Théorie du contrôle stochastique

Dr. M. KADA

2021/2022

Table des matières

1. Introduction

Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'une commande ou contrôle. Un ordinateur dont les éléments interconnectés permettent à un utilisateur d'effectuer une série de commandes élémentaires, une voiture sur laquelle on agit avec les pédales d'accélérateur et de frein et que l'on guide avec le volant, un satellite ou une navette spatiale, une réaction chimique commandée en température, sont autant d'exemples de systèmes de contrôle,pouvant être modélisés et traités par cette théorie.

Le langage mathématique permet de définir précisément le concept de système de contrôle. La théorie du contrôle analyse les propriétés de ce système dans le but de l'amener d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critère. Les systèmes abordés sont multiples et leurs origines très diverses (mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie...).

L'objectif peut être aussi de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (**stabilisation**), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (**contrôle optimal**). Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle, l'Automatique, sont à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques.

Les systèmes stochastiques sont décrits par des équations différentielles stochastiques (EDS) qui différent des équations différentielles ordinaires (EDO) modélisant les processus déterministes. Contrairement aux EDO, les EDS contiennent deux termes : la dérive pour l'évolution du temps et la diffusion pour l'action du mouvement brownien. Du fait de la présence d'un mouvement brownien qui n'est pas dérivable par rapport au temps, les dérivées, présentes dans les EDO, sont remplacées dans les EDS par des différentielles (dx(t) pour l'état, dt pour le temps et dw(t) pour le mouvement brownien).

Le contrôle stochastique est une branche des mathématiques employée en ingénierie, qui permet de contrôler des objectifs économiques ou opérationnels dans un environnement incertain. Dans les problèmes de contrôle déterministe, la dynamique du système est modélisée par une équation différentielle ordinaire (EDO) par contre, dans le cas stochastique, l'évolution est décrite par un processus de diffusion solution d'une équation diférentielle stochastique (EDS).

La théorie de la commande optimale permet de déterminer la commande d'un système qui minimise (ou maximise) un critère de performance, éventuellement sous des contraintes pouvant porter sur la commande ou sur l'état du système. Cette théorie est une généralisation du calcul des variations. Elle comporte deux volets : le principe du maximum (ou du minimum, suivant la manière dont on définit l'hamiltonien) dû à Lev Pontriaguine et à ses collaborateurs du Steklov Institute de Moscou1, et l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, généralisation de l'équation de Hamilton-Jacobi, et conséquence directe de la programmation dynamique initiée aux États-Unis par Richard Bellman. La théorie de la commande optimale fait partie de l'automatique et des mathématiques appliquées (optimisation des processus). En tant que cette théorie généralise le calcul des variations, elle a également un champ d'application en physique mathématique, et les développements théoriques actuels rejoignent les mathématiques pures.

Ce cours a pour but de présenter les differents concepts de la théorie du contrôle pour les systèmes stochastiques. Il est principalement destiné aux étudiants du Master 2, option : Mathématiques appliquées de l'Université de Batna 2.

Le cours est constitué de trois Chapitres. Le premier chapitre porte sur les notions de base en probabilités, le processus d'Itô et les équations di érentielles stochastiques.

Le Chapitre 2 expose la stabilité stochastique. On présente les différents concepts de la stabilité stochastique. On présente la théorie de stabilité de Lyapunov pour les équations stochastiques non lineaires et pour les équations linéaires. Des critères pour la stabilité en moment d'ordre deux sont donnés en terme de l'équation de Lypunov stochastique.

Dans le chapitre 3, on présente les propriétés structurelles des systèmes stochastiques. On commence par introduire les concepts de la stabilisabilisabilité et la détectabilité, ensuite la contrôlabilité et l'observabilité. Des critères intéréssants sont donnés pour les systèmes linéaires et différents exemples sont présentés.

Le dernier chapitre porte sur le contrôle optimal stochastique. Nous considérons les problèmes à horizon finie et infinie. Nous présentons l'équation de la programmation dynamique stochastique correspendante à chaque cas, puis on applique sur le problème de régulateur linéaire stochastique.

Différents exemples sont donnés dans chaque chapitre pour illustrer la théorie.

2. Rappels sur le calcul stochastique

2.1. Processus stochastique

Dans cette section, nous discutons des processus stochastiques. Il s'agit de familles de variables aléatoires qui jouent un important rôle dans l'étude des phénomènes aléatoires.

Soit (Ω, F, P) une espace de probabilité.

Définition 1. *Soit I un ensemble d'indices non vide. On appelle processus stochastique une famille de variables aléatoires $\{X(t),\, t \in I\}$ indexée par t.*

- Si $l \subset N$, on dit que le processus est à temps discret.
- Si $l \subset IR$, on dit que le processus est à temps continu.

Définition 2. *Soit un espace (Ω, F, P). On appelle filtration une collection $(F_t, t \in I)$ croissante de sous-tribus de F. Donc, $F_t \subset F$ et $F_s \subset F_t$ si $s \leq t$.*

Le quadruplet $(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, P)$ sera appelé un espace de probabilité filtré.

Définition 3. *Un processus $(X(t), t \in I)$ est dit adapté à une filtration $(F_t, t \in I)$ si $X(t)$ est F_t-mesurable.*

Définition 4. *Les variables aléatoires $X(t) - X(s)$, $t > s \geq 0$, sont appelées des accroissements du processus (X(t))*

La filtration naturelle d'un processus $(X(t),\, t \in I)$ est $(F_t,\, t \in I)$ telle que $F_t = \sigma\{X(s),\, 0 \leq s \leq t\}$.

Définition 5. *Un processus $(X(t))$ est dit à trajectoires continues (ou simplement processus continu) si*

$$P(\{\omega \in \Omega,\ t \longmapsto X_t(\omega)\ est\ continue\}) = 1$$

Définition 6. *(Processus de Markov) Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit de Markov si pour tout* $t > s$ *, : : : : 0 et toute fonction borélienne et bornée* $f : IR - +IR$*, on a*

$$E(f(X(r))/F) = E(f(X(r))/X(s)) \ (presque\ surement)$$

C'est un processus sans mémoire car la transition de sent ne dépend que de $X(s)$. Elle ne tient pas compte de $X(u)$ pour $u < s$.

Définition 7. *(Temps d'arrêt) Un temps d'arrêt par rapport à une filtration* $(F_t)_{t\geq 0}$ *est une variable aléatoire* T *à valeur dans* $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *telle que* $\{T \leq t\} \in F_t$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

Définition 8. *(Processus de Wiener). Un processus de Wiener est un processus stochastique* $(W(t))_{t\geq 0}$ *tel que :*

1. $W(0) = 0$,
2. $(W(t))$ est à accroissements indépendants et stationnaires,
3. $W(t) \backsim N(0, 1)$,
4. $(W(t))$ est à trajectoires continues.

2.1.1. Intégrale stochastique (l'intégrale d'Itô).

Il s'agit d'une intégrale de la forme :

$$\int_{t_0}^{T} X(t)dW(t),$$

où $(w(t))$ est un processus de Wiener et $(X\ (t))_{t\geq 0}$ est un processus stochastique répondant à certains critères d'intégrabilité. En ingénierie financière, $(w(t))$ pourrait par exemple

représenter l'évolution du prix d'un actif dans le temps et $(w(t))$ la stratégie de transaction sur cet actif d'un investisseur. L'equation (1.1) est alors le gain réalisé à l'horizon T. La manipulation de cette forme d'intégrale est facilitée par J'utilisation de la formule d'Itô, faisant référence à son auteur, le mathématicien Kiyoshi Itô.

2.1.2. Propriétés de l'intégrale stochastique.

L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :

1. $\int_{t_0}^{T}(aX(t)+bY(t))\,dW(t) = a\int_{t_0}^{T}X(t)dW(t) + b\int_{t_0}^{T}Y(t)dW(t)$,
2. $E\left(\int_{t_0}^{T}X(t)dW(t)\right) = 0$,
3. $E\left(\int_{t_0}^{T}X(t)dW(t)\right)^2 = \left(\int_{t_0}^{T}E(X(t))^2dt)\right)$

2.1.3. Processus d'Itô

Soit L^1 l'ensemble des processus intégrables et L^2 l'ensemble des processus adaptés à la filtration (F_t) tels que : $\int_{t_0}^{T}E\left\|X(t)\right\|^2 dt < +\infty$.

Définition 9. *Un processus X est un processus d'Itô s'il existe x_0, U, V$\in L^1$ et $V \in L^2$ tels que :*

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t}U(s)ds + \int_{t_0}^{t}V(s)dW(s)$$

2.1.4. Equations différentielles stochastiques

Les équations différentielles sont des équations d'évolution du type

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{2.1}$$

Les équations différentielles stochastiques sont des généralisations des équations (2.1) où la dynamique déterministe d'évolution est perturbée par un terme aléatoire. On peut considérer que ce bruit est un processus gaussien généralement modélisé par un mouvement brownien $(w(t))_{t\geq 0}$, et une intensité de bruit $g(t;x(t))$:

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t)$$

2.1. Définitions et propriétés

Soit (Ω, F, p) un espace de probabilité complet. Soit $(w(t))_{t\geq 0}$ un processus de Wiener d-dimensionnel. Soit x_0 une variable aléatoire de carré intégrable et indépendante de $w(t)$, $t \geq 0$. On considère la filtration définie, pour tout t≥ 0, par $F_t = \sigma\left\{x_0, w(s);\ 0 \leq s \leq t\right\}$.

Soit $T > 0$. On considère deux fonctions $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ qui sont mesurables. On cherche à résoudre l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dw(t),\ t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le coefficient f s'appelle la dérive tandis que la matrice g s'appelle la matrice de diffusion.

Précisons tout d'abord ce que nous entendons par une solution de l'EDS (2.2).

Définition 2.1. *Une solution (forte) de l'EDS (2.2) est un processus x continu tel que :*

1/ x est mesurable ;

2/

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(r,x(r))dr + \int_0^t g(r,x(r))dw(r),\ 0 \leq t \leq T$$

On donne maintenant le théorème d'existence et d'unicité de la solution de l'équation (2.2).

Théorème 2.3.

Supposons qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour $t \in [0,T]$ et x, $y \in \mathbb{R}^n$, on a :

1. *condition de Lipschitz en espace :*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| + \|g(t,x) - g(t,y)\| \leq K\,\|x - y\|$$

2. *croissance linéaire :*

$$\|f(t,x)\| + \|g(t,y)\| \leq K\,(1 + \|x\|)$$

Supposons que $E\left(\|x_0\|^2\right) < +\infty$. Alors il existe une solution unique $x \in L^2$ de l'équation (2.2).

3. Stabilité stochastique

3.1. Introduction

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une généralisation de la notion d'équation différentielle prenant en compte un terme de bruit blanc. Les EDS permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion. Elles permettent aussi de traiter théoriquement ou numériquement des problèmes issus de la théorie des équations aux dérivées partielles. Les domaines d'application des EDS sont vastes :

– La modélisation de phénomènes de diffusion en physique (mécanique des fluides, géophysique, ...) : c'est à l'origine de la motivation de l'étude du mouvement brownien.

– Les mathématiques financières

– Les systèmes dynamiques aléatoires.

– Les modèles d'écoulements de polymères multi-échelles

En 1892, A.M. Lyapunov introduit le concept de la stabilité d'un système dynamique. La stabilité signifie l'insensibilité de l'état du système à de petits changements dans l'état initial ou les paramètres du système. Dans ce chapitre, nous allons présenté les divers types de stabilité pour une équation différentielle stochastique de dimension n.

3.2. Stabilité en probabilité

Considérons l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t), t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

On suppose que cette équation admet une solution unique $x(t)$ et pour simplifier ; on suppose que $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On suppose ausssi que $f(t, 0) = 0$ et $g(t, 0) = 0$, $\forall t \geq 0$. Alors $x(t) = 0$ est le point d'équilibre de l'équation (3.1).

Définition 10. *1. Le point d'équilibre du système (3.1) est stochastiquement stable en probabilité si, pour tout* $\varepsilon \gg 0$ *on a*

$$P\left\{\sup_{t\in[0,+\infty]} \|x(t)\| \geq \varepsilon\right\} = 0, \quad \|x_0\| < \delta$$

sinon il est instable.

2. Le point d'équilibre du système (3.1) est asymptotiquement stochastiquement stable s'il est stochastiquement stable et

$$P\left\{\lim_{t\to+\infty} \|x(t)\| = 0\right\} = 1, \quad \|x_0\| < \delta$$

3. Le point d'équilibre du système (3.1) est globalemment asymptotiquement stochastiquement stable s'il est stochastiquement stable et

$$P\left\{\lim_{t\to+\infty} \|x(t)\| = 0\right\} = 1, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Avant de donner le théorème de stabilité de Lyapunov, on donne la définition suivante.

Définition 11. *1. Soit V(x) une fonction scalaire continue définie sur le boule fermée*

$$\overline{B_r} = \{x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| \leq r\}, \ r > 0$$

V(x) est définie positive au sens de Lyapunov si $V(0) = 0$ *et V(x)>0,* $\forall x \neq 0$

2. *Soit V(t,x) une fonction scalaire continue définie sur* $[0, +\infty[\times \overline{B_r}$*. V est dite définie positive au sens de Lyapunov si V(t,0)=0 et il existe une fonction définie positive W(x) telle que*

$$V(t,x) \geq W(x) > 0, \ \forall t \neq 0$$

3. *Une fonction V(x) ou V(t,x) est définie négative si -V est définie positive.*

On a le théorème suivant de stabilité.

Définition 12. *1. Soit V(t,x) :*$[0,+\infty[\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *une fonction de Lyapunov telles que ses dérivés partielles* V_t, V_{x_i} *et* $V_{x_ix_j}$ *sont continues sur* $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^n/\{0\}$ *. Supposons que LV(t,x)*≤ 0 *pour tout* $(t,x)\in[0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$ *où*

$$LV(t,x)=V_t(t,x)+V_x(t,x)f(t,x)+\frac{1}{2}trace\left(g^T(t,x)V_{xx}(t,x)g(t,x)\right)$$

avec

$$V_t=\frac{\partial V}{\partial t},\ V_x=\left[\frac{\partial V}{\partial x_1}...\frac{\partial V}{\partial x_n}\right]\ et\ V_{xx}=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2V}{\partial x_12} & \cdots & \frac{\partial^2V}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2V}{\partial xn\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2V}{\partial x_n\partial x_n}\end{bmatrix}$$

alors l'origine est stable.

