 2. Cependant, la stabilité exponentielle en moment d'ordre 2 implique la stabilité exponentielle presque sûre si on ajoute des conditions supplémentaires.*

On définit maintenant les notions de la stabilité en moyenne et la stabilité en moyenne quadratique.

Définition 15. *1. On dit que le point d'équilibre du système 1.1 est stable en moyenne si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\sup_{t\geq 0} \|E(x(t))\| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } x_0 \text{ tel que } \|x_0\| \leq \delta$$

2. On dit que le point d'équilibre du système 1.1 est stable en moyenne quadratique si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{t\geq 0} \left\|E(x(t)x^T(t))\right\| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } x_0 \text{ tel que } \|x_0\| \leq \delta$$

1.5. Stabilité des systèmes linéaires

Considérons l'équation linéaire homogène:

$$\begin{cases} dx(t) = A(t)x(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)x(t)dw_i(t), \ \mathrm{t} \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Dans cette section on donne des conditions de stabilité des systèmes linéaires. Soit $m(t) = E(x(t))$. On a

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= A(t)m(t), \\ m(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Alors la stabilité en moyenne de l'équation (1.2) est équivalente à l'étude de la stabilité de l'quation déterministe (1.3). La stabilité en moyenne quadratique de l'équation (1.2) est équivalente à la stabilité de l'équation matricielle déterministe

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + \sum_{i=}^{m} B_i(t)P(t)B_i^T(t) \\ P(t_0) &= x_0 x_0^T \end{aligned}$$

On a le théorème suivant.

Théorème 16. *Supposons que les fonctions $A(t)$ et $B(t)$ sont bornée sur $[t_0, +\infty[$. Alors une condition nécéssaire pour la stabilité exponentielle en moment d'ordre 2 est que pour toute matrice symétrique définie positive et bornée C(t) telle que $x^T C(t)x \geq k_1 \|x\|^2$, $k_1 > 0$, l'équation différentielle matricielle*

$$\frac{dP(t)}{dt} + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \sum_{i=}^{m} B_i^T(t)P(t)B_i(t) = -C(t) \qquad (1.4)$$

admet comme solution une matrice P(t) qui admet les mêmes propriétés que C(t).

Remarque 17. *Quand $B_i(t)$=0 pour tout i$\in \{1, ..., m\}$, l'équation (1.4) se réduit à une équation de différentielle de Lyapunov qui donne un critère de la stabilité exponentielle pour les systèmes déterministes.*

Pour les systèmes à temps invariant, on a le résultats suivant.

Corollaire 18. *Si le système (1.2) est à temps invariant, une condition nécessaire pour la stabilité exponentielle en moment d'ordre 2 est que, pour toute matrice symétrique définie positive C, l'équation matriceille*

$$A^T P + PA + \sum_{i=}^{m} B_i^T P B_i = -C \qquad (1.5)$$

admet une solution symétrique définie positive.

Exemple 19. *Considérons le système*

$$\begin{cases} dx(t) = A(t)x(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)x(t)dw_i(t), \;\; t \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où A+$A^T = cI$ et $Bi = d_i I$, 1$\leq i \leq m$, c et d_i sont des constanes réelles.

Pour C=-$\left(c + \sum_{i=1}^{m} d_i^2\right)$, avec $\left(c + \sum_{i=1}^{m} d_i^2\right) < 0$, on peut vérifier que D=I est une solution pour l'équation de Lyapunov (1.5) associée à ce système. Donc le système est stable en moment d'ordre 2.

Exemple 20. *Considérons l'équation différentielle stochastique suivante*

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)x(t)dw(t), \ \ t \geq 0, \tag{1.6}$$

avec $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$, *w(t) est un mouvement brownien scalaire et*

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix},$$

Puisque AB=BA alors la solution de l'équation (1.6) est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left(\left(A - \frac{B^2}{2}\right)t + Bw(t)\right)x_0 \\ &= \exp\left(\begin{bmatrix} a-0.5b^2 & 0 \\ 0 & a-0.5b^2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} w(t)\right)x_0. \end{aligned}$$

Comme on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{w(t)}{t} = 0$, *alors* $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\| = a - 0.5b^2$ *p.s., alors le système (1.6) est exponentiellement presque sûrement stable si et seulement 2a<b^2.*

Ainsi, si 0≤ 2a < b^2, *l'équation déterministe* $dx(t) = A(t)x(t)dt$ *est instable tandis que l'équation stochastique 1.6) est exponentiellement presque sûrement stable.*

Etudions maintenant la stabilité en moment d'ordre 2 pour l'équation (1.6). L'équation de Lyapunov associée à ce système est

$$A^T P + PA + \sum_{i=}^{m} B_i^T P B_i = -C \tag{1.7}$$

Soient C=I et P=$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$. *L'équation de Lyapunov (1.7) est équivalente à*

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} aP_1 & aP_2 \\ aP_2 & aP_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} aP_1 & aP_2 \\ aP_2 & aP_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^2P_3 & b^2P_2 \\ b^2P_2 & b^2P_1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{bmatrix} P_3b^2 + 2aP_1 & P_2b^2 + 2aP_2 \\ P_2b^2 + 2aP_2 & P_1b^2 + 2aP_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{cases} P_3 b^2 + 2aP_1 = -1 \\ P_2 b^2 + 2aP_2 = 0 \\ P_1 b^2 + 2aP_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_3 b^2 + 2aP_1 = -1 \\ P_2 b^2 + 2aP_2 = 0 \\ P_1 b^2 + 2aP_3 = -1 \end{cases}$$

Si 2a+b$^2 \neq 0$*, on obtient* $P_2 = 0$ *et* $P_1 (b^2 - 2a) + (2a - b^2) P_3 = 0$*. D'où on trouve* $P_1 = P_3$*. Alors* $P_1 = P_3 = \frac{-1}{2a+b^2}$ *. Donc la solution de l'équation de Lyapunov (1.7) est*

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2a+b^2} & 0 \\ . & \frac{-1}{2a+b^2} \end{bmatrix}$$

P est définie positive ssi 2a+b$^2 < 0$*. On déduit que l'equation (1.6) est stable ssi* $2a < -b^2$*.*

Ainsi, si 0 $\geq 2a \geq -b^2$*,l'équation déterministe* $dx(t) = A(t)x(t)dt$ *est exponentiellement stable tandis que l'équation stochastique (1.6) n'est pas exponentiellement stable en moment d'ordre 2. Enfin, on remarque que si* $2a < -b^2$ *alors* $2a < b^2$ *, alors pour cet exemple la stabilité en moment d'ordre 2 implique la stabilité presque sûre.*

On termine ce chapitre par le résultat suivant:

Proposition 21. *Considérons le système*

$$\begin{cases} dx(t) = Ax(t)dt + bc^T x(t)dw(t), \ t \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.8}$$

où A est une matrice d'ordre n et b, c$\in \mathbb{R}^n$*.*

Le système (1.8) est exponentiellement stable en moment d'ordre 2 ssi A est stable et $\int_0^{+\infty} \left(c^T e^{At} b\right)^2 < 1$*.*

Preuve. 1. On suppose que le système (1.8) est exponentiellement stable en moment d'ordre 2. Alors l'équation de Lyapunov

$$A^T P + PA + Cb^T Pbc^T = -I \tag{1.9}$$

admet une solution unique définie positive P. On a

$$A^T P + PA + Cb^T Pbc^T = -I$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad A^T P + PA = -(Cb^T Pbc^T + I) \\ &\Longleftrightarrow \quad A^T P + PA = -Q, \ Q = Cb^T Pbc^T + I \end{aligned}$$

comme $Q > 0$ alors A est stable.

Maintenant, définissons l'opérateur

$$G(Q) = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

Appliquons l'opérateur G sur l'équation (1.9), on obtient

$$G\left(A^T P + PA\right) + G\left(Cb^T Pbc^T\right) = -G(I_n)$$

Comme A est stable alors $G\left(A^T P + PA\right) = -P$. Ainsi P satisfait l'équation

$$-P + G\left(Cb^T Pbc^T\right) = -G(I_n)$$

qui est équivalente à

$$\begin{aligned} -P + G\left(cb^T Pbc^T\right) &= -G(I_n) \Longleftrightarrow -b^T Pb + b^T G\left(cb^T Pbc^T\right) b = -b^T G(I_n) b \\ &\Longleftrightarrow -b^T Pb + \left(b^T Pb\right) b^T G\left(c^T\right) b = -b^T G(I_n) b \\ &\Longrightarrow b^T Pb\left(b^T G\left(cc^T\right) b - 1\right) = -b^T G(I_n) b \end{aligned}$$

1. Si $b = 0$ alors $b^T G\left(cc^T\right) b = 0 < 1$.
2. Si $b \neq 0$ alors

$$\Longrightarrow b^T G\left(cc^T\right) b - 1 = -b^T G(I_n) b / b^T Pb < 0$$

ainsi

$$\int_0^{+\infty} b^T e^{A^T t} cc^T e^{At} b dt < 1$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \left(c^T e^{At} b\right)^2 dt < 1$$

2. Suppososn maintenant que A est stable et $\int_0^{+\infty} \left(c^T e^{At} b\right)^2 < 1$. Soit

$$P = \frac{-b^T G(I_n) b}{b^T G\left(cc^T\right) b - 1} G(cc^T) + G\left(I_n\right)$$

Alors P satisfait l'équation

$$-P + b^T PbG(cc^T) + G\left(I_n\right) = 0$$

Comme A est stable, alors

$$-G\left(A^T P + PA\right) + b^T PbG(cc^T) + G\left(I_n\right) = 0$$

ainsi

$$-A^T P + PA + cb^T Pbc^T + I_n = 0$$

Alors A est exponeniellement stable en moment d'ordre 2. $\blacksquare$

2. Propriétés structurelles des systèmes linéaires stochastiques

Dans ce chapitre on présente la version stochastique stochastique de quelques concepts de base dans la théorie de contrôle qui sont: Stabilisabilité, détectabilité, l'observabilité et la contrôlabilité.

