Solution TD N1

1. Considérons l'équation différentielle stochastique
$$\begin{aligned} dx(t) &= Ax(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i x(t) dw_i(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{1}$$
où A et B_i sont des matrices et $w_i(t)$, $i = 1, ..., m$, sont des mouvement Browniens. On suppose que
$$AB_i = B_i A \ \text{ et } B_i B_j = B_j B_i, \ i, \ j = 1, ..., m$$
Montrons que $\Phi(t)$ satisfait l'équation (1). On a
$$\Phi(t) = \exp\left\{ \left(A - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} B_i^2 \right)(t - t_0) + \sum_{i=1}^{m} B_i \left(w_i(t) - w_i(t_0) \right) \right\}$$
Soit
$$dz(t) = \left(A - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} B_i^2 \right) dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t) dw_i(t)$$
Appliquons la formule d'Itô sur $\Phi(t) = \exp(z(t))$, on trouve
$$\begin{aligned} d\Phi(t) &= \exp(z(t))dz(t) + \frac{1}{2}\exp(z(t))\sum_{i=1}^{m} B_i^2 dt \\ &= \Phi(t)\left(\left(A - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} B_i^2 \right) dt + \sum_{i=1}^{m} B_i dw_i(t) \right) + \frac{1}{2}\Phi(t)\sum_{i=1}^{m} B_i^2 dt \\ &= \Phi(t)Adt - \frac{1}{2}\Phi(t)\sum_{i=1}^{m} B_i^2 dt + \Phi(t)\sum_{i=1}^{m} B_i dw_i(t) + \frac{1}{2}\Phi(t)\sum_{i=1}^{m} B_i^2 dt \\ &= \Phi(t)Adt + \Phi(t)\sum_{i=1}^{m} B_i(t) dw_i(t) \\ &= A\Phi(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\Phi(t) dw_i(t) \end{aligned}$$
et comme
$$\Phi(t_0) = \exp\left\{ \left(A - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} B_i^2 \right)(t_0 - t_0) + \sum_{i=1}^{m} B_i \left(w_i(t_0) - w_i(t_0) \right) \right\} = I_n$$
alors $\Phi(t)$ satisfait
$$\begin{aligned} d\Phi(t) &= A\Phi(t)(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i \Phi(t)(t) dw_i(t) \\ \Phi(t_0) &= I_n \end{aligned}$$

2. La solution du système (1) est donné par
$$x(t) = \Phi(t)x_0 = \exp\left\{ \left(A - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} B_i^2 \right)(t - t_0) + \sum_{i=1}^{m} B_i \left(w_i(t) - w_i(t_0) \right) \right\} x_0$$
Dans le cas scalair, on a
$$\begin{aligned} E\left|x(t)\right|^p &= \exp\left(p\left(A - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} B_i^2 \right)(t - t_0) \right) \exp p^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} B_i^2 (t - t_0) E\left|x_0\right|^p \\ &= \exp\left(p\left(A + \frac{1}{2}(p-1)\sum_{i=1}^{m} B_i^2 \right)(t - t_0) \right) E\left|x_0\right|^p \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\lim_{t\longrightarrow+\infty} E\,|x(t)|^p \quad &= \quad 0 \Longleftrightarrow A+\frac{1}{2}(p-1)\sum_{i=1}^{m}B_i^2<0\\ &\Longleftrightarrow \quad A<\frac{1}{2}(1-p)\sum_{i=1}^{m}B_i^2\end{aligned}$$

3. Soit Q une matrice définie positive. Soit la fonction de Lyapunov $V(x)=x^TPx$, où P est une matrice définie positive solution de l'équation .

$$A^TP+PA+\sum_{i=1}^{m}B_i^TPB_i=-Q$$

Alors V est une fonction définie positive. En calculant LV(x) avec x solution de l'équation (1), on obtient

$$LV(x)=-x^TQx<0$$

(les détailles de ce calcule est à faire par l'étudiant dans le cadre du devoir à domicile). Alors il existe une fonction de Lyapunov définie positive P telle que LV est définie négative. D'aprés le théorème de Lyapunov, l'équation (1) est stable en moment d'ordre 2.

4. Supposons que $A+A^T=c_1I$ et $B_i=d_iI$, $i=1,...,m$. Etudions la stabilité en moment d'ordre 2 de l'équation (1) dans ce cas. L'équation de Lyapunov correspondante est

$$A^TP+PA+\sum_{i=1}^{m}B_i^TPB_i=-Q$$

$$\Longleftrightarrow A^TP+PA+\sum_{i=1}^{m}d_i^2P=-Q$$

Si on prend $P=I_n$, et $Q=-\left(c_1+\sum\limits_{i=1}^{m}d_i^2\right)I$, avec $c_1+\sum\limits_{i=1}^{m}d_i^2<0$, on obtient

$$A^T+A+\sum_{i=1}^{m}d_i^2=-\left(c_1I+\sum_{i=1}^{m}d_i^2\right)$$

comme $A+A^T=c_1I$, alors

$$c_1I+\sum_{i=1}^{m}d_i^2=\left(c_1I+\sum_{i=1}^{m}d_i^2\right)$$

Donc on peut déduire que si $c_1+\sum\limits_{i=1}^{m}d_i^2<0$, alors il existe une solution définie positive pour l'équation de Lyapunov

$$A^TP+PA+\sum_{i=1}^{m}d_i^2P=-Q$$

d'où on déduit que le système est stable en moment d'ordre 2.