2. Si en plus LV est définie négative alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Remarque 13. *1. Si le système est autonome*

$$\begin{cases} dx(t)=f(x(t))dt+g(x(t))dw(t),t\geq 0\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

alors on peut construire une fonction de Lyapunov V(x). Si g vérifie

$$y^Tg^T(x)g(x)y\geq m(x)\left\|y\right\|^2,\ \text{x, y}\in B_r,\ \text{r>0}$$

où m(x) est positive alors la stabilité implique l'asymptotique stabilité.

2. Pratiquement, on utilise la condition suffisante suivante :

$$LV(t,x)\leq -kV(t,x),\ k>0,\ (t,x)\in[0,+\infty[\times\mathbb{R}^n,$$

pour montrer que LV est définie négative.

Exemple 14. *Considérons le système linéaire stochastique*

$$\begin{cases} dx(t)=ax(t)dt+\sigma x(t)dw(t);\ t\geq 0,\ a,\sigma\in\mathbb{R},\\ x(0)=x_0.\end{cases}$$

Considérons la fonction de Lyapunov V(x) $=|x|^r$ *, r*≥ 0*. Alors*

$$\begin{aligned}LV(x) &= axV'(x)+\frac{1}{2}\sigma^2x^2V_{xx}\\ &= arx\left|x\right|^{r-1}+\frac{1}{2}\sigma^2r(r-1)x^2\left|x\right|^{r-2}\\ &\leq ar\left|x\right|^r+\frac{1}{2}\sigma^2r(r-1)\left|x\right|^r\end{aligned}$$

si a<$\frac{\sigma^2}{2}$, on peut choisir 0<r<1-$\frac{2a}{\sigma^2}$ pour montrer que LV$\leq -kV$. Donc le système est globalement asymptotiquement stable.

Dans le cas où $\sigma = 0$ le système $\begin{cases} dx(t) = ax(t)dt \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ est stable si a<0. Donc le terme aléatoire ne change pas la stabilité dans ce cas.

Le système stochastique es stable pour a>0 tel que $a < \frac{\sigma^2}{2}$. Donc le terme $\sigma^2 x^2/2$ dans la formule de LV conduit à la stabilité.

Remarque 15. *La méthode de Lyapunov dépend du choix de la fonction de Lyapunov. Pour déterminer V(t,x); on peut , par exemple, résoudre l'équation LV=0 où l'inégalité LV$\leq$ 0 Le choix V(x)=x$^T Px$ où P est une matrice définie positive, nous donne*

$$LV = 2f(t,x)Cx + trace(g(t,x)g^T(t,x)C) \leq 0 \tag{3.2}$$

dans un voisinage de x=0 pour tout t$\geq$ 0.

3.3. Stabilité exponentielle presque sûre

On donne la définition de la stabilité presque sûre.

Définition 16. *Le point d'équilibre du système (3.1) est exponentiellement presque sûrement stable'il existe une constante α> 0 telle que*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{1}{t} \ln (\|x(t)\|) < -\alpha \ p.s.$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, où $\lim\limits_{t\to+\infty} \sup \frac{1}{t} \ln (\|x(t)\|)$ est l'exposant de Lyapunov de la solution x(t).

Remarque 17. *La relation (3.2) est équivalente à l'existence d'une constante α> 0 et $M > 0$ telle que*

$$\|x(t)\| \leq M \|x_0\| e^{-\alpha(t-t_0)} \ \ p.s.$$

On a le théorème suivant.

Théorème 18. *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov définie positive V(t,x(t)) et des constantes p>0,* $c_1 > 0$*,* $c_2 \in \mathbb{R}$ *et* $c_3 \geq 0$*, telles que*

$$\left\{ \begin{array}{c} c_1 \left\| x(t) \right\|^p \leq V(t, x(t)), \\ LV(t,x(t)) \leq c_2 V(t, x(t)), \\ \left\| \mathcal{B}Vx(t, x(t)) \right\|^2 \geq c_3 V^2(t, x(t)) \end{array} \right. ,$$

pour $t \geq 0$*,* $x \neq 0$*, où* $\mathcal{B}V(t, x(t)) = V_x(t, x(t)) g(t, x(t))$*. Alors*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup \frac{1}{t} \ln \left(\left\| x(t) \right\| \right) \leq \frac{2c_2 - c_3}{2p}, \text{ p.s. } \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

et le point d'équilibre du système (3.1) est exponentiellement presque sûrement stable si $c_3 > 2c_2$*.*

On a le résultat suivant.

Théorème 19. *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov définie positive V(t,x(t)) et des constantes p>0,* α*,* $\lambda \in \mathbb{R}^+$ *, telles que*

$$\alpha \left\| x(t) \right\|^p \leq V(t, x(t)), \; LV(t,x(t)) \leq -\lambda V(t, x(t)),$$

pour $t \geq 0$*,* $x \neq 0$*. Alors*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup \frac{1}{t} \ln \left(\left\| x(t) \right\| \right) \leq \frac{-\lambda}{p}, \text{ p.s. } \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

et le point d'équilibre du système (3.1) est presque sûrement exponentiellement stable .

3.4. Stabilité des moments

Définition 20. *1. Soit p>0. Le point d'équilibre est stable en moment d'ordre p si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\sup_{t \geq 0} E \left(\left\| x(t) \right\|^p \right) \leq \varepsilon,$$

pour tout x_0 *tel que* $\left\| x_0 \right\| < \delta$*.*

2. *Le point d'équilibre est asymptotiquement stable en moment d'ordre p s'il est stable et*
$$\underset{t\to+\infty}{lim} E\left(\|x(t)\|^p\right) = 0,$$
pour tout x_0 au voisinage de 0.
3. *Le point d'équilibre est exponentiellement stable en moment d'ordre p s'il existe $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $\delta > 0$ tels que*
$$E\left(\|x(t)\|^p\right) \leq c_1 \|x_0\|^p e^{-c_2(t-t_0)}$$
pour tout x_0 tel que $\|x_0\| < \delta$.

Dans le cas où $p = 1$ ou $p = 2$, on parle de la stabilité en moment d'ordre 1 ou la stabilité d'ordre 2.

Exemple 21. *Considérons le système*
$$dx(t) = ax(t)dt + \sigma x(t)dw(t), \ t \geq 0$$
on a
$$E\left|x(t)\right|^p = \left|x_0\right|^p \exp\left(p(a - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{p}{2}\sigma^2)\right)t, \ t \geq 0$$
Alors le point d'équilibre est exponentiellement stable ssi $a < \frac{1-p}{2}\sigma^2$.

Le théorème suivant illustre l'application des fonctions de Lyapunov pour montrer la stabilité en moment d'ordre p.

Théorème 22. *Une condition suffisante pour l'exponentielle stabilité en moment d'ordre p est l'existence d'une fonction V(t,x), définie sur $[0, +\infty[\times\mathbb{R}^n$ et continuement différentielle par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x et qui satisfait l'inégalité :*
$$c_1 \|x\|^p \leq V(t,x) \leq c_2 \|x\|^p, \ LV(t,x) \leq -c_3 \|x\|^p$$
pour des constantes positives c_1, c_2 et c_3.

Remarque 23. *Généralement, la stabilité exponentielle en moment d'ordre 2 n'implique pas la stabilité exponentielle presque sûre et la stabilité exponentielle presque sûre n'implique pas la stabilité exponentielle en moment d'ordre 2. Cependant, la stabilité exponentielle en moment d'ordre 2 implique la stabilité exponentielle presque sûre si on ajoute des conditions supplémentaires.*

On définit maintenant les notions de la stabilité en moyenne et la stabilité en moyenne quadratique.

Définition 24. 1. *On dit que le point d'équilibre du système (3.1) est stable en moyenne si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\sup_{t\geq 0} \|E(x(t))\| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } x_0 \text{ tel que } \|x_0\| \leq \delta$$

2. *On dit que le point d'équilibre du système (3.1) est stable en moyenne quadratique si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\sup_{t\geq 0} \left\|E(x(t)x^T(t))\right\| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } x_0 \text{ tel que } \|x_0\| \leq \delta$$

3.5. Stabilité des systèmes linéaires

Considérons l'équation linéaire homogène :

$$\begin{cases} dx(t) = A(t)x(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)x(t)dw_i(t), \ \mathrm{t} \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Dans cette section on donne des conditions de stabilité des systèmes linéaires. Soit $m(t) = E(x(t))$. On a

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= A(t)m(t), \\ m(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Alors la stabilité en moyenne de l'équation (3.3) est équivalente à l'étude de la stabilité de l'quation déterministe (3.4). La stabilité en moyenne quadratique de l'équation (3.3) est équivalente à la stabilité de l'équation matricielle déterministe

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + \sum_{i=}^{m} B_i(t)P(t)B_i^T(t) \\ P(t_0) &= x_0x_0^T \end{aligned}$$

On a le théorème suivant.

Théorème 25. *Supposons que les fonctions $A(t)$ et $B(t)$ sont bornée sur $[t_0, +\infty[$. Alors une condition nécéssaire pour la stabilité exponentielle en moment d'ordre 2 est que pour toute matrice symétrique définie positive et bornée $C(t)$ telle que $x^T C(t)x \geq k_1 \|x\|^2$, $k_1 > 0$, l'équation différentielle matricielle*

$$\frac{dP(t)}{dt} + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \sum_{i=}^{m} B_i^T(t)P(t)B_i(t) = -C(t) \qquad (3.5)$$

admet comme solution une matrice $P(t)$ qui admet les mêmes propriétés que $C(t)$.

Remarque 26. *Quand $B_i(t)$=0 pour tout i$\in$ $\{1, ..., m\}$, l'équation (3.5) se réduit à une équation de différentielle de Lyapunov qui donne un critère de la stabilité exponentielle pour les systèmes déterministes.*

Pour les systèmes à temps invariant, on a le résultat suivant.

Corollaire 27. *Si le système (3.3) est à temps invariant, une condition nécessaire pour la stabilité exponentielle en moment d'ordre 2 est que, pour toute matrice symétrique définie positive C, l'équation matriceille*

$$A^T P + PA + \sum_{i=}^{m} B_i^T P B_i = -C \qquad (3.6)$$

admet une solution symétrique définie positive.

Exemple 28. *Considérons le système*

$$\begin{cases} dx(t) = A(t)x(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)x(t)dw_i(t), \;\; t \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où A+$A^T = cI$ et $Bi = d_i I$, 1$\leq i \leq m$, c et d_i sont des constantes réelles.

Pour C=-$\left(c + \sum_{i=1}^{m} d_i^2\right)$, avec $\left(c + \sum_{i=1}^{m} d_i^2\right) < 0$, on peut vérifier que D=I est une solution pour l'équation de Lyapunov (3.6) associée à ce système. Donc le système est stable en moment d'ordre 2.

Exemple 29. *Considérons l'équation différentielle stochastique suivante*

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)x(t)dw(t), \ t \geq 0, \tag{3.7}$$

avec $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$, *w(t) est un mouvement brownien scalaire et*

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix},$$

Puisque AB=BA alors la solution de l'équation (3.7) est donnée par

$$\begin{aligned}
x(t) &= \exp\left(\left(A - \frac{B^2}{2}\right)t + Bw(t)\right)x_0 \\
&= \exp\left(\begin{bmatrix} (a-0.5b^2) & 0 \\ 0 & (a-0.5b^2) \end{bmatrix} t \times \exp\begin{bmatrix} 0 & bw(t) \\ bw(t) & 0 \end{bmatrix}\right)x_0 \\
&= \exp\left(a-0.5b^2\right)t\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{bw(t)}+e^{-bw(t)} & e^{bw(t)}-e^{-bw(t)} \\ e^{bw(t)}-e^{-bw(t)} & e^{bw(t)}+e^{-bw(t)} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \\
&= \exp\left(a-0.5b^2\right)t\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1^0\left(e^{bw(t)}+e^{-bw(t)}\right)+x_2^0\left(e^{bw(t)}-e^{-bw(t)}\right) \\ x_2^0\left(e^{bw(t)}+e^{-bw(t)}\right)+x_1^0\left(e^{bw(t)}-e^{-bw(t)}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln\|x(t)\| &= \ln\left\|\exp\left(a-0.5b^2\right)t\exp\begin{bmatrix} 0 & bw(t) \\ bw(t) & 0 \end{bmatrix}x_0\right\| \\
&= \ln\left(\exp\left(a-0.5b^2\right)t\left\|\exp\begin{bmatrix} 0 & bw(t) \\ bw(t) & 0 \end{bmatrix}x_0\right\|\right) \\
&\leq \ln\left(\exp\left(a-0.5b^2\right)t\right)+\ln\left(\exp\left\|\begin{bmatrix} 0 & bw(t) \\ bw(t) & 0 \end{bmatrix}x_0\right\|\right) \\
&= \left(a-0.5b^2\right)t+\left\|\begin{bmatrix} 0 & bw(t) \\ bw(t) & 0 \end{bmatrix}x_0\right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|x(t)\| &\leq \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\left(a-0.5b^2\right)t+\lim_{t\to+\infty}\frac{bw(t)}{t}\left\|\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}x_0\right\| \\
&= a-0.5b^2
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\ln\|x(t)\| &= \ln\left\|\exp\left(a-0.5b^2\right)t\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1^0\left(e^{bw(t)}+e^{-bw(t)}\right)+x_2^0\left(e^{bw(t)}-e^{-bw(t)}\right) \\ x_2^0\left(e^{bw(t)}+e^{-bw(t)}\right)+x_1^0\left(e^{bw(t)}-e^{-bw(t)}\right) \end{pmatrix}\right\| \\
&= \ln\left(\exp\left(a-0.5b^2\right)t\right)\left\|\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1^0\left(e^{bw(t)}+e^{-bw(t)}\right)+x_2^0\left(e^{bw(t)}-e^{-bw(t)}\right) \\ x_2^0\left(e^{bw(t)}+e^{-bw(t)}\right)+x_1^0\left(e^{bw(t)}-e^{-bw(t)}\right) \end{pmatrix}\right\| \\
&= \ln\left(\exp\left(a-0.5b^2\right)t\right)+\ln\left\|\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1\left(e^{bw(t)}+e^{-bw(t)}\right)+x_2\left(e^{bw(t)}-e^{-bw(t)}\right) \\ x_2\left(e^{bw(t)}+e^{-bw(t)}\right)+x_1\left(e^{bw(t)}-e^{-bw(t)}\right) \end{pmatrix}\right\| \\
&= \left(a-0.5b^2\right)t+\ln\frac{1}{2}\left(x_1\left(e^{bw(t)}+e^{-bw(t)}\right)+x_2\left(e^{bw(t)}-e^{-bw(t)}\right)\right)^2 \\
&\quad+\left(x_2\left(e^{bw(t)}+e^{-bw(t)}\right)+x_1\left(e^{bw(t)}-e^{-bw(t)}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

Comme on a $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{w(t)}{t}=0$, *alors* $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|x(t)\|=a-0.5b^2$ *p.s., alors le système (3.7) est exponentiellement presque sûrement stable si et seulement* $2a<b^2$.