2.1. Stabilisabilité et détectabilité des systèmes linéaires stochastiques

Considérons le système suivant

$$\begin{aligned} dx(t) &= (A_0(t)x(t) + B_0(t)u(t))dt + \sum_{k=1}^{r} A_k(t)x(t)dw_k(t), \ t \geq 0, \\ y(t) &= C_0x(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

l'entré $u \in \mathbb{R}^m$ et la sortie $y \in \mathbb{R}^p$. Notons par $A = [A_0, A_1, ..., A_r]$.

Définition 22. *1. On dit que le système (2.1) est stabilisable s'il existe $F : R_+ \to \mathbb{R}^{m\times n}$ une fonction continue et borbée telle que l'origine du système en boucle fermé*

$$dx(t) = (A_0(t) + B_0(t)F(t))x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} A_k(t)x(t)dw_k(t), \ t \geq 0,$$

est exponentiellement stable en moment d'ordre 2.

2. On dit que le système (2.1) est détectable s'il existe $K : R_+ \to \mathbb{R}^{n\times p}$ une fonction continue et borbée telle que l'origine du système en boucle fermé

$$dx(t) = (A_0(t) + K(t)C_0(t))x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} A_k(t)x(t)dw_k(t), \ t \geq 0,$$

est exponentiellement stable en moment d'ordre 2.

Notation 23. *Si le système (2.1) est stabilisable on dit que (A,B) est stabilisable et quand le système (2.1) est détectable on dit que (C_0, A) est détectable.*

Pour lse systèmes à temps invariant, on a le résultat suivant.

Proposition 24. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le système (2.1) est stabilsable.*
2. *L'équation matricielle*

$$A_0X + XA_0^* + B_0\Gamma + \Gamma^* B_0^* + \sum_{k=1}^{r} A_k X A_k^* + I_n = 0 \tag{2.2}$$

   admet une solution $(X,\Gamma) \in H_N \times \mathbb{R}^{m\times n}$, et si (X,Γ) est une solution de l'équation (2.2), avec $X>0$, alors le feedback stabilisant est donné par $F = \Gamma X^{-1}$.

Pour la détectabilité, on a la proposition suivante.

Proposition 25. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le système (2.1) est détectable.*
2. *L'équation matricielle*

$$A_0^*Y + YA_0 + GC_0 + C_0^*G^* + \sum_{k=1}^{r} A_k^* y A_k + I_n = 0 \tag{2.3}$$

   admet une solution $(Y,G) \in H_N \times \mathbb{R}^{n\times P}$, et si (Y,G) est une solution de l'équation (2.3), avec $Y>0$, alors l'injection stabilisante est donnée par $K = Y^{-1}G$.

Preuve. Montrons que $1 \Longrightarrow 2$. Supposons que le système (2.1) est détectable. Alors, il existe K telle que l'origine du système en boucle fermé

$$dx(t) = (A_0 + KC_0)x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} A_k x(t) dw_k(t), \ t \geq 0,$$

est exponentiellement stable en moment d'ordre 2. D'aprés le théorème de Lyapunov, on déduit que l'équation

$$(A_0+KC_0)^TY+Y(A_0+KC_0)+\sum_{i=}^{m}B_i^TYB_i=-I$$

admet une solution définie positive P. On a

$$(A_0+KC_0)^TY+Y(A_0+KC_0)+\sum_{i=}^{m}B_i^TYB_i=-I$$

$$\begin{aligned}\iff \quad & {A_0}^TY+C_0^TK^TY+YA_0+YKC_0+\sum_{i=}^{m}B_i^TYB_i=-I\\ \iff \quad & {A_0}^TY+YA_0+C_0^TK^TY+YKC_0+\sum_{i=}^{m}B_i^TYB_i=-I\end{aligned}$$

Posons $G=YK$ alors

$${A_0}^TY+YA_0+C_0^TG^T+GC_0+\sum_{i=}^{m}B_i^TYB_i=-I$$

et comme $G=YK$ alors $K=Y^{-1}G$.

Montrons que 2$\Longrightarrow$ 1. Supposons que l'équation matricielle

$$A_0^*Y+YA_0+GC_0+C_0^TG^T+\sum_{k=1}^{r}A_k^TYA_k+I_n=0 \tag{2.4}$$

admet une solution $(Y,G)\in H_N\times\mathbb{R}^{n\times P}$, avec $Y>0$ et $K=Y^{-1}G$. On a

$$A_0^*Y+YA_0+GC_0+C_0^TG^T+\sum_{k=1}^{r}A_k^TYA_k+I_n=0$$

$$\iff {A_0}^TY+YA_0+C_0^TK^TY+YKC_0+\sum_{i=}^{m}B_i^TYB_i=-I$$

$$\iff {A_0}^TY+YA_0+C_0^TK^TY+YKC_0+\sum_{i=}^{m}B_i^TYB_i=-I$$

$$(A_0+KC_0)^TY+Y(A_0+KC_0)+\sum_{i=}^{m}B_i^TYB_i=-I$$

Alors, il existe K telle que l'origine du système en boucle fermé

$$dx(t)=(A_0+KC_0)x(t)dt+\sum_{k=1}^{r}A_kx(t)dw_k(t),\ t\geq 0,$$

est exponentiellement stable en moment d'ordre 2. On déduit que le système (2.1) est détectable. ■

La proposition suivante montre la dualité entre la stabilisabilité et la détectabilité.

Proposition 26. *1. Le système (A,B) est stabilisable ssi (B^T,A^T) est déctable, où $A^T=\left(A_0^T,A_1^T,...,A_r^T\right)$.*

2. Le système (C,A) est détectable ssi (A^T,C^T) est stabilisable.

On termine cette section par le théorème suivant qui est une généralisation au cas stochastique d'un résultat connu en déterministe.

Théorème 27. *Supposons que*

1. *(C_0,A) est stochastiquement détectable,*
2. *L'équation différentielle*

$$\frac{d}{dt}K(t)+A_0^*(t)K(t)+K(t)A_0(t)+C_0(t)C_0^*(t)+\sum_{k=1}^{r}A_k^*(t)K(t)A_k(t)=0$$

admet une solution bornée symétrique $K(t)\geq 0$, $t\geq 0$. Alors la solution du système (2.1) est exponentiellemnt stable en moment d'ordre 2.

Exemple 28. *Considérons le système*

$$dx(t)=A_0x(t)dt+A_1(t)x(t)dw(t)+Bu(t)dt,$$

où $A_0=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&3\\0&0&2\end{bmatrix}$, $A_1=\begin{bmatrix}3&0&0\\2&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, *Montrons que le système (A_0, A_1, B) n'est pas stabilisable. Soit* $X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & y_2 & y_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$.

On a:

$$\begin{aligned} A_0X + XA_0^* &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & y_2 & y_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & y_2 & y_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 & 3x_3 & 3x_3 \\ 3x_3 & 6y_3 - 2y_2 & y_3 + 3z_3 \\ 3x_3 & y_3 + 3z_3 & 4z_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1XA_1^* &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & y_2 & y_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9x_1 & 6x_1 + 3x_2 & -3x_3 \\ 6x_1 + 3x_2 & 4x_1 + 4x_2 + y_2 & -2x_3 - y_3 \\ -3x_3 & -2x_3 - y_3 & z_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_0\Gamma + \Gamma^* B_0^* &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2f_1 & f_1 + f_2 & f_1 + f_3 \\ f_1 + f_2 & 2f_2 & f_2 + f_3 \\ f_1 + f_3 & f_2 + f_3 & 2f_3 \end{pmatrix}; \; f_1, , f_2, f_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alors l'équation (2.2) est équivalente à

$$\begin{bmatrix} 2x_1 & 3x_3 & 3x_3 \\ 3x_3 & 6y_3 - 2y_2 & y_3 + 3z_3 \\ 3x_3 & y_3 + 3z_3 & 4z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9x_1 & 6x_1 + 3x_2 & -3x_3 \\ 6x_1 + 3x_2 & 4x_1 + 4x_2 + y_2 & -2x_3 - y_3 \\ -3x_3 & -2x_3 - y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 2f_1 & f_1 + f_2 & f_1 + f_3 \\ f_1 + f_2 & 2f_2 & f_2 + f_3 \\ f_1 + f_3 & f_2 + f_3 & 2f_3 \end{pmatrix} = 0$$

on obtient les systèmes suivants: $\begin{cases} 2f_1 + 11x_1 = 0 \\ f_1 + f_2 + 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ f_1 + f_3 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2f_2 + 4x_1 + 4x_2 - y_2 + 6y_3 \\ f_2 + f_3 - 2x_3 + 3z_3 = 0 \\ 2f_3 + 5z_3 = 0 \end{cases}$

Si on suppose que le système (A_0, A_1, B) est stabilisable alors il existe $X > 0$ solution de l'équation (2.2). Alors $x_1 > 0$ et $z_3 > 0$.

