Université de Batna 2 Batna, 2019/2020

Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

$2^{ème}$ année Master

**Ce sujet est déstiné aux étudiants de la liste 2**
**EXAMEN DE RATTRAPAGE (2)**

**Théorie du Contrôle stochastique**

### Exercice 1

Considérons l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dx(t) &= (A_0x(t) + Bu(t))\,dt + \sum_{k=1}^{m} A_kx(t)dw_k(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

où $A$ et $B$ sont des matrices et $w_i(t)$, $i = 1, ..., m$, sont des mouvement Browniens scalaires. Répondre par oui ou non avec justifications.

1. Le système $(C, A_{0,}A_1, ..., A_m)$ est observable $\Longrightarrow$Le système $(C, A_{0,}A_1, ..., A_m)$ est détectable.

2. Les paires $(A_k, B)$ sont contrôlables$\Longrightarrow$ Le système $(A_{0,}A_1, ..., A_m, B)$ est contrôlable.

3. Le système $(A_0, A_1, A_2, ..., A_m, B)$ est observable$\Longrightarrow$Il existe $\tau > 0$ tel que $y(\tau) > 0$ où $y(t)$ est la solution du système: $\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = A_0^Ty(t) + y(t)A_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} A_k^Ty(t)A_k + C^TC, \\ y(0) = 0 \end{cases}$

4. Le système $(A_{0,}A_1, ..., A_m)$ est exponentiellement stable en moment d'ordre 2$\Longrightarrow$.l'équation $A_0^TX + XA_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} A_k^TXA_k + C^TC = 0$ admet une solution $X > 0$.

### Exercice 2

Soit le système

$$\begin{cases} dx_1(t) = x_2(t)dt + ax_1(t)dw(t) \\ dx_2(t) = x_1(t)dt + u(t)dt + bx_1(t)dw(t) \end{cases}. \tag{1}$$

où a et b sont des constantes réelles.

1. Présenter le système (1) sous la forme

$$dx(t) = (A_0x(t) + Bu(t))\,dt + A_1x(t)dw(t)$$

2. Etudier la stabilité en moment d'ordre 2 du système $(A_0, A_1)$.
2. Donner un contrôle qui stabilise le système $(A_0, A_1, B)$ s'il existe.
3. Montrer que le système $(A_0, A_1, B)$ est contrôlable.
4. Considérons le problème de Contrôle optimale:

$$\limsup_{T\to+\infty} E(\frac{1}{T}\int_0^T (x_1^2(t)+u^2(t))dt) \tag{2}$$

correspondant au système (1).
a. Montrer que le problème de contrôle optimal (2) admet une solution unique.
b. Trouver le contrôle optimal.
5. Montrer que l'équation

$$A_0^T X + XA_0 + A_1^T XA_1 + M = 0$$

admet une solution unique définie positive X, où $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2**

Considérons le système:

$$\begin{aligned} dx(t) &= (Ax(t)+bu(t))\,dt + \sum_{i=1}^{m} b_i x(t) dw_i(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

où $A$ est une matrice d'ordre $n$ et $b_i$ , $i \in \{1, ..., m\}$ , sont des matrices de dimension $n$.
Montrer que le système $(A, b, b_1, ..., b_m)$ est stabilisable ssi:

1. $(A, b)$ est stabilisable.
2. Il existe une matrice définie positive $Q$ telle que $\sum_{i=1}^{m} b_i^T P b_i < Q$, où $P$ est la solution de l'équation matricielle

$$A^T P + PA + Pbb^T P + \sum_{i=1}^{m} b_i^T P b_i = -Q$$

**Envoyer vos réponses à l'email: m.kada@univ-batna2.dz**