Ainsi, si $0\leq 2a<b^2$, *l'équation déterministe* $dx(t)=A(t)x(t)dt$ *est instable tandis que l'équation stochastique 3.7) est exponentiellement presque sûrement stable.*

Etudions maintenant la stabilité en moment d'ordre 2 pour l'équation (3.7). L'équation de Lyapunov associée à ce système est

$$A^TP+PA+\sum_{i=}^{m}B_i^TPB_i=-C \tag{3.8}$$

Soient C=I et P=$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$. *L'équation de Lyapunov (3.8) est équivalente à*

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} aP_1 & aP_2 \\ aP_2 & aP_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} aP_1 & aP_2 \\ aP_2 & aP_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b^2P_3 & b^2P_2 \\ b^2P_2 & b^2P_1 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow\begin{bmatrix} P_3b^2+2aP_1 & P_2b^2+2aP_2 \\ P_2b^2+2aP_2 & P_1b^2+2aP_3 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{cases} P_3b^2+2aP_1=-1 \\ P_2b^2+2aP_2=0 \\ P_1b^2+2aP_3=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} P_3b^2+2aP_1=-1 \\ P_2b^2+2aP_2=0 \\ P_1b^2+2aP_3=-1 \end{cases}$$

Si 2a+b$^2 \neq$ 0, on obtient $P_2 = 0$ et $P_1(b^2-2a)+(2a-b^2)P_3 = 0$. D'où on trouve $P_1 = P_3$. Alors $P_1 = P_3 = \frac{-1}{2a+b^2}$. Donc la solution de l'équation de Lyapunov (3.8) est

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2a+b^2} & 0 \\ . & \frac{-1}{2a+b^2} \end{bmatrix}$$

P est définie positive ssi 2a+b$^2 < 0$. On déduit que l'equation (3.7) est stable ssi $2a < -b^2$.

Ainsi, si 0 $\geq 2a \geq -b^2$,l'équation déterministe $dx(t) = A(t)x(t)dt$ est exponentiellement stable tandis que l'équation stochastique (3.7) n'est pas exponentiellement stable en moment d'ordre 2. Enfin, on remarque que si $2a < -b^2$ alors $2a < b^2$, alors pour cet exemple la stabilité en moment d'ordre 2 implique la stabilité presque sûre.

On termine ce chapitre par le résultat suivant :

Proposition 30. *Considérons le système*

$$\begin{cases} dx(t) = Ax(t)dt + bc^T x(t)dw(t), \ t \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.9}$$

où A est une matrice d'ordre n et b, c$\in \mathbb{R}^n$.

Le système (3.9) est exponentiellement stable en moment d'ordre 2 ssi A est stable et $\int_0^{+\infty} \left(c^T e^{At} b\right)^2 < 1$.

Preuve. 1. On suppose que le système (3.9) est exponentiellement stable en moment d'ordre 2. Alors l'équation de Lyapunov

$$A^T P + PA + Cb^T Pbc^T = -I \tag{3.10}$$

admet une solution unique définie positive P. On a

$$A^T P + PA + Cb^T Pbc^T = -I$$

$$\begin{aligned} \iff \ & A^T P + PA = -(Cb^T Pbc^T + I) \\ \iff \ & A^T P + PA = -Q, \ Q = Cb^T Pbc^T + I \end{aligned}$$

comme $Q \succ 0$ alors A est stable.

Maintenant, définissons l'opérateur

$$G(Q)=\int_0^{+\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

Appliquons l'opérateur G sur l'équation (3.10), on obtient

$$G\left(A^T P+PA\right)+G\left(Cb^T Pbc^T\right)=-G(I_n)$$

Comme A est stable alors $G\left(A^T P+PA\right)=-P$. Ainsi P satisfait l'équation

$$-P+G\left(cb^T Pbc^T\right)=-G(I_n)$$

qui est équivalente à

$$\begin{aligned}-P+G\left(cb^T Pbc^T\right) &= -G(I_n) \Longleftrightarrow -b^T Pb+b^T G\left(cb^T Pbc^T\right)b=-b^T G(I_n)b \\ &\Longleftrightarrow -b^T Pb+\left(b^T Pb\right)b^T G\left(c^T c\right)b=-b^T G(I_n)b \\ &\Longrightarrow b^T Pb\left(b^T G\left(cc^T\right)b-1\right)=-b^T G(I_n)b\end{aligned}$$

1. Si $b=0$ alors $b^T G\left(cc^T\right)b=0<1$.
2. Si $b\neq 0$ alors

$$\Longrightarrow b^T G\left(cc^T\right)b-1=-b^T G(I_n)b/b^T Pb<0$$

ainsi

$$\int_0^{+\infty} b^T e^{A^T t} cc^T e^{At} b dt<1$$

d'où

$$\int_0^{+\infty}\left(c^T e^{At} b\right)^2 dt<1$$

2. Supposon maintenant que A est stable et $\int_0^{+\infty}\left(c^T e^{At}b\right)^2<1$. Soit

$$P=\frac{-b^T G(I_n)b}{b^T G\left(cc^T\right)b-1}G(cc^T)+G\left(I_n\right)$$

Alors P satisfait l'équation

$$-P+b^T PbG(cc^T)+G\left(I_n\right)=0$$

Comme A est stable, alors

$$-G\left(A^T P+PA\right)+b^T PbG(cc^T)+G\left(I_n\right)=0$$

ainsi

$$-A^T P+PA+cb^T Pbc^T+I_n=0$$

Alors A est exponeniellement stable en moment d'ordre 2. ■

3.6. Exercices

Exercice 1
Soient $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Etudier la stabilité en moment d'ordre 1 et en moment d'ordre 2 de l'équation

$$dx(t) = Ax(t)dt + bc^T x(t)dw(t), t > 0.$$

Exercice 2
Etudier la stabilité en moment d'ordre 1 et en moment d'ordre 2 de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = (c\dot{y}(t) + dy(t))\,\dot{w}(t)$$

où a, b, c et d sont des constantes réelles.

Exercice 3
Considérons le système :

$$\begin{aligned} dx(t) &= A_0 x(t)dt + B(t)dw(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

où A est une matrice donnée et w est un processus de Wiener scalaire. Supposons que la matrice A est stable et que $\int\limits_{t_0}^{+\infty} \|B(t)\|^2 dt < \infty$. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} E(\|x(t)\|)^2 = 0$.

Exercice 4
Etudier la stabilité en moment d'ordre deux de l'équation :

$$\ddot{y}(t) + (b + \sqrt{\beta}\xi_2(t))\dot{y}(t) + (a + \sqrt{\alpha}\xi_1(t))y(t) = 0$$

où α, β sont des constantes positives, $a, b \in \mathbb{R}$, et $\xi_{i,}(t)$ $1 \leq i \leq 2$, sont deux processus de bruit blanc scalaires.

Exercice 5
Considérons l'équation différentielle

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + \sum_{i=1}^{r} B_i x(t)dw_i(t), \ t \geq t_0 \tag{3.11}$$

où f est une fonction vectorielle sur $\mathbb{R}^n \times [t_0, +\infty[$ .telle que $\|f(x,t)\| \leq K\|x\|$,pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, +\infty[$, et B_i, 1$\leq$ i $\leq$ r, sont des matrices de type $n \times n$, telles que

$$\sum_{i=1}^{r} \|B_i x\|^2 \leq \lambda \|x\|^2 \text{ et } \sum_{i=1}^{r} \left\|x^T B_i x\right\|^2 \geq \rho \|x\|^4 , \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

1. Etudier la stabilité du point d'équilibre de l'équation (3.11).
2. Montrer que si $\lambda > 2(K+\rho)$, alors le point d'équilibre est presque surement instable.

Exercice 6

1. Considérons l'équation différentielle stochastique

$$dx(t) = Ax(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i x(t) dw_i(t), \ t \geq t_0, \ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

   où A et B sont des matrices et $w_i(t)$, $i = 1, ..., m$, sont des mouvement Browniens. On suppose que :

$$AB_i = B_i A \text{ et } B_i B_j = B_j B_i, \ i, \ j = 1, ..., m$$

   Montrer que

$$x(t) = \Phi(t) \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) dy(s) \right]$$

   où

$$\Phi(t) = \exp \left\{ \left(A - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} B_i^2 \right) (t - t_0) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t) \left(w_i(t) - w_i(t_0) \right) \right\}.$$

2. En utilisant la fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, où P est une matrice définie positive solution de l'équation

$$A^T P + PA + \sum_{i=1}^{m} B_i^T P B_i = -Q$$

   $Q \succ 0$, montrer que l'équation (**??**) est stable en moment d'ordre 2.

2. Supposons que $A + A^T = c_1 I$ et $B_i = d_i I$, $i = 1, ..., m$. Etudier la stabilité en moment d'ordre 2 de l'équation (**??**) dans ce cas.

Exercice 7
Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} dx(t) = (A_0(t)x(t) + f_0(t))\,dt + \sum\limits_{k=1}^{r} (A_k(t)x(t) + f_k(t))\,dw_k(t), \ t \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où $A_k(t)$ sont des fonctions matricielles bornées sur $\mathbb{R}^+$, et $f_k(t)$ sont des fonctions vectorielle bornées sur $\mathbb{R}^+$, $0 \leq k \leq r$.

1. Supposons que le système $(A_0, A_1, ..., A_r)$ est exponentiellement stable en moment d'ordre 2. Montrer que :

   i. Il existe $C \geq 1$, $\alpha > 0$ telles que :

$$E(\|x(t)\|^2 \leq C \left(e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\|^2 + \sum_{k=0}^{r} \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \|f_k(s)\|^2 \, ds \right), \ t \geq t_0 \geq 0$$

   ii. Il existe $\beta > 0$ tel que :

$$E \int_{t_0}^{+\infty} (\|x(t)\|^2 \leq \beta \left(\|x_0\|^2 + \sum_{k=0}^{r} \int_{t_0}^{+\infty} \|f_k(s)\|^2 \, ds \right), \ t \geq t_0$$

2. Etudier la stabilité en moment d'ordre 2 du système

$$\begin{cases} dx(t) = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1 & -a \end{bmatrix} x(t)dt + bx(t)dw(t), \quad t \geq t_0 \geq 0 \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

   où $a \in \mathbb{R}$ et b.

4. Propriétés structurelles des systèmes linéaires stochastiques

Dans ce chapitre on présente la version stochastique de quelques concepts de base dans la théorie de contrôle qui sont : Stabilisabilité, détectabilité, l'observabilité et la contrôlabilité.

4.1. Stabilisabilité et détectabilité des systèmes linéaires stochastiques

Considérons le système suivant

$$\begin{aligned} dx(t) &= (A_0(t)x(t) + B_0(t)u(t))dt + \sum_{k=1}^{r} A_k(t)x(t)dw_k(t), \ t \geq 0, \qquad (4.1) \\ y(t) &= C_0x(t) \end{aligned}$$

l'entré $u \in \mathbb{R}^m$ et la sortie $y \in \mathbb{R}^p$. Notons par $A = [A_0, A_1, ..., A_r]$.

Définition 31. *1. On dit que le système (4.1) est stabilisable s'il existe $F : R_+ \to \mathbb{R}^{m\times n}$ une fonction continue et borbée telle que l'origine du système en boucle fermé*

$$dx(t) = (A_0(t) + B_0(t)F(t))x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} A_k(t)x(t)dw_k(t), \ t \geq 0,$$

est exponentiellement stable en moment d'ordre 2.

2. On dit que le système (4.1) est détectable s'il existe $K : R_+ \to \mathbb{R}^{n\times p}$ une fonction continue et bornée telle que l'origine du système en boucle fermé

$$dx(t) = (A_0(t) + K(t)C_0(t))x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} A_k(t)x(t)dw_k(t), \ t \geq 0,$$

est exponentiellement stable en moment d'ordre 2.

Notation 32. *Si le système (4.1) est stabilisable on dit que (A,B) est stabilisable et quand le système (4.1) est détectable on dit que (C_0, A) est détectable.*

Pour lse systèmes à temps invariant, on a le résultat suivant. Soit H_n l'espace des matrices hermintiennes d'ordre n.

Proposition 33. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le système (4.1) est stabilsable.*
2. *L'équation matricielle*

$$A_0X + XA_0^* + B_0\Gamma + \Gamma^* B_0^* + \sum_{k=1}^{r} A_kXA_k^* + I_n = 0 \qquad (4.2)$$

admet une solution (X,Γ) $\in H_n \times \mathbb{R}^{m\times n}$, et si (X,Γ) est une solution de l'équation (4.2), avec X>0, alors le feedback stabilisant est donné par F= ΓX^{-1}.

Pour la détectabilité, on a la proposition suivante.

Proposition 34. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le système (4.1) est détectable.*
2. *L'équation matricielle*

$$A_0^*Y + YA_0 + GC_0 + C_0^*G^* + \sum_{k=1}^{r} A_k^*yA_k + I_n = 0 \qquad (4.3)$$

admet une solution (Y,G) $\in H_N \times \mathbb{R}^{n\times P}$, et si (Y,G) est une solution de l'équation (4.3), avec Y>0, alors l'injection stabilisante est donnée par K= $Y^{-1}G$.

Preuve. Montrons que $1 \Longrightarrow 2$. Supposons que le système (4.1) est détectable. Alors, il existe K telle que l'origine du système en boucle fermé

$$dx(t) = (A_0 + KC_0)x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} A_kx(t)dw_k(t),\ t \geq 0,$$

est exponentiellement stable en moment d'ordre 2. D'aprés le théorème de Lyapunov, on déduit que l'équation

$$(A_0 + KC_0)^T Y + Y(A_0 + KC_0) + \sum_{i=}^{m} B_i^T Y B_i = -I$$

admet une solution définie positive P. On a

$$(A_0 + KC_0)^T Y + Y(A_0 + KC_0) + \sum_{i=}^{m} B_i^T Y B_i = -I$$

$$\Longleftrightarrow \quad {A_0}^T Y + C_0^T K^T Y + Y A_0 + Y K C_0 + \sum_{i=}^{m} B_i^T Y B_i = -I$$

$$\Longleftrightarrow \quad {A_0}^T Y + Y A_0 + C_0^T K^T Y + Y K C_0 + \sum_{i=}^{m} B_i^T Y B_i = -I$$

Posons $G = YK$ alors

$${A_0}^T Y + Y A_0 + C_0^T G^T + G C_0 + \sum_{i=}^{m} B_i^T Y B_i = -I$$

et comme $G = YK$ alors $K = Y^{-1}G$.