D'autre part, on a

$$\begin{cases} 2f_1 + 11x_1 = 0 \Longrightarrow f_1 = \frac{-11}{2}x_1 < 0 \\ f_1 + f_3 = 0 \Longrightarrow f_1 = -f_3 \\ 2f_3 + 5z_3 = 0 \Longrightarrow f_3 = \frac{-5}{2}z_3 < 0 \end{cases}$$

. On déduit que $f_1 < 0$ et $f_3 < 0$, ce qui contrdit le fait que $f_1 = -f_3$. On conclut que le système (A_0, A_1, B) n'est pas stabilisable.

2.2. Observabilité stochastique

Soit H_n l'espace des matrices symétriques d'ordre n. On définit l'opérateur $L(t); H_n \longrightarrow H_n$, définie par

$$L(t)S = A_0(t)S + SA_0^*(t) + \sum_{k=1}^{r} A_k(t)SA_k^*(t)$$

l'opérateur L est appelé l'opérateur de Lyapunov associé à $A_0, A_1, ..., A_r$. L'opérateur $L^*, H_n \longrightarrow H_n$ est définit par

$$L^*(t)S = A_0^*(t)S + SA_0 + \sum_{k=1}^{r} A_k^*(t)SA_k(t)$$

On définit dans l'espace H_n l'opérateur d'évolution T_F

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}T_F(t, t_0) = L_F(t)T_F(t, t_0), \\ T_F(t, t_0) = I \end{cases}$$

où $L_F(t)$ est définit par:

$$L_F(t)S = (A_0 + BF)\, S + S\,(A_0 + BF)^* + \sum_{k=1}^{r} A_k^*(t)SA_k(t)$$

Définition 29. *On dit que le système (2.1) est observable s'il existe* $\tau > 0, \beta > 0$ *tel que*

$$\int_t^{t+\tau} T^*(s,t)C_0^*(s)C_0(s)ds \geq \beta I, \forall t \geq 0,$$

Dans le cas invariant on a les résultats suivants.

Proposition 30. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le système (2.1) est observable,*
2. *il existe* $\tau > 0$ *tel que*
$$\int_0^{\tau} e^{L^*s}C_0^*C_0 ds > 0,$$
3. *Il existe* $\tau > 0$ *tel que* $Z(\tau) > 0$, *où* $Z(t)$ *est la solution du problème à valeur initiale:*
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Z(t) = L^*Z(t) + C_0^*C_0, \ t > 0, \\ Z(0) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Preuve. Le système (2.1) est observable si et seulement s'il existe $\tau>0$ tel que

$$\int_t^{t+\tau} T^*(s,t)C_0^*(s)C_0(s)ds \geq \beta I, \forall t \geq 0,$$

Dans le cas invariant, les opérateurs L et L* sont donnés par:

$$\begin{aligned} L^*S &= A_0^*S + SA_0 + \sum_{k=1}^{r} A_k^*SA_k \\ LS &= A_0S + SA_0^* + \sum_{k=1}^{r} A_kSA_k^* \end{aligned}$$

Dans ce cas l'opérateur d'évolution T est défini par l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}S(t) = LS(t)$$

Il est donné par $\mathrm{T}(t, t_0) = e^{L(t-t_0)}$. Alors le système (2.1) est observable si et seulement s'il existe $\tau>0$ tel que

$$\int_t^{t+\tau} e^{L^*(s-t)}C_0^*C_0 ds \geq \beta I, \forall t \geq 0,$$

et comme
$$\int_t^{t+\tau} e^{L^*(s-t)} C_0^* C_0 ds = \int_0^{\tau} e^{L^*(s'-t)} C_0^* C_0 ds'$$
Alors le système (2.1) est observable si et seulement s'il existe $\tau>0$ tel que

$$\int_0^{\tau} e^{L^*(s-t)} C_0^* C_0 ds > 0, \forall t \geq 0,$$

Montrons maintenant que (2)$\Longleftrightarrow$ (3).
La solution du système

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} Z(t) = L^* Z(t) + C_0^* C_0, \ t > 0, \\ Z(0) = 0 \end{cases}$$

est donnée par $Z(t) = \int_0^t e^{L^*s} C_0^* C_0 ds$. Donc il existe $\tau > 0$ tel que $Z(\tau) > 0$ ssi il $\tau > 0$ tel que $\int_0^{\tau} e^{L^*s} C_0^* C_0 ds > 0$. ■

Remarque 31. *L'équation (2.5) peut être écrite d'une manière équivalente comme suit*
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} Z(t) = A_0^* Z(t) + Z(t) A_0 + \sum_{k=1}^{r} A_k^* Y(t) A_k + C_0^* C_0, \ t > 0, \\ Y(0) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

On termine cette section par le corollaire suivant.

Corollaire 32. *Supposons que $(C_0, A_0, A_1, ..., A_r)$ est observable et que l'équation algébrique*
$$A_0^* S + S A_0 + \sum_{k=1}^{r} A_k^* S A_k + C_0^* C_0 = 0 \tag{2.7}$$
admet une solution $X \geq 0$. Alors

1. *Le système $(A_0, A_1, ..., A_r)$ est exponentiellement stable en moment d'ordre 2,*

2. *X>0,*

3. *L'équation (2.7) admet une solution unique définie positive.*

Exemple 33. *Soient* $A_0 = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_1 = \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, C=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. *Etudions la détectabilité du système* (C,A_0, A_1). *Soit* G=$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$, Y=$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}$.

   On a
$$A_0^*Y + YA_0 + GC_0 + C_0^*G^* + A_1^*YA_1 + I_n = 0$$
$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [g_1, g_2] + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$
$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha y_1 & 2\alpha y_2 \\ 2\alpha y_2 & 2\alpha y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta^2 y_1 & \beta^2 y_2 \\ \beta^2 y_2 & \beta^2 y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2g_1 + 1 & g_2 \\ g_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2g_1 + 2\alpha y_1 + \beta^2 y_1 + 1 = 0 \\ g_2 + 2\alpha y_2 + \beta^2 y_2 = 0 \\ 2\alpha y_3 + \beta^2 y_3 + 1 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_1 = (-1 - 2g_1) \,/\, (2\alpha + \beta^2) \\ y_2 = -g_2/\, (2\alpha + \beta^2) \\ y_3 = \frac{-1}{2\alpha + \beta^2} \end{array} \right.$$
   On a
$$-1 - 2g_1 < 0 \Longleftrightarrow -1 < 2g_1 \Longleftrightarrow \frac{-1}{2} < g_1$$
   Ainsi pour G=$[g_1, 0]$ *avec* $\frac{-1}{2} < g_1$, *l'equation (2.3) admet une solution définie positive* Y *si* $2\alpha + \beta^2 < 0$. *Alors le système* (C,A_0, A_1) *est détectable si* $2\alpha + \beta^2 < 0$.

2. *Etudions maintenant l'observabilité du système* (C,A_0, A_1). *L'équation (2.5) correspondante à ce système est;*
$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{d}{dt} Z(t) = A_0^* Z(t) + Z(t)A_0 + \sum\limits_{k=1}^{r} A_k^* Z(t) A_k + C^*C, \ t > 0, \\ Z(0) = 0 \end{array} \right.$$
   Soit $Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_2(t) & z_3(t) \end{bmatrix}$. *On obtient le système suivant*
$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) & \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_2(t) & \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha z_1(t) & 2\alpha z_2(t) \\ 2\alpha z_2(t) & 2\alpha z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta^2 z_1(t) & \beta^2 z_2(t) \\ \beta^2 z_2(t) & \beta^2 z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ Z(0) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 2\alpha z_1(t) + \beta^2 z_1(t) + 1 \\ \dot{z}_2(t) = 2\alpha z_2(t) + \beta^2 z_2(t) \\ \dot{z}_3(t) = 2\alpha z_3(t) + \beta^2 z_3(t) \\ z_1(0) = z_2(0) = z_3(0) = z_4(0) = 0 \end{cases}$$

On a

$$\dot{z}_3(t) = 2\alpha z_3(t) + \beta^2 z_3(t) \Longleftrightarrow \dot{z}_3(t) = \left(2\alpha + \beta^2\right) z_3(t) \Longrightarrow z_3(t) = e^{\left(2\alpha+\beta^2\right)t} z_3(0) = 0$$

Alors la solution du système (2.5) n'est pas définie positive, donc le système (C, A_0, A_1) *n'est pas observable.*

2.3. Contrôlabilité stochastique

Dans cette section on introduit la notion de la contrôlabilité stochastique.

Définition 34. *On dit que le système (2.1) est contrôlable s'il existe* $\tau > 0$ *tel que*

$$\int_0^\tau e^{Lt} BB^* ddt > 0,$$

Comme dans le cas déterministe, il existe une relation de dualité entre la contrôlabilité et l'observabilité dans le cas stochastique. On a le résultat suivant.

Proposition 35. *Le système* $(A_0, A_1, ..., A_r, B)$ *est contrôlable ssi le système* $(B^*, A_0, A_1^*, ..., A_r^*)$ *est observable.*

En utilisant cette relation de dualité et les résultats de la section précédente, on obtient le résultat suivant.

Proposition 36. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le système* $(A_0, A_1, ..., A_r, B)$ *est contrôlable,*

2. *Il existe* $\tau > 0$ *tel que* $Z(\tau) > 0$*, où* $Z(t)$ *est la solution du problème à valeur initiale:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} Y(t) = LY(t) + BB^*, \ t > 0, \\ Z(0) = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Remarque 37. *L'équation (2.8) peut être écrite d'une manière équivalente comme suit*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Y(t) = A_0Y(t) + Y(t)A_0^* + \sum\limits_{k=1}^{r} A_kY(t)A_k^* + BB^*, \ t > 0, \\ Y(0) = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Le corollaire suivant donne la relation entre la contrôlabilité du système $(A_0, A_1, ..., A_r, B)$ et la contrôlabilité des paires (A_k, B), $1 \leq k \leq r$.

