SolutionTD 3

Théorie du Contrôle stochastique

Exercice 1

1. Etudions la stabilité en moment d'ordre 2 de l'équation:

$$\begin{aligned} dx(t) &= -x(t)dt + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x(t)dw(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

On a $A_0 = -I,\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. L'équation de Lyapunov correspondante à ce système est

$$A_0^T P + PA_0 + A_1^T PA_1 = -I_2$$

Soit $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$. On a

$$A_0^T P + PA_0 + A_1^T PA_1 = -I_2$$

$$\begin{aligned} &\iff -I_2P - PI_2 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -I_2 \\ &\iff -2\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4p_3 & -4p_2 \\ -4p_2 & 4p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &\iff -\begin{bmatrix} 4p_3 - 2p_1 & -6p_2 \\ -6p_2 & 4p_1 - 2p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -4p_3 + 2p_1 = -1 \\ -6p_2 = 0 \\ 4p_1 - 2p_3 = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} p_1 = -1/6 \\ p_2 = 0 \\ p_3 = -1/6 \end{cases} \end{aligned}$$

On a $p_1 < 0$, alors P n'est pas définie positive et ainsi le système n'est pas stable en moment d'ordre 2.

2. Considérons l'équation différentielle

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(x(t),t)dt + g(x(t),t)dw(t),\ t \geq t_0 \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{1}$$

f et g sont des fonctions vectorielles sur $\mathbb{R}^n \times [t_0, +\infty[$.
Supposons qu'ils existent une matrice définie positive Q et des constantes α_1, α_2 et α_3 telles que

$$x^T Qf(x,t) + (1/2)\, trace\,(g(x,t))^T\, Qg(x,t) \leq |\alpha_1|\, x^T Qx$$

et

$$\alpha_2 x^T Qx \leq \left|x^T Qg(x,t)\right| \leq \alpha_3 x^T Qx$$

pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, +\infty[$.

Soit $V(x) = \left(x^T Qx\right)^{\frac{p}{2}}$. Pour $x(t)$ la solution du système (1), on a

$$\begin{aligned} LV(x(t)) &= p\left(x(t)^T Qx(t)\right)^{\frac{p}{2}-1}\left(x^T Qf(x(t),t) + (1/2)\, trace\,(g(x,t))^T\, Qg(x,t)\right) \\ &\quad + p\left(\frac{p}{2} - 1\right)\left(x(t)^T Qx(t)\right)^{\frac{p}{2}-2}\left|x^T Qg(x,t)\right|^2 \end{aligned}$$

1/ Supposons que $\alpha_1 < 0$ .On a

$$\begin{aligned} LV(x(t)) &\leq p\left(x(t)^T Q x(t)\right)^{\frac{p}{2}-1}\left(\alpha_1 x^T Q x\right) + p\left(\frac{p}{2}-1\right)\left(x(t)^T Q x(t)\right)^{\frac{p}{2}-2}\left(\alpha_3 x^T Q x\right)^2 \\ &\leq -p\left(-\alpha_1 - \alpha_3^2\left(\frac{p}{2}-1\right)\right)\left(x(t)^T Q x(t)\right)^{\frac{p}{2}} \\ &= -p\left(|\alpha_1| - \alpha_3^2\left(\frac{p}{2}-1\right)\right)V(x(t)) \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} |\alpha_1| - \alpha_3^2\left(\frac{p}{2}-1\right) &> 0 \Longleftrightarrow \frac{p}{2} - 1 < \frac{|\alpha_1|}{\alpha_3^2} + 1 \\ &\Longleftrightarrow p < 2\left(1 + \frac{|\alpha_1|}{\alpha_3^2}\right) \end{aligned}$$

Pour $p < 2\left(1 + \frac{|\alpha_1|}{\alpha_3^2}\right)$, on obtient

$$LV(x(t)) \leq -KV(x(t)),\ K > 0$$

D'aprés le théorème de Lyapunov, on déduit que le système (1) est exponentiellement stable en moment d'ordre p.

2/ Supposons que $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2^2$ et $p < 2\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2^2}\right)$. On a

$$\begin{aligned} LV(x(t)) &\leq p\left(x(t)^T Q x(t)\right)^{\frac{p}{2}-1}\left(\alpha_1 x^T Q x\right) + p\left(\frac{p}{2}-1\right)\left(x(t)^T Q x(t)\right)^{\frac{p}{2}-2}\left(\alpha_2 x^T Q x\right)^2 \\ &\leq -p\left(-\alpha_1 - \alpha_2^2\left(\frac{p}{2}-1\right)\right)\left(x(t)^T Q x(t)\right)^{\frac{p}{2}} \\ &= -p\left(-\alpha_1 - \alpha_2^2\left(\frac{p}{2}-1\right)\right)V(x(t)) \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} -\alpha_1 - \alpha_2^2\left(\frac{p}{2}-1\right) &> 0 \Longleftrightarrow \frac{p}{2} - 1 < -\frac{\alpha_1}{\alpha_2^2} \\ &\Longleftrightarrow p > 2\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2^2}\right) \end{aligned}$$

alors le système (1) est exponentiellement stable en moment d'ordre p pour $p > 2\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2^2}\right)$.