Montrons que $2 \Longrightarrow 1$. Supposons que l'équation matricielle

$$A_0^T Y + Y A_0 + G C_0 + C_0^T G^T + \sum_{k=1}^{r} A_k^T Y A_k + I_n = 0 \tag{4.4}$$

admet une solution $(Y,G) \in H_N \times \mathbb{R}^{n \times P}$, avec $Y \succ 0$. So it$K = Y^{-1}G$. On a

$$A_0^T Y + Y A_0 + G C_0 + C_0^T G^T + \sum_{k=1}^{r} A_k^T Y A_k + I_n = 0$$

$$\Longleftrightarrow {A_0}^T Y + Y A_0 + C_0^T K^T Y + Y K C_0 + \sum_{i=}^{m} B_i^T Y B_i = -I$$

$$\Longleftrightarrow {A_0}^T Y + Y A_0 + C_0^T K^T Y + Y K C_0 + \sum_{i=}^{m} B_i^T Y B_i = -I$$

$$(A_0 + KC_0)^T Y + Y(A_0 + KC_0) + \sum_{i=}^{m} B_i^T Y B_i = -I$$

Alors, il existe K telle que l'origine du système en boucle fermé

$$dx(t) = (A_0 + KC_0)x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} A_k x(t) dw_k(t),\ \ t \geq 0,$$

est exponentiellement stable en moment d'ordre 2. On déduit que le système (4.1) est détectable. ■

La proposition suivante montre la dualité entre la stabilisabilité et la détectabilité.

Proposition 35. *1. Le système (A,B) est stabilisable ssi (B^T, A^T) est déctable, où $A^T = \left(A_0^T, A_1^T, ..., A_r^T\right)$.*

2. Le système (C,A) est détectable ssi (A^T, C^T) est stabilisable.

On termine cette section par le théorème suivant qui est une généralisation au cas stochastique d'un résultat connu en déterministe.

Théorème 36. *Supposons que*

1. *(C_0, A) est stochastiquement détectable,*
2. *L'équation différentielle*

$$\frac{d}{dt}K(t) + A_0^T(t)K(t) + K(t)A_0(t) + C_0(t)C_0^T(t) + \sum_{k=1}^{r} A_k^T(t)K(t)A_k(t) = 0$$

admet une solution bornée symétrique K(t) ≥ 0, t≥ 0.

Alors la solution du système (4.1) est exponentiellemnt stable en moment d'ordre 2.

Exemple 37. *Considérons le système*

$$dx(t) = A_0 x(t)dt + A_1(t)x(t)dw(t) + Bu(t)dt,$$

où $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *Montrons que le système* (A_0, A_1, B) *n'est pas stabilisable. Soit* $X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & y_2 & y_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$.

On a :

$$\begin{aligned} A_0X + XA_0^* &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & y_2 & y_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & y_2 & y_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 & 3x_3 & 3x_3 \\ 3x_3 & 6y_3 - 2y_2 & y_3 + 3z_3 \\ 3x_3 & y_3 + 3z_3 & 4z_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1XA_1^T &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & y_2 & y_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9x_1 & 6x_1 + 3x_2 & -3x_3 \\ 6x_1 + 3x_2 & 4x_1 + 4x_2 + y_2 & -2x_3 - y_3 \\ -3x_3 & -2x_3 - y_3 & z_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_0\Gamma + \Gamma^T B_0^T &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2f_1 & f_1 + f_2 & f_1 + f_3 \\ f_1 + f_2 & 2f_2 & f_2 + f_3 \\ f_1 + f_3 & f_2 + f_3 & 2f_3 \end{bmatrix}; \; f_1, , f_2, f_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alors l'équation (4.2) est équivalente à

$$\begin{bmatrix} 2x_1 & 3x_3 & 3x_3 \\ 3x_3 & 6y_3 - 2y_2 & y_3 + 3z_3 \\ 3x_3 & y_3 + 3z_3 & 4z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9x_1 & 6x_1 + 3x_2 & -3x_3 \\ 6x_1 + 3x_2 & 4x_1 + 4x_2 + y_2 & -2x_3 - y_3 \\ -3x_3 & -2x_3 - y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 2f_1 & f_1 + f_2 & f_1 + f_3 \\ f_1 + f_2 & 2f_2 & f_2 + f_3 \\ f_1 + f_3 & f_2 + f_3 & 2f_3 \end{bmatrix} + I_3 = 0$$

on obtient les systèmes suivants :

$$2f_1 + 11x_1 + 1 = 0,$$
$$f_1 + f_2 + 6x_1 + 3x_3 + 3x_2 = 0,$$
$$f_1 + f_3 = 0,$$

,

$$\begin{cases} 2f_2 + 4x_1 + 4x_2 - y_2 + 6y_3 = -1, \\ f_2 + f_3 - 2x_3 + 3z_3 = 0, \\ 2f_3 + 5z_3 = -1. \end{cases}$$

.

Si on suppose que le système (A_0, A_1, B) est stabilisable alors il existe $X > 0$ solution de l'équation (4.2). Ainsi $\mathrm{x}_1 > 0$ et $\mathrm{z}_3 > 0$.

D'autre part, on a

$$\begin{cases} 2f_1 + 11x_1 = -1 \Longrightarrow f_1 = \frac{-11}{2}x_1 - 1 < 0 \\ f_1 + f_3 = 0 \Longrightarrow f_1 = -f_3 \\ 2f_3 + 5z_3 = -1 \Longrightarrow f_3 = \frac{-5}{2}z_3 - 1 < 0 \end{cases}$$

. On déduit que $f_1 < 0$ et $f_3 < 0$, ce qui contrdit le fait que $f_1 = -f_3$. On conclut que le système (A_0, A_1, B) n'est pas stabilisable.

4.2. Observabilité stochastique

Soit H_n l'espace des matrices symétriques d'ordre n. On définit l'opérateur $L(t); H_n \longrightarrow H_n$ par

$$L(t)S = A_0(t)S + SA_0^T(t) + \sum_{k=1}^{r} A_k(t)SA_k^T(t)$$

l'opérateur L est appelé l'opérateur de Lyapunov associé à $A_0, A_1, ..., A_r$. L'opérateur $L^*, H_n \longrightarrow H_n$ est définit par

$$L^*(t)S = A_0^T(t)S + SA_0 + \sum_{k=1}^{r} A^T(t)SA_k(t)$$

On définit dans l'espace H_n l'opérateur d'évolution T_F

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}T_F(t,t_0) = L_F(t)T_F(t,t_0), \\ T_F(t,t_0) = I \end{cases}$$

où $L_F(t)$ est définit par :

$$L_F(t)S = (A_0 + BF)\,S + S\,(A_0 + BF)^T + \sum_{k=1}^{r} A_k^T(t) S A_k(t)$$

Définition 38. *On dit que le système (4.1) est observable s'il existe $\tau > 0$, $\beta > 0$ tel que*

$$\int_t^{t+\tau} T^*(s,t) C_0^T(s) C_0(s) ds \geq \beta I, \forall t \geq 0,$$

Dans le cas invariant on a les résultats suivants.

Proposition 39. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le système (4.1) est observable,*
2. *il existe $\tau > 0$ tel que*
$$\int_0^{\tau} e^{L^* s} C_0^T C_0 ds > 0,$$
3. *Il existe $\tau > 0$ tel que $Z(\tau) > 0$, où Z(t) est la solution du problème à valeur initiale :*
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} Z(t) = L^* Z(t) + C_0^T C_0, \ t > 0, \\ Z(0) = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Preuve. Le système (4.1) est observable si et seulement s'il existe τ>0 tel que

$$\int_t^{t+\tau} T^*(s,t) C_0^T(s) C_0(s) ds \geq \beta I, \forall t \geq 0,$$

Dans le cas invariant, les opérateurs L et L* sont donnés par :

$$\begin{aligned} L^* S &= A_0^T S + S A_0 + \sum_{k=1}^{r} A_k^T S A_k \\ LS &= A_0 S + S A_0^T + \sum_{k=1}^{r} A_k S A_k^T \end{aligned}$$

Dans ce cas l'opérateur d'évolution T est défini par l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} S(t) = LS(t)$$

Il est donné par $T(t, t_0) = e^{L(t-t_0)}$. Alors le système (4.1) est observable si et seulement s'il existe $\tau>0$ tel que

$$\int_t^{t+\tau} e^{L^*(s-t)} C_0^T C_0 ds \geq \beta I, \forall t \geq 0,$$

et comme

$$\int_t^{t+\tau} e^{L^*(s-t)} C_0^T C_0 ds = \int_0^{\tau} e^{L^T s'} C_0^T C_0 ds'$$

Alors le système (4.1) est observable si et seulement s'il existe $\tau>0$ tel que

$$\int_0^{\tau} e^{L^*(s-t)} C_0^T C_0 ds > 0.$$

Montrons maintenant que (2)$\Longleftrightarrow$ (3).

La solution du système

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} Z(t) = L^* Z(t) + C_0^T C_0, \; t > 0, \\ Z(0) = 0 \end{cases}$$

est donnée par $Z(t) = \int_0^t e^{L^* s} C_0^T C_0 ds$. Donc il existe $\tau > 0$ tel que $Z(\tau) > 0$ ssi il $\tau > 0$ tel que $\int_0^{\tau} e^{L^* s} C_0^T C_0 ds > 0$. ■

Remarque 40. *L'équation (4.5) peut être écrite d'une manière équivalente comme suit*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} Z(t) = A_0^T Z(t) + Z(t) A_0 + \sum\limits_{k=1}^{r} A_k^T Y(t) A_k + C_0^T C_0, \; t > 0, \\ Z(0) = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

On termine cette section par le corollaire suivant.

Corollaire 41. *Supposons que $(C_0, A_0, A_1, ..., A_r)$ est observable et que l'équation algébrique*

$$A_0^T S + S A_0 + \sum_{k=1}^{r} A_k^T S A_k + C_0^T C_0 = 0 \tag{4.7}$$

admet une solution $X \geq 0$. Alors

1. *Le système* $(A_0, A_1, ..., A_r)$ *est exponentiellement stable en moment d'ordre 2,*
2. *X>0,*
3. *L'équation (4.7) admet une solution unique définie positive.*

Exemple 42. *Soient* $A_0 = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_1 = \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. *Etudions la détectabilité du système* (C, A_0, A_1). *Soit* $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}$.

   On a

$$A_0^T Y + Y A_0 + G C_0 + C_0^T G^T + A_1^T Y A_1 + I_n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [g_1, g_2] + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha y_1 & 2\alpha y_2 \\ 2\alpha y_2 & 2\alpha y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta^2 y_1 & \beta^2 y_2 \\ \beta^2 y_2 & \beta^2 y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2g_1 + 1 & g_2 \\ g_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2g_1 + 2\alpha y_1 + \beta^2 y_1 + 1 = 0 \\ g_2 + 2\alpha y_2 + \beta^2 y_2 = 0 \\ 2\alpha y_3 + \beta^2 y_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_1 = (-1 - 2g_1) \,/\, (2\alpha + \beta^2) \\ y_2 = -g_2 / \, (2\alpha + \beta^2) \\ y_3 = \frac{-1}{2\alpha + \beta^2} \end{cases}$$

   On a

$$-1 - 2g_1 < 0 \Longleftrightarrow -1 < 2g_1 \Longleftrightarrow \frac{-1}{2} < g_1$$

   Ainsi pour $G = [g_1, 0]$ *avec* $\frac{-1}{2} < g_1$, *l'equation (4.3) admet une solution définie positive* Y *si* $2\alpha + \beta^2 < 0$. *Alors le système* (C, A_0, A_1) *est détectable si* $2\alpha + \beta^2 < 0$.

2. *Etudions maintenant l'observabilité du système* (C, A_0, A_1). *L'équation (4.5) correspondante à ce système est ;*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Z(t) = A_0^T Z(t) + Z(t)A_0 + \sum\limits_{k=1}^{r} A_k^T Z(t) A_k + C^T C, \ t > 0, \\ Z(0) = 0 \end{cases}$$

Soit $Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_2(t) & z_3(t) \end{bmatrix}$. *On obtient le système suivant*

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) & \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_2(t) & \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha z_1(t) & 2\alpha z_2(t) \\ 2\alpha z_2(t) & 2\alpha z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta^2 z_1(t) & \beta^2 z_2(t) \\ \beta^2 z_2(t) & \beta^2 z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ Z(0) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 2\alpha z_1(t) + \beta^2 z_1(t) + 1 \\ \dot{z}_2(t) = 2\alpha z_2(t) + \beta^2 z_2(t) \\ \dot{z}_3(t) = 2\alpha z_3(t) + \beta^2 z_3(t) \\ z_1(0) = z_2(0) = z_3(0) = z_4(0) = 0 \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \dot{z}_3(t) &= 2\alpha z_3(t) + \beta^2 z_3(t) \\ &\Longleftrightarrow \dot{z}_3(t) = \left(2\alpha + \beta^2\right) z_3(t) \\ &\Longrightarrow z_3(t) = e^{\left(2\alpha+\beta^2\right)t} z_3(0) = 0 \end{aligned}$$

Alors la solution du système (4.5) n'est pas définie positive, donc le système (C, A_0, A_1) *n'est pas observable.*

4.3. Contrôlabilité stochastique

Dans cette section on introduit la notion de la contrôlabilité stochastique.

Définition 43. *On dit que le système (4.1) est contrôlable s'il existe* $\tau > 0$ *tel que*

$$\int_0^\tau e^{Lt} B B^T dt > 0,$$

Comme dans le cas déterministe, il existe une relation de dualité entre la contrôlabilité et l'observabilité dans le cas stochastique. On a le résultat suivant.

Proposition 44. *Le système $(A_0, A_1, ..., A_r, B)$ est contrôlable ssi le système $(B^T, A_0^T, A_1^T, ..., A_r^T)$ est observable.*

En utilisant cette relation de dualité et les résultats de la section précédente, on obtient le résultat suivant.