Proposition 38. *S'il existe $k \in \{1, ..., r\}$ tel que la paire (A_k, B) est contrôlable alors le système $(A_0, A_1, ..., A_r, B)$ est contrôlable.*

L'inverse de ce corollaire n'est pas toujours vérifié. Pour n=2 et r=1 et m=1, on montrera dans le la proposition suivante que l'inverse est vérifié dans ce cas.

Proposition 39. *Soient* $A_0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. *Si (A_0, B) et (A_1, B) ne sont pas contrôlables, alors le système (A_0, A_1, B) n'est pas contrôlable.*

Preuve. Supposons que (A_0, B) et (A_1, B) ne sont pas contrôlables. D'aprés le critère de Kalman, on a:

$$\begin{aligned} (A_0, B) \text{ n'est pas contrôlable} &\iff rang(B, A_0B) < n \\ &\Longrightarrow \det[B, A_0B] = 0 \\ &\Longrightarrow \begin{vmatrix} b_1 & ab_1 + bb_2 \\ b_2 & cb_1 + db_2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow b_1(cb_1 + db_2) - b_2(ab_1 + bb_2) = 0 \end{aligned}$$

On obtient

$$b_1b_2(d - a) = bb_2{}^2 - cb_1{}^2 \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} (A_1, B) \text{ n'est pas contrôlable} &\iff rang(B, A_1B) < n \\ &\Longrightarrow \det[B, A_1B] = 0 \\ &\Longrightarrow \begin{vmatrix} b_1 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ b_2 & \gamma b_1 + \delta b_2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow b_1(\gamma b_1 + \delta b_2) - b_2(\alpha b_1 + \beta b_2) = 0 \end{aligned}$$

On obtient

$$b_1 b_2 (\delta - \alpha) = \beta {b_2}^2 - \gamma {b_1}^2 \tag{2.11}$$

Supposons que le système (A_0, A_1, B) est contrôlable. Alors il existe une solution définie positive de l'équation (2.8). Soit $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_2(t) & y_3(t) \end{bmatrix}$, alors

$$\begin{aligned}
A_0 Y(t) + Y(t) A_0^T + A_1 Y(t) A_1^T + BB^T &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T \\
&\quad + \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} 2ay_1 + 2by_2 & ay_2 + by_3 + cy_1 + dy_2 \\ ay_2 + by_3 + cy_1 + dy_2 & 2cy_2 + 2dy_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} b_1^2 + \alpha(\alpha y_1 + \beta y_2) + \beta(\alpha y_2 + \beta y_3) & \gamma(\alpha y_1 + \beta y_2) + \delta(\alpha y_2 + \beta y_3) + b_1 b_2 \\ \alpha(\gamma y_1 + \delta y_2) + \beta(\gamma y_2 + \delta y_3) + b_1 b_2 & b_2^2 + \gamma(\gamma y_1 + \delta y_2) + \delta(\gamma y_2 + \delta y_3) \end{bmatrix}$$

Ainsi (2.8) est équivalente à

$$\begin{cases}
\frac{d}{dt} y_1(t) = 2ay_1(t) + 2by_2(t) + b_1^2 + \alpha(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)) + \beta(\alpha y_2(t) + \beta y_3(t)), \ t > 0, \\
\frac{d}{dt} y_2(t) = (c + \alpha\gamma) y_1(t) + (a + d + \gamma\beta + \alpha\delta) y_2(t) + (b + \delta\beta) y_3(t) + b_1 b_2 \\
\frac{d}{dt} y_3(t) = 2cy_2(t) + 2dy_3(t) + b_2^2 + \gamma(\gamma y_1(tà + \delta y_2(t)) + \delta(\gamma y_2(t) + \delta y_3(t)) \\
y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0
\end{cases}$$

or

$$\begin{cases}
\frac{d}{dt} y_1(t) = (2a + \alpha^2) y_1(t) + 2(b + \alpha\beta) y_2(t) + \beta^2 y_3(t) + b_1^2, \ t > 0, & * \\
\frac{d}{dt} y_2(t) = (c + \alpha\gamma) y_1(t) + (a + d + \gamma\beta + \alpha\delta) y_2(t) + (b + \delta\beta) y_3(t) + b_1 b_2, & ** \\
\frac{d}{dt} y_3(t) = \gamma^2 y_1(t) + 2(c + \delta\gamma) y_2(t) + (2d + \delta^2) y_3(t) + b_2^2, & *** \\
y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0
\end{cases} \tag{2.12}$$

1. Si $b_1 \neq 0$ et $b_2 = 0$, on obtient des équations (2.10) et (2.11)

$$\begin{aligned}
cb_1^2 &= 0 \Longrightarrow c = 0, \\
\gamma b_1^2 &= 0 \Longrightarrow \gamma = 0
\end{aligned}$$

alors l'équation (***) est équivalente à

$$\frac{d}{dt} y_3(t) = \left(2d + \delta^2\right) y_3(t), \ y_3(0) = 0$$

ainsi $y_3(t) = 0$, $t \geq 0$.

2. Si $b_2 \neq 0$ et $b_1 = 0$, on obtient des équations (2.10) et (2.11)

$$\begin{aligned} bb_2^2 &= 0 \Longrightarrow b = 0, \\ \beta b_2^2 &= 0 \Longrightarrow \beta = 0 \end{aligned}$$

alors l'équation (*) est équivalente à

$$\frac{d}{dt} y_1(t) = \left(2a + \alpha^2\right) y_1(t), \; y_1(0) = 0$$

ainsi $y_1(t) = 0$, $t \geq 0$.

3. Supposons maintenant que $b_2 \neq 0$ et $b_1 \neq 0$. En utilisant les équations (2.10) et (2.11) on peut montrer que ($\overline{x}$,$\overline{y}$,$\overline{z}$) satisfait le système (2.12)

$$\overline{x}(t) = \frac{b_1}{b_2} \overline{y}(t), \; \overline{z}(t) = \frac{b_2}{b_1} \overline{y}(t)$$

où $\overline{y}(t)$ est la solution du système

$$\frac{d}{dt} \overline{y}(t) = \left(\frac{(c + \alpha\gamma)}{b_2} b_1 + (a + d + \gamma\beta + \alpha\delta) + (b + \delta\beta) \frac{b_2}{b_1} \right) \overline{y}(t) + b_1 b_2, \quad \overline{y}(0) = 0$$

Comme la solution du système (2.12) est unique, alors ($\overline{x}$,$\overline{y}$,$\overline{z}$) est l'unique solution de ce système. Mais

$$\overline{x}(t)\overline{z}(t) - \overline{y}(t)^2 = 0, \text{ pour tout } t \geq 0,$$

alors $detY(t) = 0$, donc $Y(t)$ n'est pas définie positive, donc le système (A_0, A_1, B) n'est pas contrôlable. ■

Dans l'exemple suivant on va montré qu'on peut avoir un système (A_0, A_1, B) contrôlable tandis que les paires (A_0, B) et (A_1, B) ne sont pas contrôlables.

Exemple 40. *Considérons le système*

$$dx(t) = A_0 x(t) dt + A_1(t) x(t) dw(t) + Bu(t) dt,$$

où $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a

$$rang \begin{pmatrix} B & A_1B & {A_1}^2B \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

et

$$rang \begin{pmatrix} B & A_0B & {A_0}^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2,$$

alors les systèmes (A_0, B) et (A_1, B) ne sont pas contrôlables.

Soit $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_2(t) & y_4(t) & y_5(t) \\ y_3(t) & y_5(t) & y_6(t) \end{bmatrix}$. *L'équation (2.8). correspondante à ce système est*

$$\begin{cases} dy_1(t) = 11y_1(t) + 1 \\ dy_2(t) = 3y_2(t) + 6y_1(t) + 3y_3(t) + 1 \\ dy_3(t) = 1 \\ dy_4(t) = -y_4(t) + 6y_5(t) + 4y_1(t) + 4y_2(t) + 1 \\ dy_5(t) = 3y_6(t) - 2y_3(t) + 1 \\ dy_6(t) = 5y_6(t) + 1 \\ y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = y_6(0) \end{cases}$$

La solution de ce système est

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{1}{11}\left(e^{11t} - 1\right), \; y_2(t) = \frac{3}{44}e^{11t} + \frac{5}{12}e^{3t} - t - \frac{16}{33}, \; y_3(t) = t, \\ y_5(t) = \frac{3}{25}\left(e^{5t} - 1\right) - t^2 + \frac{2}{5}t, \; y_6(t) = \frac{1}{5}\left(e^{5t} - 1\right) \end{cases}$$

et $y_4(t)$ admet la forme

$$y_4(t) = \frac{17}{132}e^{11t} + \alpha_1 e^{5t} + \alpha_2 e^{3t} + \alpha_3 e^{-t} + \alpha_4 t^2 + \alpha_5 t + \alpha_6$$

Comme il existe $t \geq 0$ tel que Y(t)>0 alors le système (A_0, A_1, B) est contrôlable.