Exercice 2

Considérons le système: $\begin{cases} dx(t) = (Ax(t) + Bu(t))\,dt + A_1 x(t) dw(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$,

1/ Montrons que si (A, A_1, B) est stabilisable alors (A, B) est stabilisable.

Supposons que le système (A_0, A_1, B) est stabilisable. Alors il existe F tel que le système en boucle fermé

$$\begin{cases} dx(t) = (A + BF)x(t)dt + A_1 x(t) dw(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

est stable en moment d'ordre 2. Alors il existe $X > 0$ solution de l'équation de Lyapunov

$$(A + BF)^T X + X(A + BF) + A_1^T X A + I = 0$$

ainsi

$$(A + BF)^T X + X(A + BF) = -\left(A_1^T X A + I\right)$$

Soit $Q = A_1^T X A + I$. Comme $X > 0$ alors $Q > 0$. Alors on déduit qu'il existe une solution $X > 0$ de l'équation de Lyapunov

$$(A + BF)^T X + X(A + BF) = -Q$$

ainsi il existe F tel que le système en boucle fermé

$$\left\{ \begin{array}{c} dx(t) = (A+BF)x(t)dt \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

est stable, d'où on déduit que (A,B) est stabilisable.

2/ Etudions la stabilisabilité du système $\left\{ \begin{array}{c} dx_1(t) = x_2(t)dt + ax_1(t)dw(t) \\ dx_1(t) = -x_1(t)dt + u(t)dt + bx_2(t)dw(t) \\ x_1(0) = x_0^1,\ x_2(0) = x_0^2 \end{array} \right.$. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

On obtient le système

$$\begin{aligned} dx(t) &= \begin{pmatrix} dx_1(t) \\ dx_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} dt + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} dw(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)dt \\ dx(t) &= A_0x(t)dt + A_1x(t)dw(t) + Bu(t)dt \end{aligned}$$

avec

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le système (A_0, A_1, B) est stabilisable si l'équation

$$A_0Y + YA_0^T + A_1YA_1^T + \Gamma^TB^T + B\Gamma + I = 0$$

admet une solution définie positive Y et dans ce cas le contrôle $u(t) = Fx(t) = \Gamma Y^{-1}x(t)$ stabilise le système .Soit $\Gamma = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}$. On a

$$A_0Y + YA_0^T + A_1YA_1^T + \Gamma^TB^T + B\Gamma + I = 0$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2y_2 + 1 & y_3 - y_1 \\ y_3 - y_1 & 1 - 2y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2y_1 & f_1 + aby_2 \\ f_1 + aby_2 & y_3b^2 + 2f_2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

:

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1a^2 + 2y_2 + 1 & f_1 - y_1 + y_3 + aby_2 \\ f_1 - y_1 + y_3 + aby_2 & y_3b^2 + 2f_2 - 2y_2 + 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_1a^2 + 2y_2 + 1 = 0 \\ f_1 - y_1 + y_3 + aby_2 = 0 \\ y_3b^2 + 2f_2 - 2y_2 + 1 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

dont la solution est $\left\{ \left\{ \left[\begin{array}{c} y_1 = -\frac{1}{a^3b^3+2a^2+2b^2}\left(4f_2 + ab^3 - 2b^2f_1 + 4\right), y_2 = \frac{1}{a^3b^3+2a^2+2b^2}\left(2a^2f_2 + a^2 - b^2 - a^2b^2f_1\right), \\ y_3 = -\frac{1}{a^3b^3+2a^2+2b^2}\left(4f_2 + a^3b + 2a^2f_1 + 2a^3bf_2 + 4\right) \end{array} \right] \right\} \right.$ si

S'il existe f_1 et f_2 tels que $y_1 > 0$, $y_3 > 0$ et $\det Y > 0$ alors le système est stabilisable

Exercice 3

Considérons le problème de contrôle optimal

$$\inf_u E \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}u^2(t)dt$$

correspondant au système:

$$\begin{aligned} dx(t) &= (\mu x(t) - u(t))\, dt + \sigma x(t) dw(t) \\ x(0) &= x_0 > 0 \end{aligned}$$

où $\lambda > 0$ et $\sigma > 0$ .L'équation de Bellman correspondante à ce problème est

$$\inf_{u \in U} \{\mathcal{A}_u V(x) - \lambda V(x) + \Phi(x,u)\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u \in U} \left\{ (\mu x(t) - u(t))\, V_x + \frac{1}{2} trace \left(\sigma^2 x^2 V_{xx}\right) + u^2 - \lambda V(x) \right\} = 0$$

Soit $V(x) = Px^2$. Alors on trouve

$$\Longleftrightarrow \inf_{u \in U} \left\{ 2\, (\mu x(t) - u(t))\, Px + \frac{1}{2} \left(\sigma^2 x^2 2P\right) + u^2 - \lambda P x^2 \right\} = 0 \tag{2}$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u \in U} \left\{ 2\mu P x^2 + \sigma^2 x^2 P - \lambda P x^2 - 2uPx + u^2 \right\} = 0$$