Proposition 45. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le système $(A_0, A_1, ..., A_r, B)$ est contrôlable,*
2. *Il existe $\tau > 0$ tel que $Z(\tau) > 0$, où $Z(t)$ est la solution du problème à valeur initiale :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Y(t) = LY(t) + BB^T, \ t > 0, \\ Y(0) = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

Remarque 46. *L'équation (4.8) peut être écrite d'une manière équivalente comme suit*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Y(t) = A_0Y(t) + Y(t)A_0^T + \sum\limits_{k=1}^{r} A_kY(t)A_k^T + BB^T, \ t > 0, \\ Y(0) = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

Le corollaire suivant donne la relation entre la contrôlabilité du système $(A_0, A_1, ..., A_r, B)$ et la contrôlabilité des paires (A_k, B), $1 \leq k \leq r$.

Proposition 47. *S'il existe $k \in \{1, ..., r\}$ tel que la paire (A_k, B) est contrôlable alors le système $(A_0, A_1, ..., A_r, B)$ est contrôlable.*

L'inverse de ce corollaire n'est pas toujours vérifié. Pour n=2 et r=1 et m=1, on montrera dans la proposition suivante que l'inverse est vérifié dans ce cas.

Proposition 48. *Soient $A_0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Si (A_0, B) et (A_1, B) ne sont pas contrôlables, alors le système (A_0, A_1, B) n'est pas contrôlable.*

Preuve. Supposons que (A_0, B) et (A_1, B) ne sont pas contrôlables. D'aprés le critère de Kalman, on a :

$$\begin{aligned}
(A_0, B) \text{ n'est pas contrôlable } &\Longleftrightarrow rang(B, A_0B) < n \\
&\Longrightarrow \det\left[B, A_0B\right] = 0 \\
&\Longrightarrow \begin{vmatrix} b_1 & ab_1 + bb_2 \\ b_2 & cb_1 + db_2 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Longrightarrow b_1\left(cb_1 + db_2\right) - b_2\left(ab_1 + bb_2\right) = 0
\end{aligned}$$

On obtient

$$b_1b_2\left(d - a\right) = bb_2{}^2 - cb_1{}^2 \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
(A_1, B) \text{ n'est pas contrôlable } &\Longleftrightarrow rang(B, A_1B) < n \\
&\Longrightarrow \det\left[B, A_1B\right] = 0 \\
&\Longrightarrow \begin{vmatrix} b_1 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ b_2 & \gamma b_1 + \delta b_2 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Longrightarrow b_1\left(\gamma b_1 + \delta b_2\right) - b_2(\alpha b_1 + \beta b_2) = 0
\end{aligned}$$

On obtient

$$b_1b_2\left(\delta - \alpha\right) = \beta b_2{}^2 - \gamma b_1{}^2 \tag{4.11}$$

Supposons que le système (A_0, A_1, B) est contrôlable. Alors il existe une solution définie positive de l'équation (4.8). Soit $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_2(t) & y_3(t) \end{bmatrix}$, alors

$$\begin{aligned}
& A_0Y(t) + Y(t)A_0^T + A_1Y(t)A_1^T + BB^T \\
= & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T \\
& + \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}^T \\
= & \begin{bmatrix} 2ay_1 + 2by_2 & ay_2 + by_3 + cy_1 + dy_2 \\ ay_2 + by_3 + cy_1 + dy_2 & 2cy_2 + 2dy_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} b_1^2 + \alpha\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) + \beta\left(\alpha y_2 + \beta y_3\right) & \gamma\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) + \delta\left(\alpha y_2 + \beta y_3\right) + b_1b_2 \\ \alpha\left(\gamma y_1 + \delta y_2\right) + \beta\left(\gamma y_2 + \delta y_3\right) + b_1b_2 & b_2^2 + \gamma\left(\gamma y_1 + \delta y_2\right) + \delta\left(\gamma y_2 + \delta y_3\right) \end{bmatrix}$$

Ainsi (4.8) est équivalente à

$$\begin{cases} \quad \frac{d}{dt}y_1(t) = 2ay_1(t) + 2by_2(t) + b_1^2 + \alpha\left(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\right) + \beta\left(\alpha y_2(t) + \beta y_3(t)\right), \ t > 0, \\ \frac{d}{dt}y_2(t) = \left(c + \alpha\gamma\right) y_1(t) + \left(a + d + \gamma\beta + \alpha\delta\right) y_2(t) + \left(b + \delta\beta\right) y_3(t) + b_1 b_2, \\ \quad \frac{d}{dt}y_3(t) = 2cy_2(t) + 2dy_3(t) + b_2^2 + \gamma\left(\gamma y_1(t\grave{a} + \delta y_2(t)\right) + \delta\left(\gamma y_2(t) + \delta y_3(t)\right) \\ y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0 \end{cases}$$

or

$$\frac{d}{dt}y_1(t) = \left(2a + \alpha^2\right) y_1(t) + 2\left(b + \alpha\beta\right) y_2(t) + \beta^2 y_3(t) + b_1^2, \ t > 0, \ y_1(0) = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{d}{dt}y_2(t) = \left(c + \alpha\gamma\right) y_1(t) + \left(a + d + \gamma\beta + \alpha\delta\right) y_2(t) + \left(b + \delta\beta\right) y_3(t) + b_1 b_2, \ y_2(0) = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{dt}y_3(t) = \gamma^2 y_1(t) + 2\left(c + \delta\gamma\right) y_2(t) + \left(2d + \delta^2\right) y_3(t) + b_2^2, \ y_3(0) = 0 \quad (4.14)$$

1. Si $b_1 \neq 0$ et $b_2 = 0$, on obtient des équations (4.10) et (4.11)

$$\begin{aligned} cb_1^2 &= 0 \Longrightarrow c = 0, \\ \gamma b_1^2 &= 0 \Longrightarrow \gamma = 0 \end{aligned}$$

alors l'équation (4.14) est équivalente à

$$\frac{d}{dt}y_3(t) = \left(2d + \delta^2\right) y_3(t), \ y_3(0) = 0$$

ainsi $y_3(t) = 0$, $t \geq 0$.

2. Si $b_2 \neq 0$ et $b_1 = 0$, on obtient des équations (4.10) et (4.11)

$$\begin{aligned} bb_2^2 &= 0 \Longrightarrow b = 0, \\ \beta b_2^2 &= 0 \Longrightarrow \beta = 0 \end{aligned}$$

alors l'équation(4.12) est équivalente à

$$\frac{d}{dt}y_1(t) = \left(2a + \alpha^2\right) y_1(t), \ y_1(0) = 0$$

ainsi $y_1(t) = 0$, $t \geq 0$.

3. Supposons maintenant que $b_2 \neq 0$ et $b_1 \neq 0$. En utilisant les équations (4.10) et (4.11) on peut montrer que $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ satisfait (4.12)

$$\overline{x}(t) = \frac{b_1}{b_2}\overline{y}(t), \ \overline{z}(t) = \frac{b_2}{b_1}\overline{y}(t)$$

où $\overline{y}(t)$ est la solution de l'équation

$$\frac{d}{dt}\overline{y}(t) = \left(\frac{(c+\alpha\gamma)}{b_2}b_1 + (a+d+\gamma\beta+\alpha\delta) + (b+\delta\beta)\frac{b_2}{b_1}\right)\overline{y}(t)+b_1b_2, \quad \overline{y}(0) = 0$$

Comme la solution du système (4.12) est unique, alors ($\overline{x}$,$\overline{y}$,$\overline{z}$) est l'unique solution de ce système. Mais

$$\overline{x}(t)\overline{z}(t) - \overline{y}(t)^2 = 0, \text{ pour tout } t \geq 0,$$

alors $detY(t) = 0$, donc $Y(t)$ n'est pas définie positive, donc le système (A_0, A_1, B) n'est pas contrôlable. ■

Dans l'exemple suivant on va montré qu'on peut avoir un système (A_0, A_1, B) contrôlable tandis que les paires (A_0, B) et (A_1, B) ne sont pas contrôlables.

Exemple 49. *Considérons le système*

$$dx(t) = A_0x(t)dt + A_1(t)x(t)dw(t) + Bu(t)dt,$$

où $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a

$$rang \begin{pmatrix} B & A_1B & {A_1}^2B \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

et

$$rang \begin{pmatrix} B & A_0B & {A_0}^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2,$$

alors les systèmes (A_0, B) et (A_1, B) ne sont pas contrôlables.

Soit $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_2(t) & y_4(t) & y_5(t) \\ y_3(t) & y_5(t) & y_6(t) \end{bmatrix}$. *L'équation (4.8). correspondante à ce* *système est*

$$\begin{cases} dy_1(t) = 11y_1(t) + 1 \\ dy_2(t) = 3y_2(t) + 6y_1(t) + 3y_3(t) + 1 \\ dy_3(t) = 1 \\ dy_4(t) = -y_4(t) + 6y_5(t) + 4y_1(t) + 4y_2(t) + 1 \\ dy_5(t) = 3y_6(t) - 2y_3(t) + 1 \\ dy_6(t) = 5y_6(t) + 1 \\ y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = y_6(0) \end{cases}$$

La solution de ce système est

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{1}{11}\left(e^{11t} - 1\right), \ y_2(t) = \frac{3}{44}e^{11t} + \frac{5}{12}e^{3t} - t - \frac{16}{33}, \\ y_3(t) = t, \ y_6(t) = \frac{1}{5}\left(e^{5t} - 1\right) \\ y_5(t) = \frac{3}{25}\left(e^{5t} - 1\right) - t^2 + \frac{2}{5}t, \ y_6(t) = \frac{1}{5}\left(e^{5t} - 1\right) \end{cases}$$

et $y_4(t)$ *admet la forme*

$$y_4(t) = \frac{17}{132}e^{11t} + \alpha_1 e^{5t} + \alpha_2 e^{3t} + \alpha_3 e^{-t} + \alpha_4 t^2 + \alpha_5 t + \alpha_6$$

Comme il existe $t \geq 0$ *tel que Y(t)>0 alors le système* (A_0, A_1, B) *est contrôlable.*

Remarque 50. *Dans cet exemple on a montré que* (A_0, A_1, B) *est contrôlable, et dans l'exemple (26) on a montré qu'il n'est pas stabilsable. Donc on conclut que la contrôlabilité stochastique n'implique pas la stabilisation stochastique.*

4.4. Exercices

Exercise 51. *Considérons le système*

$$\begin{aligned} dx(t) &= -\frac{1}{2}A_0 x(t)dt + \beta A_1 dw(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \qquad ((1))$$

où $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

i. Donner les valeurs de β pour lesquelles le système (C, A_0, A_1) est détectable.

ii Donner les valeurs de β pour lesquelles le système

$$dx(t) = \left(-\frac{1}{2}A_0x(t) + Bu(t)\right)dt + \beta A_1 dw(t)$$

est stabilisable.

Exercise 52. *Considérons le système :*

$$\begin{cases} dx(t) = (Ax(t) + Bu(t))\,dt + A_1x(t)dw(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

,

1/ Montrer que si $(A, A_{1,}B)$ est stabilisable alors (A, B) est stabilisable.
2/ Etudier la stabilisabilité du système

$$\begin{cases} dx_1(t) = x_2(t)dt + ax_1(t)dw(t) \\ dx_1(t) = -x_1(t)dt + u(t)dt + bx_2(t)dw(t) \\ x_1(0) = x_0^1,\ x_2(0) = x_0^2 \end{cases}$$

Exercise 53. *Considérons le système :*

$$\begin{cases} dx(t) = (Ax(t) + Bu(t))\,dt + A_1x(t)dw(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

,

1/ Montrer que si (A, B) est contrôlable alors $(A, A_{1,}B)$ est contrôlable.
2/ Supposons que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Etudier la controlabilité et la stabilisabilité du système $(A, A_{1,}B)$.

Considérons le système :

$$\begin{aligned} dx(t) &= (Ax(t) + bu(t))\,dt + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i B_i x(t) dw_i(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

où A est une matrice d'ordre n et b_i et c_i, $i \in \{1, ..., m\}$, sont des vecteurs de dimension n.

Montrer que le système $(A, b, b_1, ..., b_m)$ est stabilisable ssi:

1. (A, b) est stabilisable.
2. $\sum_{i=1}^{m} B_i^T P B_i < Q$, où P est la solution de l'équation matricielle

$$A^T P + PA + Pbb^T P + \sum_{i=1}^{m} B_i^T P B_i = -Q$$

3. Etudier la stabilisabilité du système

$$\begin{cases} dx_1(t) = x_2(t)dt + ax(t)dw(t) \\ dx_2(t) = x_1(t)dt + u(t)dt + bx(t)dw(t) \end{cases}$$

5. Contrôle optimal

Les problèmes d'optimisation prennent leur essence en la volonté permanente chez l'Homme de trouver la solution optimale à ses difficultés. Que ce soit dans le monde de la finance, de l'industrie, ou encore de la santé, l'intérêt est souvent porté l'optimisation des systèmes qui évoluent dans le temps : on parle de systèmes dyna.miques. Une réalité à laquelle on est très souvent confronté dans la pratique, est celle de l'incertitude. En effet, imaginons un industrie ! qui pour obtenir un rendement efficient, souhaite toujours ajuster sa production en fonction de la demande. À cause de la présence d'incertitudes sur le marché, la demande se traduit donc par un mouvement aléatoire que l'industriel ne peut malheureusement contrôler. Ainsi, la question qui se pose est celle de savoir quelle stratégie de production l'industriel doit-il entreprendre pour atteindre son objectif qui est de minimiser ses pertes. Un tel problème est un problème de contrôle optimal stochastique. Évidemment, la situation pourrait se complexifier si des contraintes telles la non rupture de stocks ou de la production s'imposent On dira dans ce cas que le problème est avec contrainte. Bien que la théorie du contrôle optimal remonte aux années 50, Bellman fût le premier à s'intéresser à l'aspect stochastique en 1958. Cependant, on n'y retrouvait pas le type d'équation différentielle d'Itô. Pour mieux comprendre et résoudre les problèmes de contrôle optimal tels celui de l'industriel ci-dessus, nous présentons ce chapitre les méthodes bien connues de résolution du problème de contrôle optimal stochastique.

5.1. Exemples de problèmes de contrôle optimal stochastique

Nous présentons dans cette section deux pratiques de contrôle optimal intervenant en finance.

5.1.1. Allocation de portefeuille

On considère un marché financier avec un actif sans risque de processus de prix S_0 strictement positif représentant le compte d'´epargne et n actifs risqués de processus de prix S représentant des actions.