Remarque 41. *Dans cette exemple on a montré que (A_0, A_1, B) est contrôlable, et dans l'exemple (26) on a monté qu'il n'est pas stabilsable. Donc on conclut que la contrôlabilité stochastique n'implique pas la stabilisation stochastique.*

3. Contrôle optimal

3.1. Rappel sur le contrôle optimal des systèmes déterministes

Considérons le système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 = y \end{cases}$$

et le critère appelé fonction coût:

$$J_{t_1}(x_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t))dt + G(t_1, x(t_1))$$

où G, J sont des foctions de classe C^1. Si $t_1 = +\infty$, la fonction coût est donnée par:

$$J_{t_1}(x_0, u) = \int_{t_0}^{+\infty} g(t, x(t), u(t))dt$$

Le problème de contrôle optimal consiste à trouver un contrôle $\hat{u}(.)$ tel que pour tout contrôle admissible $u(.)$ on a

$$J_{t_1}(x_0, \hat{u}) \leq J_{t_1}(x_0, u)$$

Lorsque t_1 est fini, le problème de contrôle optimal est dit en horizon fini, l'orsque $t_1 = +\infty$ on parle d'optimisation en horizon infinie.

3.1.1. Principe de maximum de pontryaguine

Soient λ_1, $\lambda_2, ..., \lambda_n$ les multiplicateurs de Lagrange et soit

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)^T$$

On définit le Hamiltonien par :

$$H(t, x(t), u(t), \lambda) = g(t, x(t), u(t)) + \lambda^T f(t, x(t), u(t))$$

On a le théorème suivant

Théorème 42. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour que J ait un extremum sous la contrainte*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 = y \end{cases}$$

sont

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \ i = 1, ..., n \text{ (équation adjointe)} \\ \lambda_i(t_1) = \frac{\partial G}{\partial x_i}(t_1), \quad i = 1, ..., n \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad i = 1, ..., m \end{cases}$$

qui sont équivalentes à

Exemple 43. *considèrons le problème doptimisation*

$$J^* = \inf \int_{t_0}^{t_1} \left(x^2 + u^2\right) dt$$

sous les contraites:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax\,(t) + u(t)) \\ x(t_0) = x_0 = y \end{cases}$$

où a>0, t>0, x$\in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} H\,(t, x, u, \lambda) &= x^2 + u^2 + \lambda^T\,(-ax + u) \\ &= x^2 + u^2 + \lambda\,(u - ax) \\ &= x^2 + u^2 + \lambda\,(u - ax) \end{aligned}$$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont

Théorème 44. *Les conditions nécéssaires pourque u^* minimise H sont*

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \ i = 1, ..., n \text{ (équation adjointe)} \\ \dot{\lambda}_i(t_1) = \frac{\partial G}{\partial x_i}(t_1), \quad i = 1, ..., n \\ H(t, x^*, u^*, \lambda^*) \leq H(t, x, u, \lambda), \text{ pour tout contrôle admissible } u \text{ et tout } t \in [t_0, t_1] \end{cases}$$

3.1.2. Application au problème de régulateur linéaire quadratique

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,B$\in \mathbb{R}^{n\times m}$,U=R ^{m} $(m \leq n)$.

La fonction à minimiser est:

$$J_{t_1}(x_0, u) = \langle Qx(t_1), x(t_1)\rangle + \int_0^{t_1} (\langle Qx(t), x(t)\rangle + \langle Ru(t), u(t)\rangle)\, dt$$

où $Q \succeq 0$, $Q_1 \succeq 0$ et $R \succ 0$.

Le Hamiltonien correspondant à ce problème est:

$$H(t, x(t), u(t), \lambda) = \langle Qx(t), x(t)\rangle + \langle Ru(t), u(t)\rangle + \lambda^T (Ax(t) + Bu(t))$$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont:

$$\begin{cases} \dot{\lambda(t)} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \lambda(t_1) = \frac{\partial G}{\partial x}(t_1) \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

qui est équivalent à:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -2Qx - A^T\lambda \\ 2Ru - B^T\lambda = 0 \\ \lambda(t_1) = 2Q_1 x(t_1) \end{cases}$$

On obtient ainsi:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -2Qx + A^T\lambda \\ u^*(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T\lambda \end{cases}$$

La trajectoire optimale est:

Théorème 45.

$$\dot{x}^*(t) = Ax(t) + Bu^*(t) = Ax(t) - \frac{1}{2}BR^{-1}B^T\lambda(t)$$

Alors on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -2Qx - A^T\lambda \\ \dot{x}^*(t) = Ax^*(t) - \frac{1}{2}BR^{-1}B^T\lambda(t) \\ \lambda_i(t_1) = 2Q_1 x(t_1),\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

On pose $\lambda(t) = 2P(t)x(t)$. On remplace cette dernière dans la formule de u^*, on obtient

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P x^*(t)$$

On a

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}(t) &= -2Qx - A^T\lambda \\
&\iff 2\dot{P}(t)x(t) + 2P(t)\dot{x}(t) = -2Qx(t) - 2A^T P(t)x(t) \\
&\iff \dot{P}(t)x(t) = -Qx(t) - A^T P(t)x(t) - P(t)Ax(t) + \frac{1}{2}P(t)BR^{-1}B^T\lambda(t) \\
&= -Qx(t) - A^T P(t)x(t) - P(t)Ax(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t)x(t) \\
&= \left(-Q - A^T P(t) - P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t)\right)x(t)
\end{aligned}$$

pout tout $t \geq 0$. Alors

$$\dot{P}(t) + A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t)x(t) + Q = 0 \tag{3.1}$$

Cette dernière est dite équation différentielle de Riccati. Pour la condition finale, on a

$$\lambda(t_1) = 2Q_1x(t_1) \iff 2P(t_1)x(t_1) = 2Q_1x(t_1) \implies P(t_1) = Q_1$$

On obtient ainsi le théorème suivant.

Théorème 46. *L'équation de Riccati (3.1) avec condition finale $P(t_1) = Q_1$ admet une solution unique P(t). Le contrôle optimal est donné par $u^*(t) = -R^{-1}B^T P(t)x^*(t)$, 0$\leq t \leq t_1$, où x*(t) est la solution du système.*

$$\begin{cases} x^*(t) = \left(A - BR^{-1}B^T P(t)\right)x^*(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

et le coût minimal est $J^* = x_0^T P(t_0)x_0.$

Dans le cas où $t_1 = +\infty$, on parle du problème de régulateur linéaire quadratique dans la solution est donnée par.

Théorème 47. *Si (A,B) est contrôlable et si (A,Q_1) où $Q = Q_1^T Q$, est observable, alors le contrôle qui minimise*

$$J = \int_0^{+\infty} \left(\langle Qx(t), x(t)\rangle + \langle Ru(t), u(t)\rangle\right) dt$$

est donné par $u^*(t) = -R^{-1}B^T P x^*(t)$ où P est la solution de l'équation algébrique de Riccati

$$A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t)x(t) + Q = 0$$

et le coût minimal est $J^* = x_0^T P x_0.$

3.2. Contrôle optimal stochastique

3.2.1. Contrôle optimal à horizon fini

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité. Considérons le système stochastique suivant

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t), u(t))dt + g(t, x(t), u(t))dw(t),\ t_0 \leq t \leq T, \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur aléatoire indépendant du mouvement Brownien $w(t)$ pour tout, $t_0 \leq t \leq T$.

L'ensemble des contrôles admissibles U est l'ensemble des contrôles $u \in U$ tels que le système (3.2) admet une solution unique x pour tout $.u \in U$.

L'objectif est de trouver un contrôle $u \in U$ qui minimise la fonctionnelle

$$J_{t_1}(x_0, u) = E_{t_0,x_0}\left(\Psi\left(T, x(T)\right) + \int_0^T \Phi(t, x(t), u(t))dt\right) \tag{3.3}$$

où E_{t_0,x_0} est l'espérence conditionnelle, conditionnée par le fait que l'état initial est x_0 à l'instant $t = t_0$.

On cherche un contrôle $u^*(t) = u^*(t, x(t))$, $t_0 \leq t \leq T$, qui satisfait le système (3.2) et qui minimise la fonctionnelle (3.3).

On va présenté la solution du problème de contrôle optimal en utilisant la **programmation dynamique de Bellman.** Soit $V(t_0, x_{0.}) = \inf J(t_0, x_0, u)$. En général, pour tout $s \in [t_0, T]$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$, on définit la fonction

$$\begin{aligned} V(s, y_.) &= \inf_{u \in U} J(s, y, u). \\ &= \inf_{u \in U} E_{s,y}\left(\Psi\left(T, x(T)\right) + \int_0^T \Phi(t, x(t), u(t))dt\right) \end{aligned}$$

correspondant au système

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t), u(t))dt + g(t, x(t), u(t))dw(t),\ t_0 \leq t \leq T, \\ x(s) &= y \end{aligned}$$

On a le théorème suivant qui présente l'équation stochastique de Hamilton -Jacobi-Bellman.

