Université de Batna 2 Batna, 2020/2021
Département de Mathématiques
$2^{éme}$ année Mastère

SOLUTION du DEVOIR N. 1
Théorie du contrôle stochastique

1. Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{aligned} dx(t) &= Ax(t)dt \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{1}$$

où A est une matrice d'ordre n.

a. Soit P une matrice définie positive solution de l'équation $A^TP + PA = -I_n$. Soit la fonction $V(x) = x^TPx$, où x est la solution du système $dx(t) = Ax(t)dt$ Comme P est défnie positive alors $V(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Calculons $\dot{V}(x)$. On a

$$\dot{V}(x) = x^T \left(A^TP + PA\right) x = -x^T I_n x = -\|x\|^2 < 0$$

D'aprés le théorème de stabilité de Lyapunov, on déduit que l'origine du système $dx(t) = Ax(t)dt$ est asymptotiquement stable.

b. Supposons maintenant que l'origine du système $dx(t) = Ax(t)dt$ est asymptotiquement stable. On définit

$$P = \int_0^{+\infty} \exp(A^Tt)\exp(At)dt$$

On a

$$\begin{aligned} A^TP + PA &= A^T \int_0^{+\infty} \exp(A^Tt)\exp(At)dt + \left(\int_0^{+\infty} \exp(A^Tt)\exp(At)dt\right) A \\ &= \int_0^{+\infty} \left(A^T\exp(A^Tt)\exp(At) + \exp(A^Tt)\exp(At)A\right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(\exp(A^Tt)\exp(At)\right) dt \\ &= \exp(A^Tt)\exp(At)\mid_0^{+\infty} = -I_n \end{aligned}$$

car A est stable. alors P est la solution de l'équation $A^TP + PA = -I_n$.

2. Considérons l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dx(t) &= Ax(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i x(t) dw_i(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2}$$

et B sont des matrices et $w_i(t)$, $i = 1, ..., m$, sont des mouvement Browniens.

Montrons que l'origine de l'équation (1) est stable en moment d'ordre 2 si l'équation

$$A^TP + PA + \sum_{i=1}^{m} B_i^T P B_i = -I$$

admet une solution définie positive P. Considérons la fonction $V(x) = x^TPx$, où x est la solution du système 2 Calculons LV(x). On a

$$
\begin{aligned}
LV(x) &= x^T\left(A^TP+PA\right)x+\sum_{i=1}^{m}x^TB_i^TPB_ix\\
&= x^T\left(A^TP+PA+\sum_{i=1}^{m}x^TB_i^TPB_i\right)x\\
&= -x^Tx=-\left\|x\right\|^2<0
\end{aligned}
$$

Alors d'aprés le théorème de Lyapunov de stabilité stochastique, on déduit que l'origine de l'équation (1) est stable en moment d'ordre 2.