Soit un investisseur ou agent qui investit à toute date t dans ces actifs, avec une quantité αt dans les n actifs risqués. En notant par $X(t)$ sa richesse, la quantité investie dans l'actif sans risque à la date t est $(X_t(t)-\alpha t.S(t))/S^0(t)$. Son processus de richesse autofinançante évolue selon :

$$dX(t) = (X(t) - \alpha t.S(t))\frac{dS^0(t)}{S^0(t)} + \alpha t dS(t).$$

Le contrôle est le processus α à valeurs dans A sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Le problème d'allocation de portefeuille est de choisir quel est le meilleur investissement dans ces actifs dans un contexte incertain. Deux modélisations sont couramment utilisées pour représenter le comportement des individus et investisseurs : le critère d'espérance d'utilité et le critère moyenne-variance.

5.1.2. Modèles d'investissement irréversible d'une firme

On considère une firme produisant un bien (électicité, pétrole, ...). Elle peut augmenter sa capacité de production $X_t t$ en transférant du capital à partir d'un autre secteur d'activité. L'´evolution contrôlée de sa capacité de production évolue alors selon :

$$dX(t) = X(t)(-\delta dt + \sigma dWt) + \alpha t dt.$$

$\delta \geq 0$ est le taux d'epréciation de la production, $\sigma > 0$ sa volatilité, $\alpha t dt$ est le nombre d'unités de capital acquis par la firme à un coùt $\lambda \alpha t dt$, $\alpha > 0$ s'interprétant comme un facteur de conversion d'un secteur d'activité à l'autre. Le contrôle α est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. C'est un modéle d'irréversibilité de l'expansion du capital de la firme. La fonction de profit de la firme est une fonction Π de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, concave, croissante. Le problème d'optimisation de la firme est donc :

$$\sup_{\alpha} E\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}(\Pi x(t) - \lambda \alpha(t) dt\right)$$

5.2. Contrôle optimal des systèmes déterministes

Considérons le système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 = y \end{cases}$$

et le critère appelé fonction coût :

$$J_{t_1}(x_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t))dt + G(t_1, x(t_1))$$

où G, J sont des foctions de classe C^1. Si $t_1 = +\infty$, la fonction coût est donnée par :

$$J_{t_1}(x_0, u) = \int_{t_0}^{+\infty} g(t, x(t), u(t))dt$$

Le problème de contrôle optimal consiste à trouver un contrôle $\hat{u}(.)$ tel que pour tout contrôle admissible $u(.)$ on a

$$J_{t_1}(x_0, \hat{u}) \leq J_{t_1}(x_0, u)$$

Lorsque t_1 est fini, le problème de contrôle optimal est dit en horizon fini, l'orsque $t_1 = +\infty$ on parle d'optimisation en horizon infini.

5.2.1. Principe de maximum de pontryaguine

Soient λ_1, $\lambda_2, ..., \lambda_n$ les multiplicateurs de Lagrange et soit

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)^T$$

On définit le Hamiltonien par :

$$H(t, x(t), u(t), \lambda) = g(t, x(t), u(t)) + \lambda^T f(t, x(t), u(t))$$

On a le théorème suivant

Théorème 54. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour que J ait un extremum sous la contrainte*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 = y \end{cases}$$

sont

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \ i = 1, ..., n \ \text{(équation adjointe)} \\ \lambda_i(t_1) = \frac{\partial G}{\partial x_i}(t_1), \quad i = 1, ..., n \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad i = 1, ..., m \end{cases}$$

Exemple 55. *Considèrons le problème doptimisation*

$$J^* = \inf \int_{t_0}^{t_1} \left(x^2 + u^2\right) dt$$

sous les contraites :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax\,(t) + u(t)) \\ x(t_0) = x_0 = y \end{cases}$$

où a>0, t>0, x$\in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} H\,(t, x, u, \lambda) &= x^2 + u^2 + \lambda^T\,(-ax + u) \\ &= x^2 + u^2 + \lambda\,(u - ax) \\ &= x^2 + u^2 + \lambda\,(u - ax) \end{aligned}$$

5.2.2. Application au problème de régulateur linéaire quadratique

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où $A \in \mathbb{R}^{\ n \times n}$,B$\in \mathbb{R}^{\ n \times m}$,U=R ^{m} $(m \leq n)$.

La fonction à minimiser est :

$$J_{t_1}(x_0, u) = \langle Qx(t_1), x(t_1)\rangle + \int_0^{t_1} (\langle Qx(t), x(t)\rangle + \langle Ru(t), u(t)\rangle)\, dt$$

où $Q \succeq 0$, $Q_1 \succeq 0$ et $R \succ 0$.

Le Hamiltonien correspondant à ce problème est :

$$H(t, x(t), u(t), \lambda) = \langle Qx(t), x(t)\rangle + \langle Ru(t), u(t)\rangle + \lambda^T\,(Ax(t) + Bu(t))$$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \lambda(t_1) = \frac{\partial G}{\partial x}(t_1) \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

qui sont équivalentes à :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -2Qx - A^T\lambda \\ 2Ru - B^T\lambda = 0 \\ \lambda(t_1) = 2Q_1x(t_1) \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -2Qx + A^T\lambda \\ u^*(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T\lambda \end{cases}$$

La trajectoire optimale est :

$$\dot{x}^*(t) = Ax(t) + Bu^*(t) = Ax(t) - \frac{1}{2}BR^{-1}B^T\lambda(t)$$

Alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -2Qx - A^T\lambda \\ \dot{x}^*(t) = Ax^*(t) - \frac{1}{2}BR^{-1}B^T\lambda(t) \\ \lambda_i(t_1) = 2Q_1x(t_1),\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

On pose $\lambda(t) = 2P(t)x(t)$. On remplace cette dernière dans la formule de u*, on obtient

$$u^*(t) = -R^{-1}B^TPx^*(t)$$

On a

$$\begin{array}{rcl} \dot{\lambda}(t) & = & -2Qx - A^T\lambda \\ & \Longleftrightarrow & 2\dot{P}(t)x(t) + 2P(t)\dot{x}(t) = -2Qx(t) - 2A^TP(t)x(t) \\ & \Longleftrightarrow & \dot{P}(t)x(t) = -Qx(t) - A^TP(t)x(t) - P(t)Ax(t) + \dfrac{1}{2}P(t)BR^{-1}B^T\lambda(t) \\ & = & -Qx(t) - A^TP(t)x(t) - P(t)Ax(t) - P(t)BR^{-1}B^TP(t)x(t) \\ & = & \left(-Q - A^TP(t) - P(t)A - P(t)BR^{-1}B^TP(t)\right)x(t) \end{array}$$

pout tout $t \geq 0$. Alors

$$\dot{P}(t) + A^TP(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^TP(t) + Q = 0 \tag{5.1}$$

Cette dernière est dite équation différentielle de Riccati. Pour la condition finale, on a

$$\lambda(t_1) = 2Q_1x(t_1) \Longleftrightarrow 2P(t_1)x(t_1) = 2Q_1x(t_1) \implies P(t_1) = Q_1$$

On obtient ainsi le théorème suivant.

Théorème 56. *L'équation de Riccati (5.1) avec condition finale $P(t_1) = Q_1$ admet une solution unique $P(t)$. Le contrôle optimal est donné par $u^*(t) = -R^{-1}B^T P(t)x^*(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, où $x^*(t)$ est la solution du système.*

$$\begin{cases} x^*(t) = \left(A - BR^{-1}B^T P(t)\right) x^*(t) \\ \qquad\qquad x(0) = x_0 \end{cases}$$

et le coût minimal est $J^* = x_0^T P(t_0) x_0.$

Dans le cas où $t_1 = +\infty$, on parle du problème de régulateur linéaire quadratique en horizon fini dont la solution est donnée par.

Théorème 57. *Si (A,B) est contrôlable et si (A,Q_1) où $Q = Q_1^T Q$, est observable, alors le contrôle qui minimise*

$$J = \int_0^{+\infty} \left(\langle Qx(t), x(t)\rangle + \langle Ru(t), u(t)\rangle\right) dt$$

est donné par $u^*(t) = -R^{-1}B^T P x^*(t)$ où P est la solution de l'équation algébrique de Riccati

$$A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t)x(t) + Q = 0$$

et le coût minimal est $J^* = x_0^T P x_0.$

5.3. Contrôle optimal stochastique

5.3.1. Contrôle optimal à horizon fini

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité. Considérons le système stochastique suivant

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t), u(t))dt + g(t, x(t), u(t))dw(t), \ t_0 \leq t \leq T, \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur aléatoire indépendant du mouvement Brownien $w(t)$ pour tout, $t_0 \leq t \leq T$.

L'ensemble des contrôles admissibles U est l'ensemble des contrôles $u \in U$ tels que le système (5.2) admet une solution unique x pour tout $.u \in U$.

L'objectif est de trouver un contrôle $u \in U$ qui minimise la fonctionnelle

$$J_T(x_0,u) = E_{t_0,x_0}\left(\Psi\left(T, x(T)\right) + \int_{t_0}^{T} \Phi(t,x(t),u(t))dt\right) \tag{5.3}$$

où E_{t_0,x_0} est l'espérence conditionnelle, conditionnée par le fait que l'état initial est x_0 à l'instant $t = t_0$.

On cherche un contrôle $u^*(t) = u^*(t,x(t))$, $t_0 \leq t \leq T$, qui satisfait le système (5.2) et qui minimise la fonctionnelle (5.3).

On va présenté la solution du problème de contrôle optimal en utilisant la **programmation dynamique de Bellman.** Soit $V(t_0, x_{0.}) = \inf J(t_0, x_0, u)$. En général, pour tout $s \in [t_0, T]$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$, on définit la fonction

$$\begin{aligned} V(s,y_.) &= \inf_{u\in U} J(s,y,u). \\ &= \inf_{u\in U} E_{s,y}\left(\Psi\left(T,x(T)\right) + \int_{s}^{T} \Phi(t,x(t),u(t))dt\right) \end{aligned}$$

correspondant au système

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t,x(t),u(t))dt + g(t,x(t),u(t))dw(t),\ \ t_0 \leq t \leq T, \\ x(s) &= y \end{aligned}$$

On a le théorème suivant qui présente l'équation stochastique de Hamilton -Jacobi-Bellman.

Théorème 58. *Le contrôle optimal $u^*(t)$ et la valeur de V correspondante satisfont l'équation de H–J-B*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s}V(s,y) + \inf_{u\in U}\left\{\mathcal{A}_u V(s,y) + \Phi(s,y,u)\right\} \\ = \ & \frac{\partial}{\partial s}V(s,y) + \left\{\mathcal{A}_{u^*} V(s,y) + \Phi(s,y,u^*)\right\} = 0 \end{aligned}$$

où $t_0 \leq s \leq T$, avec la condition finale

$$V(T,y) = \Psi\left(T,y\right),\ \ y \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\mathcal{A}_u V(s,y) = V_y(s,y)f(s,y) + \frac{1}{2}trace\left(g^T(s,y)V_{yy}(s,y)g(s,y)\right)$$

On remarque que l'application de la programmation dynamique stochastique peut être réalisée en trois étapes :

1. Pour $\widehat{V}$ fixé, déterminer $\hat{u} = \widehat{u}(s, y, \widehat{V})$ tel que

$$\widehat{u}(s, y, \widehat{V}) \in \arg \inf_{u \in U} \{\mathcal{A}_u V(s, y) + \Phi(s, y, u)\}$$

2. On résoud l'équation aux dérivés partielles

$$\frac{\partial}{\partial s} V(s, y) + \mathcal{A}_{\widehat{u}} V(s, y) + \Phi(s, y, \widehat{u}) = 0$$

   avec condition finale $V(T, y) = \Psi(T, y)\ y \in \mathbb{R}^n$.

   La solution $V(s, y)$ est la fonction valeur qui réalise le coût minimal.

3. On obtient le contrôle optimal $u^* = \widehat{u}(s, y, V)$.

5.3.2. Le problème de régulateur linéaire stochastique

Soient Q_1 et Q des matrices semi-définie positives et R est une matrice définie positive. Considérons le problème de contrôle optimal

$$\inf_{u \in U} J(t_0, x_0, u) = E_{t_0, x_0} \left(\langle Q_1 x(T), x(T) \rangle + \int_{t_0}^{T} \left(\langle Q x(t), x(t) \rangle + \langle R u(t), u(t) \rangle \right) dt \right) \tag{5.4}$$

correspondant au système

$$\begin{cases} \quad dx(t) = (Ax(t) + Bu(t))\, dt + C dw(t), \ \ t_0 \leq t \leq T \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, C est une fonction matricielle de type $n \times r$, et $(W(t))$ est un processus de Wiener r-dimensionnel. On va appliquer la programmation dynamique de Bellman pour résoudre le problème (5.4). L'équation de H-J-B correspondante à ce problème est :

$$\frac{\partial}{\partial s} V(s, y) + \inf_{u \in U} \{\mathcal{A}_u V(s, y) + \Phi(s, y, u)\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial s} V(s, y) + \inf_{u \in U} \left\{ y^T A^T V_y + u^T B^T V_y + \frac{1}{2} trace\left(C^T V_{yy}(s, y) C\right) + y^T Q y + u^T R u \right\} = 0 \tag{5.5}$$

On a

$$\inf_{u\in U}\left\{y^TA^TV_y+u^TB^TV_y+\frac{1}{2}trace\left(C^TV_{yy}(s,y)C\right)\right\}=\inf_{u\in U}\left\{y^TA^TV_y+u^TB^TV_y\right\}$$

on obtient $\widehat{u}=-\frac{1}{2}R^{-1}B^TV_y$. Remplaçons cette valeur dans l'équation (5.5) on obtient

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}V(s,y)+y^TA^TV_y+\widehat{u}^TB^TV_y+\frac{1}{2}trace\left(C^TV_{yy}(s,y)C\right)+y^TQy+\widehat{u}^TR\widehat{u}=0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}V(s,y)+y^TA^TV_y-\frac{1}{2}V_y^TBR^{-1}V_y+\frac{1}{2}trace\left(C^TV_{yy}(s,y)C\right)$$
$$+y^TQy+\frac{1}{4}V_y^TBR^{-1}RR^{-1}B^TV_y=0 \tag{5.6}$$

avec condition finale $V(T,y)=y^TQ_1y$.