Le contrôle optimal $u^*(t)$ et la valeur de V correspondante satisfont l'équation de H–J-B

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s}V(s,y) + \inf_{u\in U}\{\mathcal{A}_u V(s,y) + \Phi(s,y,u)\} \\ = & \frac{\partial}{\partial s}V(s,y) + \{\mathcal{A}_{u^*} V(s,y) + \Phi(s,y,u^*)\} = 0 \end{aligned}$$

où $t_0 \leq s \leq T$, avec la condition finale

$$V(T,y) = \Psi(T,y), \ y \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\mathcal{A}_u V(s,y) = V_y(s,y)f(s,y) + \frac{1}{2}trace\left(g^T(s,y)V_{yy}(s,y)g(s,y)\right)$$

On remarque que l'application de la programmation dynamique stochastique peut être réalisée en trois étapes:

1. Pour $\widehat{V}$ fixé, déterminer $\hat{u} = \widehat{u}(s,y,\widehat{V})$ tel que

$$\widehat{u}(s,y,\widehat{V}) \in \arg\inf_{u\in U}\{\mathcal{A}_u V(s,y) + \Phi(s,y,u)\}$$

2. On résoud l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial s}V(s,y) + \mathcal{A}_{\widehat{u}} V(s,y) + \Phi(s,y,\widehat{u}) = 0$$

   avec condition finale $V(T,y) = \Psi(T,y)$ $y \in \mathbb{R}^n$.

   La solution $V(s,y)$ est la fonction valeur qui réalise le coût minimal.

3. On obtient le contrôle optimal $u^* = \widehat{u}(s,y,V)$.

3.2.2. Le problème de régulateur linéaire stochastique

Soient Q_1 et Q sont des matrices semi-définie positives et R est une matrice définie positive. Considérons le problème de contrôle optimal

$$\inf_{u\in U} J(t_0,x_0,u) = E_{t_0,x_0}\left(\langle Q_1 x(T), x(T)\rangle + \int_0^T (\langle Qx(t),x(t)\rangle + \langle Ru(t),u(t)\rangle)\,dt\right) \tag{3.4}$$

correspondant au système

$$\begin{cases} \quad dx(t) = (Ax(t) + Bu(t))\, dt + C dw(t), \;\; t_0 \leq t \leq T \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, C est une fonction matricielle de type $n \times r$, et $(W(t))$ est un processus de Wiener r-dimensionnel. On va appliquer la programmation dynamique de Bellman pour résoudre le problème (3.4). L'équation de H-J-B correspondante à ce problème est:

$$\frac{\partial}{\partial s}V(s,y) + \inf_{u\in U}\{\mathcal{A}_u V(s,y) + \Phi(s,y,u)\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}V(s,y)+\inf_{u\in U}\left\{y^TA^TV_y + u^TB^TV_y + \frac{1}{2}trace\left(C^TV_{yy}(s,y)C\right) + y^TQy + u^TRu\right\} = 0 \tag{3.5}$$

On a

$$\inf_{u\in U}\left\{y^TA^TV_y + u^TB^TV_y + \frac{1}{2}trace\left(C^TV_{yy}(s,y)C\right)\right\} = \inf_{u\in U}\left\{y^TA^TV_y + u^TB^TV_y\right\}$$

on obtient $\widehat{u} = -\frac{1}{2}R^{-1}B^TV_y$. Remplaçons cette valeur dans l'équation (3.5) on obtient

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}V(s,y) + y^TA^TV_y + \widehat{u}^TB^TV_y + \frac{1}{2}trace\left(C^TV_{yy}(s,y)C\right) + y^TQy + \widehat{u}^TR\widehat{u} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}V(s,y)+y^TA^TV_y-\frac{1}{2}V_y^TBR^{-1}V_y+\frac{1}{2}trace\left(C^TV_{yy}(s,y)C\right)+y^TQy+\frac{1}{4}V_y^TBR^{-1}RR^{-1}B^TV_y = 0 \tag{3.6}$$

avec condition finale $V(T,y) = y^TQ_1y$.

Pour résoudre cette équation on prend

$$V(s,y) = y^TP(s)y + \alpha(s)$$

où $P(s)$ est une une matrice symétrique et $\alpha(s)$ est une fonction scalaire. Comme on a

$$V_y(s,y) = 2P(s)y, \;\; V_{yy} = 2P(s)$$

l'équation (3.6) est équivalente à

$$\Longleftrightarrow y^T\dot{P}(s)y + \dot{\alpha}(s) + y^TA^TP(s)y - y^TP(s)BR^{-1}B^TP(s)y$$

$$+\frac{1}{2}trace\left(CC^T 2P(s)\right)+y^T Q y+\frac{1}{4}y^T A^T P(s) B R^{-1} R R^{-1} B^T 2P(s) y=0$$

on obtient

$$\Longleftrightarrow y^T \dot{P}(s) y+y^T \dot{\alpha}(s) y+2y^T A^T P(s) y-y^T P(s) B R^{-1} B^T P(s) y$$

$$+\frac{1}{2}trace\left(CC^T 2P(s)\right)+y^T Q y+\frac{1}{4}y^T A^T P(s) B R^{-1} R R^{-1} B^T 2P(s) y=0$$

d'où

$$\Longleftrightarrow y^T\left(\dot{P}(s)+A^T P(s)+P(s)A-\frac{1}{2}P(s)BR^{-1}B^T P(s)Q\right)y$$

$$+y^T\left(\dot{\alpha}(s)+trace\left(CC^T P(s)\right)\right)y=0$$

pour tout $y\in\mathbb{R}^n$. On obtient ainsi

$$\begin{cases} \dot{P}(s)+A^T P(s)+P(s)A-\frac{1}{2}P(s)BR^{-1}B^T P(s)Q=0 \\ \dot{\alpha}(s)+trace\left(CC^T P(s)\right)=0 \end{cases}$$

Comme

$$\begin{cases} V(T,y)=\Psi(T,y)=y^T Q_1 y \\ V(T,y)=y^T P(T) y+\alpha(T) \end{cases}$$

alors $P(T)=0$ et $\alpha(T)=0$. Alors $P(s)$ et $\alpha(s)$ peuvent être déterminer en résolvant les systèmes suivants:

$$\begin{cases} \dot{P}(s)+A^T P(s)+P(s)A-\frac{1}{2}P(s)BR^{-1}B^T P(s)+Q=0 \\ P(T)=0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(s)+trace\left(CC^T P(s)\right)=0 \\ \alpha(T)=0 \end{cases}$$

Alors le contôle optimal est

$$u^*(s)=-\frac{1}{2}R^{-1}B^T(2Py)=-R^{-1}B^T P(s) y$$

et le coût minimal est

$$J^*=E\left(V(t_0,x_0)\right)=E\left(x_0^T P(t_0) x_0\right)+\alpha(t_0)$$

où

$$\alpha(t)=\int_t^T trace\left(CC^T P(s)\right)ds$$

Exemple 48. *Trouvez le contrôle qui minimise la fonctionnelle*

$$J = \frac{1}{2}E\left(\int_0^T \left(x(t)^2 + u(t)^2\right) dt\right)$$

sous contrainte

$$dx(t) = (x(t) + u(t))\, dt + dw(t)$$

Le contrôle optimal est donné par $u^*(t) = -BR^{-1}Px(t) = -Px(t)$*,où* P *est la solution de l'équation de Riccati*

$$\begin{cases} \dot{P}(s) + A^T P(s) + P(s)A - \frac{1}{2}P(s)BR^{-1}B^T P(s) + Q = 0 \\ \dot{\alpha}(s) + trace\left(CC^T P(s)\right) = 0 \end{cases}$$

Pour cet exemple on obtient

$$\begin{cases} \dot{P}(s) + 2P(s) - \frac{1}{2}P^2(s) + \frac{1}{2} = 0,\ P(T)=0 \\ \dot{\alpha}(s) + trace\,(P(s)) = 0\ ,\ \alpha(T) = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation de Riccati on utilise le changement de variable $P(t) = -\frac{\dot{z}(t)}{2z(t)}$*. Alors*

$$\dot{P}(t) = \frac{-2\ddot{z}(t)z(t) + 2\dot{z}^2(t)}{4z^2(t)}$$

Alors l'équation de Riccati est équivalente à

$$\frac{-2\ddot{z}(t)z(t) + 2\dot{z}^2(t)}{4z^2(t)} - 2\frac{\dot{z}(t)}{2z(t)} - 2\frac{\dot{z}^2(t)}{4z^2(t)} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad \frac{-2\ddot{z}(t)z(t) + 2\dot{z}^2(t) - 4\dot{z}(t)z(t) - 2\dot{z}^2(t) + 2z^2(t)}{4z^2(t)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{-2\ddot{z}(t) - 4\dot{z}(t) + 2z(t)}{4z(t)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \ddot{z}(t) + 2\dot{z}(t) - z(t) = 0 \end{aligned}$$

avec condition finale $P(T) = -\frac{\dot{z}(T)}{2z(T)} = 0$*, ainsi* $\dot{z}(T) = 0$*. On résoud maintenant l'équation*

$$\ddot{z}(t) + 2\dot{z}(t) - z(t) = 0,\ \dot{z}(T) = 0$$

L'équation caractéristique de cette équation est $\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$, *dont les racines sont* $\lambda_1 = -1 - \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -1 + \sqrt{2}$...*On pose*

$$z(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}$$

alors

$$z(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t} \Longrightarrow \dot{z}(t) = a\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

On a

$$\begin{aligned} \dot{z}(T) &= 0 \Longrightarrow a\lambda_1 e^{\lambda_1 T} + b\lambda_2 e^{\lambda_2 T} = 0 \\ &\Longrightarrow a = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} be^{(\lambda_2 - \lambda_1)T} \end{aligned}$$

Comme $P(t) = -\frac{\dot{z}(t)}{2z(t)}$ *alors*

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{-a\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - b\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{2\left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} be^{(\lambda_2 - \lambda_1)T} e^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}\right)} \\ &= \frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} be^{(\lambda_2 - \lambda_1)T} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} - b\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{2\left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} be^{(\lambda_2 - \lambda_1)T} e^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}\right)} \end{aligned}$$

On obtien

$$P(t) = \frac{\lambda_1 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)T} e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{2\left(-\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)T} e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}\right)}$$

Maintenant pour l'équation

$$\dot{\alpha}(s) + trace\left(P(s)\right) = 0, \alpha(T) = 0$$

on a

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \int_t^T \dot{\alpha}(s) ds = \int_t^T trace\left(P(s)\right) ds \\ &= \int_t^T \frac{\lambda_1 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)T} e^{\lambda_1 s} - \lambda_2 e^{\lambda_2 s}}{2\left(-\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)T} e^{\lambda_1 s} + e^{\lambda_2 s}\right)} ds \end{aligned}$$

Enfin le coût minimal est

$$J^* = P(t_0) E\left(x_0^2\right) + \alpha(t_0)$$

3.2.3. Problème de régulateur linéaire avec bruit sur l'état et le contrôle

Dans cette section, on considère le système suivant:

$$\begin{cases} dx(t) = (Ax(t) + Bu(t))\,dt + B_1x(t)dw_1(t) + B_2u(t)dw_2(t),\ t_0 \le t \le T \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où $A,\ B_1 \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B,\ B_2 \in R^{n\times m}$. w_1 et w_2 sont deux mouvements browniens scalaires indépendants. x_0 est un vecteur aléatoire.

