Devoir
Equations Différentielles Stochastiques

Exercice 1

Considérons l'équation différentielle stochastique scalaire

$$\begin{aligned} dx(t) &= A(t)x(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)x(t)dw_i(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions continues, w_i, $i = 1, ..., m$, sont des mouvements Browniens standards.

a. Donner la solution de cette équation.

c. Soit $M(t) = E(X(t)^2)$. Montrer que $M(t)$ est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{M}(t) = \left(2A(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)^2\right) M(t)$$

Exercice 2

1. Considérons l'équation différentielle stochastique scalaire

$$\begin{aligned} dx(t) &= (a + \alpha x(t))\, dt + (b + \beta x(t))\, dw(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où a, b, α et β sont des constantes et w est le mouvement Brownien standard.

a. Montrer que cette équation admet une solution unique.

b. Donner la solution de cette équation.

b. Calculer $E(x(t))$ et la variance $var(x(t))$.

2. Considérons l'équation différentielle stochastique scalaire

$$\begin{aligned} dx(t) &= (f(t) + g(t)x(t))\, dt + (h(t) + c(t)x(t))\, dw(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où $f(t), g(t), h(t)$ et $c(t)$ sont des fonctions continues et w est le mouvement Brownien standard. Donner la solution de cette équation.