Pour résoudre cette équation on prend

$$V(s,y)=y^TP(s)y+\alpha(s)$$

où $P(s)$ est une une matrice symétrique et $\alpha(s)$ est une fonction scalaire. Comme on a

$$V_y(s,y)=2P(s)y,\ V_{yy}=2P(s)$$

l'équation (**??**) est équivalente à

$$\Longleftrightarrow y^T\dot{P}(s)y+\dot{\alpha}(s)+y^TA^TP(s)y-y^TP(s)BR^{-1}B^TP(s)y$$
$$+\frac{1}{2}trace\left(CC^T2P(s)\right)+y^TQy+\frac{1}{4}y^TA^TP(s)BR^{-1}RR^{-1}B^T2P(s)y=0$$

on obtient

$$\Longleftrightarrow y^T\dot{P}(s)y+y^T\dot{\alpha}(s)y+2y^TA^TP(s)y-y^TP(s)BR^{-1}B^TP(s)y$$
$$+\frac{1}{2}trace\left(CC^T2P(s)\right)+y^TQy+\frac{1}{4}y^TA^TP(s)BR^{-1}RR^{-1}B^T2P(s)y=0$$

d'où

$$\Longleftrightarrow y^T\left(\dot{P}(s)+A^TP(s)+P(s)A-\frac{1}{2}P(s)BR^{-1}B^TP(s)Q\right)y$$

$+y^T \left(\dot{\alpha}(s) + trace\left(CC^T P(s)\right)\right) y = 0$

pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. On obtient ainsi

$$\begin{cases} \dot{P}(s) + A^T P(s) + P(s)A - \frac{1}{2}P(s)BR^{-1}B^T P(s)Q = 0, \\ \dot{\alpha}(s) + trace\left(CC^T P(s)\right) = 0 \end{cases}$$

Comme

$$\begin{cases} V(T, y) = \Psi(T, y) = y^T Q_1 y \\ V(T, y) = y^T P(T)y + \alpha(T) \end{cases}$$

alors $P(T) = Q_1$ et $\alpha(T) = 0$. Alors $P(s)$ et $\alpha(s)$ peuvent être déterminer en résolvant les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \quad \dot{P}(s) + A^T P(s) + P(s)A - \frac{1}{2}P(s)BR^{-1}B^T P(s) + Q = 0 \\ P(T) = Q_1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \quad \dot{\alpha}(s) + trace\left(CC^T P(s)\right) = 0 \\ \alpha(T) = 0 \end{cases}$$

Alors le contôle optimal est

$$u^*(s) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T(2Py) = -R^{-1}B^T P(s)y$$

et le coût minimal est

$$J^* = E\left(V(t_0, x_0)\right) = E\left(x_0^T P(t_0)x_0\right) + \alpha(t_0)$$

où

$$\alpha(t) = \int_t^T trace\left(CC^T P(s)\right) ds$$

Exemple 59. *Trouvez le contrôle qui minimise la fonctionnelle*

$$J = \frac{1}{2}E\left(\int_0^T \left(x(t)^2 + u(t)^2\right) dt\right)$$

sous contrainte

$$dx(t) = (x(t) + u(t))\, dt + dw(t)$$

Le contrôle optimal est donné par $u^*(t) = -BR^{-1}Px(t) = -Px(t)$,*où* P *est la solution de l'équation de Riccati*

$$\begin{cases} \dot{P}(s) + A^T P(s) + P(s)A - \frac{1}{2}P(s)BR^{-1}B^T P(s) + Q = 0 \\ \dot{\alpha}(s) + trace\left(CC^T P(s)\right) = 0 \end{cases}$$

Pour cet exemple on obtient

$$\begin{cases} \dot{P}(s) + 2P(s) - \frac{1}{2}P^2(s) + \frac{1}{2} = 0,\ P(T)=0 \\ \dot{\alpha}(s) + trace\left(P(s)\right) = 0\ ,\ \alpha(T) = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation de Riccati on utilise le changement de variable $P(t) = -\frac{\dot{z}(t)}{2z(t)}$. *Alors*

$$\dot{P}(t) = \frac{-2\ddot{z}(t)z(t) + 2\dot{z}^2(t)}{4z^2(t)}$$

Alors l'équation de Riccati est équivalente à

$$\frac{-2\ddot{z}(t)z(t) + 2\dot{z}^2(t)}{4z^2(t)} - 2\frac{\dot{z}(t)}{2z(t)} - 2\frac{\dot{z}^2(t)}{4z^2(t)} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad \frac{-2\ddot{z}(t)z(t) + 2\dot{z}^2(t) - 4\dot{z}(t)z(t) - 2\dot{z}^2(t) + 2z^2(t)}{4z^2(t)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{-2\ddot{z}(t) - 4\dot{z}(t) + 2z(t)}{4z(t)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \ddot{z}(t) + 2\dot{z}(t) - z(t) = 0 \end{aligned}$$

avec condition finale

$$P(T) = -\frac{\dot{z}(T)}{2z(T)} = 0$$

ainsi $\dot{z}(T) = 0$. *On résoud maintenant l'équation*

$$\ddot{z}(t) + 2\dot{z}(t) - z(t) = 0,\ \dot{z}(T) = 0$$

L'équation caractéristique de cette équation est

$$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

dont les racines sont

$$\lambda_1 = -1 - \sqrt{2}, \lambda_2 = -1 + \sqrt{2}.$$

On pose

$$z(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}$$

alors

$$z(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t} \Longrightarrow \dot{z}(t) = a\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

On a

$$\begin{aligned} \dot{z}(T) &= 0 \\ &\Longrightarrow a\lambda_1 e^{\lambda_1 T} + b\lambda_2 e^{\lambda_2 T} = 0 \\ &\Longrightarrow a = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} b e^{(\lambda_2 - \lambda_1)T} \end{aligned}$$

Comme $P(t) = -\frac{\dot{z}(t)}{2z(t)}$ *alors*

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{-a\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - b\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{2\left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} b e^{(\lambda_2-\lambda_1)T} e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t}\right)} \\ &= \frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} b e^{(\lambda_2-\lambda_1)T} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} - b\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{2\left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} b e^{(\lambda_2-\lambda_1)T} e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t}\right)} \end{aligned}$$

On obtient

$$P(t) = \frac{\lambda_1 e^{(\lambda_2-\lambda_1)T} e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{2\left(-\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)T} e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}\right)}$$

Maintenant pour l'équation

$$\dot{\alpha}(s) + trace\left(P(s)\right) = 0, \alpha(T) = 0$$

on a

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \int_t^T \dot{\alpha}(s) ds = \int_t^T trace\left(P(s)\right) ds \\ &= \int_t^T \frac{\lambda_1 e^{(\lambda_2-\lambda_1)T} e^{\lambda_1 s} - \lambda_2 e^{\lambda_2 s}}{2\left(-\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)T} e^{\lambda_1 s} + e^{\lambda_2 s}\right)} ds \end{aligned}$$

Enfin le coût minimal est

$$J^* = P(t_0) E\left(x_0^2\right) + \alpha(t_0)$$

5.3.3. Problème de régulateur linéaire avec bruit sur l'état et le contrôle

Dans cette section, on considère le système suivant :

$$\begin{cases} dx(t) = (Ax(t) + Bu(t))\,dt + B_1x(t)dw_1(t) + B_2u(t)dw_2(t), \; t_0 \le t \le T \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où A, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, B, $B_2 \in R^{n\times m}$. w_1 et w_2 sont deux mouvements browniens scalaires indépendants. x_0 est un vecteur aléatoire.

Considérons la fonction coût

$$J = E\left(x^T(T)Qx(T) + \int_{t_0}^{T} \left(x(t)^TQx(t) + u^T(t)Ru(t)\right)dt\right)$$

L'équation HJB correspondante à ce problème est

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s}V(s,y) + \inf_{u\in U}\{y^TA^TV_y + u^TB^TV_y + y^TQy + u^TRu \\
&+\frac{1}{2}trace\left(\begin{pmatrix} B_1y & B_2u \end{pmatrix}^T V_{yy}(s,y)\begin{pmatrix} B_1y & B_2u \end{pmatrix}\right)\} = 0 \\
\Longleftrightarrow\; &\frac{\partial}{\partial s}V(s,y) + \inf_{u\in U}\{y^TA^TV_y + u^TB^TV_y + y^TQy + u^TRu \\
&+\frac{1}{2}trace\left(\begin{pmatrix} y^TB_1^T \\ u^TB_2^T \end{pmatrix} V_{yy}(s,y)\begin{pmatrix} B_1y & B_2u \end{pmatrix}\right)\} = 0
\end{aligned}$$

Soit $V(s,y) = y^TP(s)y + \alpha(s)$, où $P(s)$ est une fonction matricielle et $\alpha(s)$ est une fonction scalaire. Comme on a

$$V_y(s,y) = 2P(s)y,\; V_{yy} = 2P(s)$$

L'équation de HJB est équivalente

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow\; &y^T\dot{P}(s)y + \dot{\alpha}(s) + \inf_{u\in U}\{y^TA^TP(s)y + y^TP(s)Ay + 2u^TB^TP(s)y \\
&+trace\left(\begin{pmatrix} y^TB_1^T \\ u^TB_2^T \end{pmatrix} P(s)\begin{pmatrix} B_1y & B_2u \end{pmatrix}\right) + y^TQy + u^TRu\} = 0
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow\; y^T\dot{P}(s)y + \dot{\alpha}(s) + \inf_{u\in U}\{y^TA^TP(s)y + y^TP(s)Ay + 2u^TB^TP(s)y$$

$$+y^T B_1^T P(s) B_1 y + u^T B_2^T P(s) B_2 u + y^T Q y + u^T R u\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow y^T \dot{P}(s) y + \dot{\alpha}(s) + \inf_{u \in U} \{ y^T A^T P(s) y + y^T P(s) A y$$

$$+y^T Q y + y^T B_1^T P(s) B_1 y + 2u^T B^T P(s) y + +u^T \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right) u\} = 0$$

On remarque qu'on atteint le minimum pour u^* tel que :

$$2B^T P(s) y + 2 \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right) u^* = 0$$

alors

$$u^*(s) = - \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right)^{-1} B^T P(s) y$$

Remplaçons cette valeur de u* dans l'équation de HJB, on trouve

$$\Longleftrightarrow y^T \dot{P}(s) y + \dot{\alpha}(s) + y^T A^T P(s) y + y^T P(s) A y + y^T Q y + y^T B_1^T P(s) B_1 y$$

$$+2u^{*T} B^T P(s) y + u^{*T} \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right) u^* = 0$$

$$\Longleftrightarrow y^T \dot{P}(s) y + \dot{\alpha}(s) + y^T A^T P(s) y + y^T P(s) A y + y^T Q y + y^T B_1^T P(s) B_1 y$$

$$-2y^T P(s) B \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right)^{-1} B^T P(s) y + y^T P(s) B \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right)^{-1} B^T P(s) y = 0$$

d'où on obtient

$$y^T \left(\dot{P}(s) + A^T P(s) + P(s) A - P(s) B \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right)^{-1} B^T P(s) + B_1^T P(s) B_1 + Q \right) y + \dot{\alpha}(s) = 0$$

On déduit que

$$\begin{aligned} &\dot{P}(s) + A^T P(s) + P(s) A - P(s) B \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right)^{-1} B^T P(s) + B_1^T P(s) B_1 + Q = 0 \\ &\dot{\alpha}(s) = 0 \end{aligned}$$

avec condition finale $P(T) = Q_1$, $\alpha(T) = 0$. Alors on trouve que $\alpha(t) = 0$ pour tout t$\geq$ 0. Le contrôle optimal est

$$u^*(s) = - \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right)^{-1} B^T P(s) y$$

où P est la solution de l'équation de Riccati

$$\begin{aligned} &\dot{P}(s) + A^T P(s) + P(s) A - P(s) B \left(B_2^T P(s) B_2 + R \right)^{-1} B^T P(s) + B_1^T P(s) B_1 + Q = 0 \\ &\alpha(T) = 0 \end{aligned}$$

et le coût minimal est $J^* = E \left(x_0^T P(t_0) x_0 \right)$.

5.4. Contrôle optimal à horizon infini

Dans cette section on va étudié le problème de contrôle optimal à horizon infini. On va considéré deux types de problèmes ;

1. Problème avec coefficient d'actualisation

$$J_\lambda(u) = E\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\Phi(t, x(t), u(t))dt\right), \ \lambda > 0$$

Ce coût est souvent utilisé dans les applications économiques.

2. Problème avec coût moyen

$$J(u) = \lim_{T\to+\infty} \sup E\left(\frac{1}{T}\int_0^T \Phi(t, x(t), u(t))dt\right)$$

5.4.1. Problème avec critère de coût actualisé

Considérons le système stochastique suivant

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t), u(t))dt + g(t, x(t), u(t))dw(t), \ t \geq t_0, \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur aléatoire indépendant du mouvement Brownien $w(t)$ pour tout, $t_0 \leq t \leq T$. On cherche le contrôle qui minimise la fonctionnelle

$$J_\lambda(u) = E\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\Phi(t, x(t), u(t))dt\right), \ \lambda > 0$$

On a le résultat suivant.

Proposition 60. *Supposons que* $.\Phi(t, x(t), u(t))$ *est inférieurement ou supérierement bornée. Supposons qu'il existe une fonction de classe* C^2 *tel que* $|E(V(x_0))| < \infty$ *et*

$$\inf_{u\in U}\{\mathcal{A}_u V(x) - \lambda V(x) + \Phi(x, u)\} = 0 \tag{5.8}$$

Soit $\widehat{u}(x)$ tel que

$$\widehat{u}(x) \in \arg\inf_{u\in U}\{\mathcal{A}_u V(x) - \lambda V(x) + \Phi(x, u)\}$$

On note par R l'ensemble des stratégies u tel que $e^{-\lambda t}E\left(V(x(t))\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\int_0^t e^{-\lambda s}\frac{\partial V}{\partial x_i}(x(s)g_{i_k}(s,x(s),u(s))dw_k(s)$$

est une martingale, et supposons que le contrôle $u^*(t)=\widehat{u}(x(t,u^*))$ est une stratégie de Markov admissible qui est dans R. Alors $J_\lambda(u^*)\leq J_\lambda(u)$ pour tout $u\in R$, et le coût minimal est

$$J_\lambda(u^*)=E\left(V(x_0)\right)$$

Application au problème de régulateur linéaire

Soit le problème de minimiser la fonctionnelle

$$J_\lambda(u)=E\left(\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\left(x(t)^TQx(t)+u^T(t)Ru(t)\right)dt\right),\ \lambda>0$$

correspondant au système

$$\begin{cases} dx(t)=\left(Ax(t)+Bu(t)\right)dt+Cdw(t),\ t\geq t_0\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

où Q$\succcurlyeq 0$, $R>0$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in R^{n\times m}$, C est une fonction matricielle de type $n\times r$, et $(w(t))$ est un processus de Wiener r-dimensionnel.