Considérons la fonction coût

$$J = E\left(x^T(T)Qx(T) + \int_{t_0}^{T} \left(x(t)^TQx(t) + u^T(t)Ru(t)\right)dt\right)$$

L'équation HJB correspondante à ce problème est

$$\frac{\partial}{\partial s}V(s,y) + \inf_{u\in U}\{y^TA^TV_y + u^TB^TV_y + y^TQy + u^TRu$$

$$+\frac{1}{2}trace\left(\begin{pmatrix} B_1y & B_2u \end{pmatrix}^T V_{yy}(s,y)\begin{pmatrix} B_1y & B_2u \end{pmatrix}\right)\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}V(s,y) + \inf_{u\in U}\{y^TA^TV_y + u^TB^TV_y + y^TQy + u^TRu$$

$$+\frac{1}{2}trace\left(\begin{pmatrix} y^TB_1^T \\ u^TB_2^T \end{pmatrix} V_{yy}(s,y)\begin{pmatrix} B_1y & B_2u \end{pmatrix}\right)\} = 0$$

Soit $V(s,y) = y^TP(s)y + \alpha(s)$, où $P(s)$ est une fonction matricielle et $\alpha(s)$ est une fonction scalaire. Comme on a

$$V_y(s,y) = 2P(s)y,\ V_{yy} = 2P(s)$$

L'équation de HJB est équivalente

$$\Longleftrightarrow y^T\dot{P}(s)y + \dot{\alpha}(s) + \inf_{u\in U}\{y^TA^TP(s)y + y^TP(s)Ay + 2u^TB^TP(s)y$$

$$+trace\left(\begin{pmatrix} y^TB_1^T \\ u^TB_2^T \end{pmatrix} P(s)\begin{pmatrix} B_1y & B_2u \end{pmatrix}\right) + y^TQy + u^TRu\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow y^T\dot{P}(s)y + \dot{\alpha}(s) + \inf_{u\in U}\{y^TA^TP(s)y + y^TP(s)Ay + 2u^TB^TP(s)y$$

$$+y^T B_1^T P(s) B_1 y + u^T B_2^T P(s) B_2 u + y^T Q y + u^T R u\} = 0$$
$$\Longleftrightarrow y^T \dot{P}(s) y + \dot{\alpha}(s) + \inf_{u \in U} \{ y^T A^T P(s) y + y^T P(s) A y$$

$$+y^T Q y + y^T B_1^T P(s) B_1 y + 2u^T B^T P(s) y + +u^T \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right) u\} = 0$$

On remarque qu'on atteint le minimum pour u^* tel que:

$$2B^T P(s) y + 2 \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right) u^* = 0$$

alors

$$u^*(s) = -\left(B_2^T P(s) B_2 + R \right)^{-1} B^T P(s) y$$

Remplaçons cette valeur de u* dans l'équation de HJB, on trouve

$$\Longleftrightarrow y^T \dot{P}(s) y + \dot{\alpha}(s) + y^T A^T P(s) y + y^T P(s) A y + y^T Q y + y^T B_1^T P(s) B_1 y$$
$$+ 2u^{*T} B^T P(s) y + u^{*T} \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right) u^* = 0$$
$$\Longleftrightarrow y^T \dot{P}(s) y + \dot{\alpha}(s) + y^T A^T P(s) y + y^T P(s) A y + y^T Q y + y^T B_1^T P(s) B_1 y$$
$$-2y^T P(s) B \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right)^{-1} B^T P(s) y + y^T P(s) B \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right)^{-1} B^T P(s) y = 0$$

d'où on obtient

$$\Longleftrightarrow y^T \left(\dot{P}(s) + A^T P(s) + P(s) A - P(s) B \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right)^{-1} B^T P(s) + B_1^T P(s) B_1 + Q \right) y + \dot{\alpha}(s) =$$

On déduit que

$$\dot{P}(s) + A^T P(s) + P(s) A - P(s) B \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right)^{-1} B^T P(s) + B_1^T P(s) B_1 + Q = 0$$
$$\dot{\alpha}(s) = 0$$

avec condition finale $P(T) = Q_1$, $\alpha(T) = 0$. Alors on trouve que $\alpha(t) = 0$ pour tout t$\geq$ 0. Le contrôle optimal est

$$u^*(s) = -\left(B_2^T P(s) B_2 + R \right)^{-1} B^T P(s) y$$

où P est la solution de l'équation de Riccati

$$\dot{P}(s) + A^T P(s) + P(s) A - P(s) B \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right)^{-1} B^T P(s) + B_1^T P(s) B_1 + Q = 0$$
$$\alpha(T) = 0$$

et le coût minimal est $J^* = E\left(x_0^T P(t_0) x_0 \right)$.

3.3. Contrôle optimal à horizon infini

Dans cette section on va étudié le problème de contrôle optimal à horizon infini. On va considéré deux types de problèmes;

1. Problème avec coefficient d'actualisation

$$J_\lambda(u) = E\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\Phi(t, x(t), u(t))dt\right),\ \lambda > 0$$

Ce coût est souvent utilisé dans les applications économiques.

2. Problème avec coût moyen

$$J(u) = \lim_{T\to+\infty} \sup E\left(\frac{1}{T}\int_0^T \Phi(t, x(t), u(t))dt\right)$$

3.3.1. Problème avec coût actualisé

Considérons le système stochastique suivant

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t), u(t))dt + g(t, x(t), u(t))dw(t),\ t \geq t_0, \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur aléatoire indépendant du mouvement Brownien $w(t)$ pour tout, $t_0 \leq t \leq T$. On cherche le contrôle qui minimise la fonctionnelle

$$J_\lambda(u) = E\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\Phi(t, x(t), u(t))dt\right),\ \lambda > 0$$

On a le résultat suivant.

Proposition 49. *Supposons que* $.\Phi(t, x(t), u(t))$ *est inférieurement ou supérierement bornée. Supposons qu'il existe une fonction de classe* C^2 *tel que* $|E(V(x_0))| < \infty$ *et*

$$\inf_{u\in U}\{\mathcal{A}_u V(x) - \lambda V(x) + \Phi(x, u)\} = 0 \tag{3.8}$$

Soit $\widehat{u}(x)$ tel que

$$\widehat{u}(x) \in \arg\inf_{u\in U}\{\mathcal{A}_u V(x) - \lambda V(x) + \Phi(x, u)\}$$

On note par R l'ensemble des stratégies u tel que $e^{-\lambda t}E\left(V(x(t))\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\int_0^t e^{-\lambda s}\frac{\partial V}{\partial x_i}(x(s)g(s,x(s),u(s))dw_k(s)$$

est une martingale, et supposons que le contrôle $u^*(t) = \widehat{u}(x(t,u^*))$ est une stratégie de Markov admissible qui est dans R. Alors $J_\lambda(u^*) \leq J_\lambda(u)$ pour tout $u \in R$, et le coût minimal est

$$J_\lambda(u^*) = E\left(V(x_0)\right)$$

Application au problème de régulateur linéaire

Soit le problème de minimiser la fonctionnelle

$$J_\lambda(u) = E\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\left(x(t)^TQx(t) + u^T(t)Ru(t)\right)dt\right),\ \lambda > 0$$

correspondant au système

$$\begin{cases} \quad dx(t) = \left(Ax(t) + Bu(t)\right)dt + Cdw(t),\ t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où Q$\succcurlyeq 0$, $R > 0$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, C est une fonction matricielle de type $n \times r$, et $(w(t))$ est un processus de Wiener r-dimensionnel.