On remarque que le minimum est atteint pour u^* tel que

$$-2Px + 2u^* = 0$$

alors $u^*(t) = Px(t)$. On remplace cette valeur de u^* dans l'équation (2), on trouve

$$2\mu P x^2 + \sigma^2 x^2 P - \lambda P x^2 - 2P^2 x^2 + P^2 x^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow 2\mu P x^2 + \sigma^2 x^2 P - \lambda P x^2 - P^2 x^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (\left(2\mu + \sigma^2 - \lambda\right) P - P^2) x^2 = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On obtient ainsi

$$-P^2 + \left(2\mu + \sigma^2 - \lambda\right) P = 0$$

d'où

$$P = 2\mu + \sigma^2 - \lambda$$

ainsi le contrôle optimal est $u^*(t) = Px(t) = \left(2\mu + \sigma^2 - \lambda\right) x(t)$ et le coût minimal est

$$J^* = PE({x_0}^2) = \left(2\mu + \sigma^2 - \lambda\right) {x_0}^2$$

Exercice 4

En utilisant la programmation dynamique, on va résoudre le problème de contrôle optimal:

$$\lim_{T \to +\infty} E(\frac{1}{T} \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt)$$

correspondant au système

$$\begin{aligned} dx(t) &= (Ax(t)dt + Bu(t))\, dt + B_1 x(t) dw_1(t) + B_2 u(t) dw_2(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

L'équation de Bellman correspondante à ce problème est

$$\inf_{u \in U} \{\mathcal{A}_u V_x + \Phi(x,u) - \eta\} = 0,$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U} \left\{\mathcal{A}_u V_x + x^T Q x + u^T R u - \eta\right\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U} \left\{x^T A^T V_x + u^T B^T V_x + \frac{1}{2} trace\left(C^T V_{xx} C\right) + x^T Q x + u^T R u - \eta\right\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U} \left\{x^T A^T V_x + u^T B^T V_x + \frac{1}{2} trace\left(\begin{pmatrix} B_1 x & B_2 u \end{pmatrix}^T V_{xx} \begin{pmatrix} B_1 x & B_2 u \end{pmatrix}\right) + x^T Q x + u^T R u - \eta\right\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U} \{x^T A^T V_x + u^T B^T V_x + x^T Q x + u^T R u - \eta$$

$$+\frac{1}{2} trace\left(\begin{pmatrix} x^T B_1^T \\ u^T B_2^T \end{pmatrix} V_{xx} \begin{pmatrix} B_1 x & B_2 u \end{pmatrix}\right)\} = 0$$

Soit $V(x) = x^T P x$, où P est une matrice symétrique définie positive. L'équation de HJB est équivalente à

$$\inf_{u\in U} \{x^T A^T P x + x^T P A x + 2u^T B^T P x + x^T Q x + u^T R u$$

$$+trace\left(\begin{pmatrix} x^T B_1^T \\ u^T B_2^T \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} B_1 x & B_2 u \end{pmatrix}\right) - \eta\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U} \{x^T A^T P x + x^T P A x + 2u^T B^T P x + x^T Q x + u^T R u$$

$$+x^T B_1^T P B_1 x + u^T B_2^T P B_2 u - \eta\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \inf_{u\in U} \{x^T A^T P x + x^T P A x + x^T Q x - \eta$$

$$+x^T B_1^T P B_1 x + 2u^T B^T P x + u^T \left(B_2^T P B_2 + R\right) u\} = 0$$

On remarque qu'on atteint le minimum pour u^* tel que:

$$2B^T P x + 2\left(B_2^T P B_2 + R\right) u^* = 0$$

alors

$$u^*(t) = -\left(B_2^T P B_2 + R\right)^{-1} B^T P x(t)$$

Remplaçons cette valeur de u* dans l'équation de HJB, on trouve

$$\Longleftrightarrow x^T A^T P x + x^T P A x + x^T Q x + x^T B_1^T P B_1 x$$

$$+ 2u^{*T} B^T P x + u^{*T} \left(B_2^T P B_2 + R\right) u^* - \eta = 0$$

d'où on obtient

$$\Longleftrightarrow x^T \left(A^T P + P A - P B \left(B_2^T P B_2 + R\right)^{-1} B^T P + B_1^T P B_1 + Q\right) x = 0$$

On déduit que

$$A^T P + P A - P B \left(B_2^T P B_2 + R\right)^{-1} B^T P + B_1^T P B_1 + Q = 0$$

Le contrôle optimal est

$$u^*(t) = -\left(B_2^T P B_2 + R\right)^{-1} B^T P x(t)$$

où P est la solution de l'équation de Riccati

$$A^T P + P A - P B \left(B_2^T P B_2 + R\right)^{-1} B^T P + B_1^T P B_1 + Q = 0$$