L'équation (5.8) associée à ce problème est

$$\inf_{u\in U}\left\{\mathcal{A}_uV(x)-\lambda V(x)+\Phi(x,u)\right\}=0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U}\left\{x^TA^TV_x+u^TB^TV_x+\frac{1}{2}trace\left(C^TV_{xx}C\right)+x^TQx+u^TRu-\lambda V(x)\right\}=0$$

Soit $V(x)=x^tPx+\alpha$. Alors on trouve

$$\inf_{u\in U}\left\{\begin{array}{l} x^TA^TPx+x^TPAx+2u^TB^TPx+\frac{1}{2}trace\left(CC^TP\right)\\ +x^TQx+u^TRu-\lambda x^TPx-\lambda\alpha\end{array}\right\}=0 \qquad (5.9)$$

On remarque que le minimum est atteint pour u^* tel que

$$2B^TPx+2Ru^*=0$$

alors $u^*(t) = -R^{-1}B^TPx(t)$. Remplaçons cette valeur de u^* dans l'équation (5.9), on trouve

$$x^TA^TPx + x^TPAx - 2x^TBR^{-1}B^TPx + \frac{1}{2}trace\left(CC^TP\right)$$

$$+x^TQx + x^TPBR^{-1}RR^{-1}B^TPx - \lambda x^TPx - \lambda\alpha = 0$$

alors

$$x^T(A^TP + PA - \lambda P - PBR^{-1}B^TP + Q)x + trace\left(CC^TP\right) - \lambda\alpha = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On obtient ainsi

$$\begin{cases} A^TP + PA - \lambda P - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \\ \quad trace\left(CC^TP\right) - \lambda\alpha = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \left(A - \frac{\lambda}{2}I\right)^T P + P\left(A - \frac{\lambda}{2}I\right) - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \\ \alpha = \frac{1}{\lambda}trace\left(CC^TP\right) \end{cases}$$

On obtient le résultat suivant.

Théorème 61. *Supposons que :*

1. Le système $\left(\left(A - \frac{\lambda}{2}I\right), B\right)$ est stabilisable,

2. Le système $\left(\left(A - \frac{\lambda}{2}I\right), G\right)$ est détectable où $G^TG = Q$

alors

1. Il existe une solution unique de l'équation algébrique de Riccati

$$\left(A - \frac{\lambda}{2}I\right)^T P + P\left(A - \frac{\lambda}{2}I\right) - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$

telle que spec$\left(A - \frac{\lambda}{2}I - BR^{-1}B^TP\right) \subset \mathbb{C}_-$.

2. Un contrôle optimal u^* existe, il est donné par $u^*(t) = -R^{-1}B^TPx(t)$, et le coût minimal est

$$J(u^*) = E\left(x_0^TPx_0\right) + \frac{1}{\lambda}trace\left(CC^TP\right)$$

5.4.2. Problème avec coût moyen

Considérons le système stochastique suivant

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t,x(t),u(t))dt + g(t,x(t),u(t))dw(t),\ t \geq 0, \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur aléatoire indépendant du mouvement Brownien $w(t)$ pour tout, $t_0 \leq t \leq T$. On cherche le contrôle qui minimise la fonctionnelle

$$J(u) = \lim_{T\to+\infty} \sup E\left(\frac{1}{T}\int_0^T \Phi(t,x(t),u(t))dt\right)$$

On a le résultat suivant.

Proposition 62. *Supposons qu'il existe une fonction V(x) de classe C^2 et $\eta \in \mathbb{R}$ telle que*

$$\inf_{u\in U}\{\mathcal{A}_u V(x) + \Phi(x,u) - \eta\} = 0,$$

Soit $\widehat{u}(x)$ tel que

$$\widehat{u}(x) \in \arg\inf_{u\in U}\{\mathcal{A}_u V(x) + \Phi(x,u) - \eta\}$$

On note par R l'ensemble des stratégies u tel que

$$\lim_{T\to+\infty} \sup \frac{E(V(x_0) - V(x(T))}{T} = 0,$$

et tel que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\int_0^t e^{-\lambda s}\frac{\partial V}{\partial x_i}(x(s)g_{i_k}(s,x(s),u(s))dw_k(s)$$

est une martingale, et supposons que le contrôle $u^*(t) = \widehat{u}(x(t,u^*))$ est une stratégie de Markov admissible qui est dans R. Alors $J(u^*) \leq J(u)$ pour tout $u \in R$, et le coût minimal est $J(u^*) = \eta$.

Application au problème de régulateur linéaire

Soit le problème de minimiser la fonctionnelle

$$J(u)=\lim_{T\to+\infty}\sup E\left(\frac{1}{T}\int_0^T \left(x(t)^T Qx(t)+u^T(t)Ru(t)\right)dt\right)$$

correspondant au système

$$\begin{cases} \quad dx(t)=\left(Ax(t)+Bu(t)\right)dt+Cdw(t),\ t\geq t_0 \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$$

où Q$\succcurlyeq 0$, $R>0$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in R^{n\times m}$, C est une fonction matricielle de type $n\times r$, et $(w(t))$ est un processus de Wiener r-dimensionnel.

On a la théorème suivant.

Théorème 63. *Supposons que :*

1. Le système (A,B) est stabilisable,

2. Le système (A,G) est détectable où $G^TG=Q$.

Alors

1. Il existe une solution unique de l'équation algébrique de Riccati

$$A^TP+PA-PBR^{-1}B^TP+Q=0$$

2. Un contrôle optimal u^* existe il est donné par $u^*(t)=-R^{-1}B^TPx(t)$, et le coût minimal est

$$J(u^*)=trace\left(CC^TP\right)$$

Preuve. Devoir à domicile ■

Exemple 64. *Considérons le problème de contrôle optimal*

$$\inf_{u\in\mathbb{R}} E\left(\int_0^T \frac{1}{\gamma}e^{-\lambda t}u^\gamma(t)dt+\lambda x(T)\right)$$

associé au sytème

$$dx(t)=\left(\mu-\rho x(t)-u(t)\right)dt+\sigma dw(t),\ t>0$$
$$x(0)=x_0\in\mathbb{R}$$

L'équation de Bellman associée à ce problème est

$$\frac{\partial}{\partial s}V(s,x) + \inf_{u\in\mathbb{R}} \{\mathcal{A}_u V(x) + \Phi(x,u)\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial t}{\partial s}V(t,x) + \inf_{u\in\mathbb{R}} \left\{ (\mu - \rho x(t) - u(t))\, V_x + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} + \frac{1}{\gamma} e^{-\lambda t} u^{\gamma}(t) \right\} = 0$$

avec condition finale V(t,x)=$\lambda x(T)$. Le contrôle minimisant u* satisfait

$$V_x + e^{-\lambda t} u^{*\gamma-1} = 0$$

alors $(u^*(t))^{\gamma-1} = e^{\lambda t} V_x$*. Soit V(t,x)=P(t)x+$\alpha(t)$, alors*

$$V_x = P \Longrightarrow (u^*)^{\gamma-1} = e^{\lambda t} P \Longrightarrow u^*(t) = e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}t} (P(t))^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Remplaçons dans l'équation de Bellman, on trouve

$$\dot{\alpha}(t) + \dot{P}(t)x + (\mu - \rho x)P(t) - u^*(t)P(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(0) + \frac{1}{\gamma} e^{-\lambda t} u^{*\gamma}(t) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\dot{\alpha}(t) + \dot{P}(t)x + (\mu - \rho x)P(t) - e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}t} (P(t))^{\frac{1}{\gamma-1}} P(t) + \frac{1}{\gamma} e^{-\lambda t} e^{\frac{\lambda\gamma}{\gamma-1}t} (P(t))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{\alpha}(t) + \mu P(t) + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}t} (P(t))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0 \\ \dot{P}(t) - \rho P(t) = 0 \end{cases}$$

alors P(t)=e$^{-\rho(T-t)}P(T)$=$\lambda e^{-\rho(T-t)}$, 0$\leq t \leq T$. On a

$$\dot{\alpha}(t) + \mu P(t) + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}t} (P(t))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \alpha(t)=\alpha(T)-\mu\int_t^T P(s)ds-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\int_t^T e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}s}\left(P(s)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
\Longleftrightarrow \quad & \alpha(t)=\alpha(T)-\mu\int_t^T \lambda e^{-\rho(T-s)}ds-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\int_t^T e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}s}\lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}e^{-\rho(T-s)\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
\Longleftrightarrow \quad & \alpha(t)=\alpha(T)-\mu\lambda\int_t^T e^{-\rho(T-s)}ds-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\int_t^T e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}s}e^{-\rho(T-s)\frac{\gamma}{\gamma-1}}ds \\
\Longleftrightarrow \quad & \alpha(t)=-\mu\lambda\int_t^T e^{-\rho(T-s)}ds-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\int_t^T e^{-\rho T\frac{\gamma}{\gamma-1}}e^{\frac{(\rho\gamma+\lambda)}{\gamma-1}s}ds \\
= \quad & -\left(\mu\lambda/\rho\right)\left(1-e^{\rho(t-T)}\right)-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\frac{\gamma-1}{(\rho\gamma+\lambda)}e^{-\rho T\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(e^{\frac{(\rho\gamma+\lambda)}{\gamma-1}T}-e^{\frac{(\rho\gamma+\lambda)}{\gamma-1}t}\right) \\
= \quad & -\left(\mu\lambda/\rho\right)\left(1-e^{\rho(t-T)}\right)-\lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}e^{-\rho\frac{\gamma}{\gamma-1}T}\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma(\rho\gamma+\lambda)}\left(e^{\frac{(\rho\gamma+\lambda)}{\gamma-1}T}-e^{\frac{(\rho\gamma+\lambda)}{\gamma-1}t}\right)
\end{aligned}
$$

alors le coût minimal est

$$
\begin{aligned}
J^* &= P(0)x_0+\alpha(0) \\
&= \lambda e^{-\rho T}x_0-\left(\mu\lambda/\rho\right)\left(1-e^{-\rho T}\right)-\lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma(\rho\gamma+\lambda)}\left(e^{\frac{\lambda}{\gamma-1}T}-e^{-\rho\frac{\gamma}{\gamma-1}T}\right)
\end{aligned}
$$

5.5. Exercices

Exercise 65.

Résoudre le problème de contrôle optimal

$$\inf_u E\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}u^2(t)dt$$

correspondant au système :

$$
\begin{aligned}
dx(t) &= \left(\mu x(t)-u(t)\right)dt+\sigma x(t)dw(t) \\
x(0) &= x_0>0
\end{aligned}
$$

où $\lambda>0$ et $\sigma>0$.

Soit le système

$$
\left\{
\begin{array}{l}
dx_1(t)=x_2(t)dt+ax_2(t)dw(t) \\
dx_2(t)=x_1(t)dt+u(t)dt+bx_2(t)dw(t)
\end{array}
\right. . \tag{1}
$$

où a et b sont des constantes réelles.

1. Présenter le système (1) sous la forme

$$dx(t) = (A_0x(t) + Bu(t))\,dt + A_1x(t)dw(t)$$

2. Etudier la stabilité en moment d'ordre 2 du système (A_0, A_1).
2. Donner un contrôle qui stabilise le système (A_0, A_1, B) s'il existe.
3. Montrer que le système (A_0, A_1, B) est contrôlable.
4. Considérons le problème de Contrôle optimale :

$$\limsup_{T\to+\infty} E(\frac{1}{T}\int_0^T (x_1^2(t) + u^2(t))dt) \qquad (2)$$

correspondant au système (1).

a. Montrer que le problème de contrôle optimal (2) admet une solution unique.
b. Trouver le contrôle optimal.
5. Montrer que l'équation

$$A_0^TX + XA_0 + A_1^TXA_1 + M = 0$$

admet une solution unique définie positive X, où $M{=}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Considérons le système décrit par la paire d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \sigma w(t) \\ \dot{y}(t) = \beta u(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$. Pour $T > 0$, on considère la fonctionnelle :

$$J(u) = E\left[\frac{a}{T}\int_0^T (x(t) + y(t))^2\,dt + \frac{b}{T}\int_0^T (u(t))^2\,dt\right]$$

où a, $b > 0$. Résoudre le problème du contrôle optimal inf $J(u)$.

Résoudre le problème de contrôle optimal

$$\inf_u E(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}x^\alpha\,(au(t) + b)^{1-\frac{1}{a}}\,dt$$

où $0{<}\alpha < 1$, $a > 1$ correspondant au système :

$$\begin{aligned} dx(t) &= (\mu - u(t))\,x(t)dt + \sigma x(t)dw(t) \\ x(0) &= x_0 > 0 \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] **L. Arnold,** Stochastic Differential Equations : Theory and Applications, John Wiley, 1974.

[2] **A. Barbata**, *Filtrage et Commande Basée sur un Observateur pour les Systèmes Stochastiques, Thèse de doctorat, 2015.*

[3] **P. Bougerol,** Modèles stochastiques et Applications à la finance, Cours Master de Mathématiques M1 2010-2011, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.

[4] **Christiaan Heij , André C.M. Ran , Frederik van Schagen**, Introduction to Mathematical Systems Theory ; Discrete Time Linear Systems, Control and Identification, Birkhäuser Cham, 2021.

[5] **Gu. Chen, Go. Chen, S.H. Hsu**, *Linear Stochastic Control Systems,* CRC Press, 2000.

[6] **V. Dragan, T. Morozan and A.M. Stoica**, *Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems,* Springer, 2013.

[7] **C. Heij, A. Ran**, F. Schagen, *Introduction to Mathematical Systems Theory Linear Systems, Identification and Control*, Birkhäuser Verlag Basel -Boston . Berlin, 2007.

[8] **O. Lévèque**, Cours de probabilité et calcul stochastique, EPFL, Semèstre d'hiver, 2004-2005.

[9] **X. Mao**, *Stochastic Differential Equations and Applications*, Woodhead Publishing, 2011.

[10] **B. Oksendale**, *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*, Springer, Verlag, Berlin, 1985.

[11] **V. M. Ungureanu**, *Riccati equation of stochastic control and stochastic uniform observability in infinite dimension*, Analysis and Optimization of Differential Systems, 2003.