Université de Batna 2
Département de Mathématiques
$2^{éme}$ année Mastère

Batna, 2020/2021

DEVOIR A DOMICILE N. 1

1. Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{aligned} dx(t) &= Ax(t)dt \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{1}$$

   où A est une matrice d'ordre n. Montrer que l'origine du système (1) est asymptotiquement stable ssi l'équation de Lyapunov

$$A^T P + PA = -I_n$$

   admet une solution définie positive P.

2. Considérons l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dx(t) &= Ax(t)dt + \sum_{i=1}^{r} B_i x(t) dw_i(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2}$$

   et $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $w_i(t)$, $i = 1, ..., m$, sont des mouvements Browniens.

   Montrer que l'origine de l'équation (2) est stable en moment d'ordre 2 si l'équation

$$A^T P + PA + \sum_{i=1}^{r} B_i^T P B_i = -I$$

   admet une solution définie positive P.