Université de Batna 2 Batna, 2020/2021
Département de Mathématiques
$2^{éme}$ année Mastère

DEVOIR A DOMICILE N. 2

Exercice 1

Soit le problème de minimiser la fonctionnelle

$$J(u) = \lim_{T \to +\infty} \sup E \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^T Q x(t) + u^T(t) R u(t) dt \right)$$

correspondant au système

$$\begin{cases} dx(t) = (Ax(t) + Bu(t))\, dt + C dw(t), \ t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où Q$\succcurlyeq 0$, $R > 0$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, C est une fonction matricielle de type $n \times r$, et $(w(t))$ est un processus de Wiener r-dimensionnel.. Montrer que si

1. Le système (A, B) est stabilisable,
2. Le système (A, G) est détectable où $G^T G = Q$.

Alors

1/ Il existe une solution unique de l'équation algébrique de Riccati

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0$$

2. Un contrôle optimal u^* existe il est donné par $u^*(t) = -R^{-1} B^T P x(t)$, et le coût minimal est

$$J(u^*) = trace\left(CC^T P\right)$$

Exercice 2

Résoudre le problème de contrôle optimal

$$\inf_u E(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} x^\alpha \left(au(t) + b\right)^{1 - \frac{1}{a}} dt$$

où $0<\alpha < 1, a > 1$ correspondant au système:

$$\begin{aligned} dx(t) &= (\mu - u(t))\, x(t) dt + \sigma x(t) dw(t) \\ x(0) &= x_0 > 0 \end{aligned}$$