

Faculté des Mathématiques et d'Informatique  
 Département de Mathématiques

2<sup>ème</sup> année Master

**Ce sujet est destiné aux étudiants de la liste (1)**  
**EXAMEN DE RATTRAPAGE (1)**

**Théorie du Contrôle stochastique**

**Exercice 1**

Considérons l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dx(t) &= (A_0x(t) + Bu(t)) dt + \sum_{k=1}^m A_k x(t) dw_k(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices et  $w_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sont des mouvement Browniens scalaires. Répondre par oui ou non avec justifications.

1. Le système  $(C, A_0, A_1, \dots, A_m)$  est observable  $\implies$  Le système  $(C, A_0, A_1, \dots, A_m)$  est détectable.
2. Les paires  $(A_k, B)$  ne sont pas contrôlables  $\implies$  Le système  $(A_0, A_1, \dots, A_m, B)$  n'est pas contrôlable.
3. Le système  $(A_0, A_1, A_2, \dots, A_m, B)$  est contrôlable  $\implies$  Il existe  $\tau > 0$  tel que  $y(\tau) > 0$  où  $y(t)$  est la solution du système: 
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = A_0y(t) + y(t)A_0^T + \sum_{k=1}^m A_k y(t)A_k^T + BB^T, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
4. Le système  $(A_0, A_1, \dots, A_m)$  est exponentiellement stable en moment d'ordre 2  $\implies$  l'équation 
$$A_0^T X + X A_0 + \sum_{k=1}^m A_k^T X A_k + C^T C = 0$$
 admet une solution  $X > 0$ .

**Exercice 2**

Soit le système

$$\begin{cases} dx_1(t) = x_2(t)dt + ax_2(t)dw(t) \\ dx_2(t) = x_1(t)dt + u(t)dt + bx_2(t)dw(t) \end{cases} \quad (1)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles.

1. Présenter le système (1) sous la forme

$$dx(t) = (A_0x(t) + Bu(t)) dt + A_1x(t)dw(t)$$

2. Etudier la stabilité en moment d'ordre 2 du système  $(A_0, A_1)$ .
2. Donner un contrôle qui stabilise le système  $(A_0, A_1, B)$  s'il existe.
3. Montrer que le système  $(A_0, A_1, B)$  est contrôlable.
4. Considérons le problème de Contrôle optimale:

$$\limsup_{T \rightarrow +\infty} E \left( \frac{1}{T} \int_0^T (x_1^2(t) + u^2(t)) dt \right) \quad (2)$$

correspondant au système (1).

- a. Montrer que le problème de contrôle optimal (2) admet une solution unique.
  - b. Trouver le contrôle optimal.
5. Montrer que l'équation

$$A_0^T X + X A_0 + A_1^T X A_1 + M = 0$$

admet une solution unique définie positive X, où  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

## Exercice 2

Considérons le système:

$$\begin{aligned} dx(t) &= (Ax(t) + bu(t)) dt + \sum_{i=1}^m b_i x(t) dw_i(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

où  $A$  est une matrice d'ordre  $n$  et  $b_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , sont des matrices de dimension  $n$ .  
Montrer que le système  $(A, b, b_1, \dots, b_m)$  est stabilisable ssi:

1.  $(A, b)$  est stabilisable.
2. Il existe une matrice définie positive  $Q$  telle que  $\sum_{i=1}^m b_i^T P b_i < Q$ , où  $P$  est la solution de l'équation matricielle

$$A^T P + P A + P b b^T P + \sum_{i=1}^m b_i^T P b_i = -Q$$

**Envoyez vos réponses à l'email [m.kada@univ-batna2.dz](mailto:m.kada@univ-batna2.dz).**