L'équation (3.8) associée à ce problème est

$$\inf_{u\in U}\left\{\mathcal{A}_u V(x) - \lambda V(x) + \Phi(x,u)\right\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U}\left\{x^TA^TV_x + u^TB^TV_x + \frac{1}{2}trace\left(C^TV_x(x)C\right) + x^TQx + u^TRu - \lambda V(x)\right\} = 0$$

Soit $V(x) = x^tPx + \alpha$. Alors on trouve

$$\inf_{u\in U}\left\{x^TA^TPx + x^TPAx + 2u^TB^TPx + \frac{1}{2}trace\left(CC^TP\right) + x^TQx + u^TRu - \lambda x^TPx - \lambda\alpha\right\} = 0 \tag{3.9}$$

On remarque que le minimum est atteint pour u^* tel que

$$2B^T Px + 2Ru^* = 0$$

alors $u^*(t) = -R^{-1}B^T Px(t)$. On trouve cette valeur de u^* dans l'équation (3.9), on trouve

$$x^T A^T Px + x^T PAx - 2x^T BR^{-1}B^T Px + \frac{1}{2}trace\left(CC^T P\right)$$

$$+x^T Qx + x^T PBR^{-1}RR^{-1}B^T Px - \lambda x^T Px - \lambda\alpha = 0$$

$$\Longleftrightarrow x^T(A^T P + PA - \lambda P - PBR^{-1}B^T P + Q)x + trace\left(CC^T P\right) - \lambda\alpha = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On obtient ainsi

$$\begin{cases} A^T P + PA - \lambda P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \\ \quad trace\left(CC^T P\right) - \lambda\alpha = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \left(A - \frac{\lambda}{2}I\right)^T P + P\left(A - \frac{\lambda}{2}I\right) - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \\ \alpha = \frac{1}{\lambda}trace\left(CC^T P\right) \end{cases}$$

On obtient le résultat suivant.

Théorème 50. *Supposons que:*

1. *Le système $\left(\left(A - \frac{\lambda}{2}I\right), B\right)$ est stabilisable,*
2. *Le système $\left(\left(A - \frac{\lambda}{2}I\right), G\right)$ est détectable où $G^T G = Q$*

alors

1. *Il existe une solution unique de l'équation algébrique de Riccati*

$$\left(A - \frac{\lambda}{2}I\right)^T P + P\left(A - \frac{\lambda}{2}I\right) - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

telle que spec$\left(A - \frac{\lambda}{2}I - BR^{-1}B^T P\right) \subset \mathbb{C}_-$.

2. *Un contrôle optimal u^* existe il est donné par $u^*(t) = -R^{-1}B^T Px(t)$, et le coût minimal est*

$$J(u^*) = E\left(x_0^T Px_0\right) + \frac{1}{\lambda}trace\left(CC^T P\right)$$

3.3.2. Problème avec coût moyen

Considérons le système stochastique suivant

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t), u(t))dt + g(t, x(t), u(t))dw(t), \ t \geq t_0, \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur aléatoire indépendant du mouvement Brownien $w(t)$ pour tout, $t_0 \leq t \leq T$. On cherche le contrôle qui minimise la fonctionnelle

$$J(u) = \lim_{T \to +\infty} \sup E\left(\frac{1}{T}\int_0^T \Phi(t, x(t), u(t))dt\right)$$

On a le résultat suivant.

Proposition 51. *Supposons qu'il existe une fonction V(x) de classe* C^2 *et* $\eta \in \mathbb{R}$ *telle que*

$$\inf_{u \in U} \{\mathcal{A}_u V(x) + \Phi(x, u) - \eta\} = 0,$$

Soit $\widehat{u}(x)$ tel que

$$\widehat{u}(x) \in \arg \inf_{u \in U} \{\mathcal{A}_u V(x) + \Phi(x, u) - \eta\}$$

On note par R l'ensemble des stratégies u tel que

$$\lim_{T \to +\infty} \sup \frac{E(V(x_0) - V(x(T))}{T} = 0,$$

et tel que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\int_0^t e^{-\lambda s}\frac{\partial V}{\partial x_i}(x(s)g(s, x(s), u(s))dw_k(s)$$

est une martingale, et supposons que le contrôle $u^*(t) = \widehat{u}(x(t, u^*))$ est une stratégie de Markov admissible qui est dans R. Alors $J(u^*) \leq J(u)$ pour tout $u \in R$, et le coût minimal est $J(u^*) = \eta$.

Application au problème de régulateur linéaire

Soit le problème de minimiser la fonctionnelle

$$J(u) = \lim_{T\to+\infty} \sup E\left(\frac{1}{T}\int_0^{T-\lambda t} \left(x(t)^T Q x(t) + u^T(t) R u(t)\right) dt\right)$$

correspondant au système

$$\begin{cases} dx(t) = (Ax(t) + Bu(t))\, dt + C dw(t),\ t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où Q$\succcurlyeq$ 0, $R > 0$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, C est une fonction matricielle de type $n \times r$, et $(w(t))$ est un processus de Wiener r-dimensionnel.

On a la théorème suivant.

Théorème 52. *Supposons que:*

1. Le système (A, B) est stabilisable,

2. Le système (A, G) est détectable où $G^T G = Q$.

Alors

1. Il existe une solution unique de l'équation algébrique de Riccati

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

2. Un contrôle optimal u^* existe il est donné par $u^*(t) = -R^{-1}B^T Px(t)$, et le coût minimal est

$$J(u^*) = trace\left(CC^T P\right)$$

Preuve. Devoir au domicile ■

Exemple 53. *Considérons le problème de contrôle optimal*

$$\inf_{u\in\mathbb{R}} E\left(\int_0^T \frac{1}{\gamma} e^{-\lambda t} u^\gamma(t) dt + \lambda x(T)\right)$$

associé au sytème

$$dx(t) = (\mu - \rho x(t) - u(t))\, dt + \sigma dw(t),\ t>0$$
$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

L'équation de Bellman associée à ce problème est

$$\frac{\partial}{\partial s}V(s,x)+\inf_{u\in\mathbb{R}}\{\mathcal{A}_u V(x)+\Phi(x,u)\}=0$$

$$\frac{\partial t}{\partial s}V(t,x)+\inf_{u\in\mathbb{R}}\left\{(\mu-\rho x(t)-u(t))\,V_x+\frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx}+\frac{1}{\gamma}e^{-\lambda t}u^{\gamma}(t)\right\}=0$$

avec condition finale V(t,x)=$\lambda x(T)$. Le contrôle minimisant u* satisfait

$$V_x+e^{-\lambda t}u^{*\gamma-1}=0$$

alors $(u^*(t))^{\gamma-1}=e^{\lambda t}V_x$. *Soit V(t,x)=P(t)x+$\alpha(t)$, alors*

$$V_x=P\Longrightarrow (u^*)^{\gamma-1}=e^{\lambda t}P\Longrightarrow u^*(t)=e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}t}\,(P(t))^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Remplaçons dans l'équation de Bellman, on trouve

$$\dot{\alpha}(t)+\dot{P}(t)x+(\mu-\rho x)P(t)-u^*(t)P(t)+\frac{1}{2}\sigma^2(0)+\frac{1}{\gamma}e^{-\lambda t}u^{*\gamma}(t)=0$$

$\Longleftrightarrow$

$$\dot{\alpha}(t)+\dot{P}(t)x+(\mu-\rho x)P(t)-e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}t}\,(P(t))^{\frac{1}{\gamma-1}}\,P(t)+\frac{1}{\gamma}e^{-\lambda t}e^{\frac{\lambda\gamma}{\gamma-1}t}\,(P(t))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=0$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}\dot{\alpha}(t)+\mu P(t)+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}t}\,(P(t))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=0\\ \dot{P}(t)-\rho P(t)=0\end{cases}$$

alors P(t)=e$^{-\rho(T-t)}P(T)$*=*$\lambda e^{-\rho(T-t)}$*, 0*$\leq t\leq T$*. On a*

$$\dot{\alpha}(t)+\mu P(t)+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}t}\,(P(t))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=0$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \alpha(t) = \alpha(T) - \mu \int_t^T P(s)ds - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \int_t^T e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}s} \left(P(s)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
\Longleftrightarrow \quad & \alpha(t) = \alpha(T) - \mu \int_t^T \lambda e^{-\rho(T-s)}ds - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \int_t^T e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}s} \lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} e^{-\rho(T-s)\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
\Longleftrightarrow \quad & \alpha(t) = \alpha(T) - \mu\lambda \int_t^T e^{-\rho(T-s)}ds - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \int_t^T e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}s} e^{-\rho(T-s)\frac{\gamma}{\gamma-1}} ds \\
\Longleftrightarrow \quad & \alpha(t) = -\mu\lambda \int_t^T e^{-\rho(T-s)}ds - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \int_t^T e^{-\rho T\frac{\gamma}{\gamma-1}} e^{\frac{(\rho\gamma+\lambda)}{\gamma-1}s} ds \\
= \quad & -\left(\mu\lambda/\rho\right)\left(1 - e^{\rho(t-T)}\right) - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{\gamma - 1}{(\rho\gamma + \lambda)} e^{-\rho T\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(e^{\frac{(\rho\gamma+\lambda)}{\gamma-1}T} - e^{\frac{(\rho\gamma+\lambda)}{\gamma-1}t}\right) \\
= \quad & -\left(\mu\lambda/\rho\right)\left(1 - e^{\rho(t-T)}\right) - \lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} e^{-\rho\frac{\gamma}{\gamma-1}T} \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma(\rho\gamma + \lambda)} \left(e^{\frac{(\rho\gamma+\lambda)}{\gamma-1}T} - e^{\frac{(\rho\gamma+\lambda)}{\gamma-1}t}\right)
\end{aligned}$$

alors le coût minimal est

$$\begin{aligned}
J^* \quad &= \quad P(0)x_0 + \alpha(0) \\
&= \quad \lambda e^{-\rho T} x_0 - \left(\mu\lambda/\rho\right)\left(1 - e^{-\rho T}\right) - \lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma(\rho\gamma + \lambda)} \left(e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}T} - e^{-\rho\frac{\gamma}{\gamma-1}T}\right)
\end{aligned}$$