Université de Batna 2 Batna, 2020/2021
Département de Mathématique
$2^{éme}$ année Master

SOLUTION DEVOIR 2
Théorie du contrôle stochastique

Exercice 1

Soit le problème de minimiser la fonctionnelle

$$J(u) = \lim_{T\to+\infty} \sup E\left(\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^T Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt\right)$$

correspondant au système

$$\begin{cases} dx(t) = (Ax(t) + Bu(t))\,dt + Cdw(t),\ t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

L'équation de Bellman correspondante à ce problème est

$$\inf_{u\in U}\{\mathcal{A}_u V_x + \Phi(x,u) - \eta\} = 0,$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U}\left\{\mathcal{A}_u V_x + x^T Qx + u^T Ru - \eta\right\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U}\left\{x^T A^T V_x + u^T B^T V_x + \frac{1}{2} trace\left(C^T V_{xx} C\right) + x^T Qx + u^T Ru - \eta\right\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U}\left\{x^T A^T V_x + u^T B^T V_x + \frac{1}{2} trace\left(C^T V_{xx} C\right) + x^T Qx + u^T Ru - \eta\right\} = 0$$

Soit $V(x) = x^T Px$, où P est une matrice symétrique définie positive. L'équation de HJB est équivalente à

$$\inf_{u\in U}\{x^T A^T Px + x^T PAx + 2u^T B^T Px + x^T Qx + u^T Ru + trace\left(C^T PC\right) - \eta\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U}\{x^T A^T Px + x^T PAx + 2u^T B^T Px + x^T Qx + u^T Ru + trace\left(C^T PC\right) - \eta\} = 0$$

On remarque qu'on atteint le minimum pour u^* tel que:

$$2B^T Px + 2Ru^* = 0$$

alors

$$u^*(t) = R^{-1}B^T Px(t)$$

Remplaçons cette valeur de u* dans l'équation de HJB, on trouve

$$\Longleftrightarrow x^T A^T Px + x^T PAx + x^T Qx + 2u^{*T} B^T Px + u^{*T} Ru^* - \eta = 0$$

d'où on obtient

$$\Longleftrightarrow x^T\left(A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q\right)x + trace\left(C^T PC\right) - \eta = 0$$

On déduit que

$$\begin{cases} A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \\ trace\left(C^T PC\right) - \eta = 0 \end{cases}$$

Le contrôle optimal est

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T Px(t)$$

où P est la solution de l'équation de Riccati

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Comme (A, B) est stabilisable et (A, G) est détectable où $\mathrm{G}^T G = Q$, alors il existe une solution unique de l'équation algébrique de Riccati

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

et le coût minimal est

$$J(u^*) = trace\left(CC^T P\right)$$

Exercice 2

On utilise la programmation dynamique pour résoudre le problème de contrôle optimal

$$\inf_u E(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} x^\alpha \left(au(t)+b\right)^{1-\frac{1}{a}} dt$$

où $0<\alpha < 1, a > 1$ correspondant au système:

$$\begin{aligned} dx(t) &= \left(\mu - u(t)\right) x(t)dt + \sigma x(t) dw(t) \\ x(0) &= x_0 > 0 \end{aligned}$$

L'équation de Bellman correspondante à ce problème est

$$\inf_{u \in U} \left\{\mathcal{A}_u V_x + \Phi(x, u) - \lambda V(x)\right\} = 0,$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u \in \mathbb{R}} \left\{ (\mu - u)\, x V_x + x^\alpha \left(au+b\right)^{1-\frac{1}{a}} + \frac{1}{2} trace\left(\sigma x V_{xx} \sigma x\right) - \lambda V(x) \right\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \mu V_x x - x V_x u + x^\alpha \left(au+b\right)^{1-\frac{1}{a}} + \frac{1}{2} V_{xx} \sigma^2 x^2 - \lambda V(x) \right\} = 0$$

Soit $V(x) = Px^\alpha$, où $P>0$. L'équation de HJB est équivalente à

$$\Longleftrightarrow \inf_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \mu\alpha P x^\alpha - \alpha P x^\alpha u + x^\alpha \left(au+b\right)^{1-\frac{1}{a}} + \frac{1}{2}\sigma^2 \alpha\left(\alpha - 1\right) P x^\alpha - \lambda P x^\alpha \right\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u \in U} \{ \left(\mu\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha\left(\alpha-1\right) - \lambda\right) P x^\alpha - \alpha P x^\alpha u + x^\alpha \left(au+b\right)^{1-\frac{1}{a}} \} = 0$$

On remarque qu'on atteint le minimum pour u^* tel que:

$$-\alpha P x^\alpha + a\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(au+b\right)^{-\frac{1}{a}} x^\alpha = 0$$

alors

$$\left(au+b\right)^{-\frac{1}{a}} = \frac{\alpha}{a-1} P$$

$$u(t) = \frac{1}{a}\left(\frac{a-1}{\alpha}\right)^a P^{-a} - \frac{b}{a}$$

Remplaçons cette valeur de u* dans l'équation de HJB, on trouve

$$\left(\mu\alpha+\frac{1}{2}\sigma^{2}\alpha\left(\alpha-1\right)-\lambda\right)Px^{\alpha}-\alpha Px^{\alpha}\left(\frac{1}{a}\left(\frac{a-1}{\alpha}\right)^{a}P^{-a}-\frac{b}{a}\right)+\left(\left(\frac{a-1}{\alpha}\right)P^{-1}\right)^{a\left(\frac{a-1}{a}\right)}x^{\alpha}=0$$

on trouve

$$\left(\mu\alpha+\frac{1}{2}\sigma^{2}\alpha\left(\alpha-1\right)-\lambda-\frac{\alpha b}{a}\right)P-\frac{\alpha P}{a}\left(\frac{a-1}{\alpha}\right)^{a}P^{-a}-\left(\frac{a-1}{\alpha}\right)^{a-1}P^{1-a}=0$$

et le coût minimal est

$$J(u^{*})=Px_{0}^{\alpha}$$