Université de Batna Batna,
2020/2021
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

$2^{éme}$ année Master

TD 2 (Solution)
Théorie du Contrôle stochastique

Exercice 1

Soit le système

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_1(t) = x_2(t)dt + ax_2(t)dw(t) \\ dx_2(t) = x_1(t)dt + u(t)dt + bx_2(t)dw(t) \end{array} \right. . \tag{1}$$

où a et b sont des constantes réelles.

1. Soit $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} dx(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \right) dt + \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} dw(t) \\ &= \left(A_0 x(t) + Bu(t) \right) dt + A_1 x(t) dw(t). \end{aligned}$$

où $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

2. Le système (A_0, A_1).est stable en moment d'ordre 2 si et seulement s'il existe une solution définie positive de l'équation

$$A_0^T X + X A_0 + A_1^T X A_1 + I_2 = 0$$

Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}$. On a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

:

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_2 & x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 & 2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a(ax_1 + bx_2) + b(ax_2 + bx_3) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_2 + 1 & x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 & 2x_2 + a(ax_1 + bx_2) + b(ax_2 + bx_3) + 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x_2+1=0 \\ x_1+x_3=0 \\ 2x_2+a\left(ax_1+bx_2\right)+b\left(ax_2+bx_3\right)+1=0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_2=\frac{-1}{2} \\ x_1=-x_3 \\ -1+a\left(ax_1-b\right)-bx_1+1=0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \begin{array}{c} x_2=\frac{-1}{2} \\ x_1=-x_3 \\ x_1=\frac{ab}{(a^2-b)} \end{array}$$

comme $x_1=-x_3$ alors X ne peut pas être définie positive. Donc Le système (A_0,A_1).n'est pas stable en moment d'ordre 2

2 .On montre tout d'abord que (A_0,A_1,B) est stabilisable. Le système (A_0,A_1,B) est stabilisable si l'équation

$$A_0Y+YA_0^T+A_1YA_1^T+\Gamma^TB^T+B\Gamma+I=0$$

admet une solution définie positive Y et dans ce cas le contrôle $u(t)=Fx(t)=\Gamma Y^{-1}x(t)$ stabilise le système .Soit $\Gamma=\left(\begin{array}{cc} f_1 & f_2 \end{array}\right)$ et $Y=\left[\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{array}\right]$. On a

$$A_0Y+YA_0^T+A_1YA_1^T+\Gamma^TB^T+B\Gamma+I=0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\left[\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{array}\right]+\left[\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{array}\right]\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$+\left(\begin{array}{cc} 0 & a \\ 0 & b \end{array}\right)\left[\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{array}\right]\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ a & b \end{array}\right)+\left(\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} f_1 & f_2 \end{array}\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc} 2y_2+1 & y_1+y_3 \\ y_1+y_3 & 2y_2+1 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} a^2y_3 & f_1+aby_3 \\ f_1+aby_3 & y_3b^2+2f_2 \end{array}\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc} y_3a^2+2y_2+1 & f_1+y_1+y_3+aby_3 \\ f_1+y_1+y_3+aby_3 & y_3b^2+2f_2+2y_2+1 \end{array}\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_3a^2+2y_2+1=0 \\ f_1+y_1+y_3+aby_3=0 \\ y_3b^2+2f_2+2y_2+1=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_3=\frac{2f_2}{a^2-b^2} \\ y_1=-f_1-\left(1+ab\right)y_3=-f_1-2\frac{(1+ab)}{a^2-b^2}f_2 \\ y_2=\left(-1-a^2y_3\right)/2=\frac{a^2}{b^2-a^2}f_2-\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

pour $f_1=0$ et $f_2=a^2-b^2$, on trouve $y_3=2$, $y_1=-2\left(1+ab\right)$ et $y_2=-a^2-\frac{1}{2}$. ainsi si $1+ab<0$, alors le système (A_0,A_1,B) est stabillisable.

On cherche maintenant un contrôle stabilisant. On a

$$\begin{aligned} \Gamma Y^{-1} &= \left(\begin{array}{cc} f_1 & f_2 \end{array}\right)\left[\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{array}\right]^{-1}=\left(\begin{array}{cc} 0 & a^2-b^2 \end{array}\right)\left[\begin{array}{cc} -2\left(1+ab\right) & -a^2-\frac{1}{2} \\ -a^2-\frac{1}{2} & 2 \end{array}\right]^{-1} \\ &= \left(\begin{array}{cc} 0 & a^2-b^2 \end{array}\right)\left[\begin{array}{cc} -\frac{8}{4a^4+4a^2+16ba+17} & -\frac{4a^2+2}{4a^4+4a^2+16ba+17} \\ -\frac{4a^2+2}{4a^4+4a^2+16ba+17} & \frac{8ab+8}{4a^4+4a^2+16ba+17} \end{array}\right] \\ &= \frac{2\left(a^2-b^2\right)}{4a^4+4a^2+16ba+17}\left[\begin{array}{cc} -\left(2a^2+1\right) & 4\left(ab+1\right) \end{array}\right] \end{aligned}$$

alors le contrôle

$$u(t)=\frac{2\,(a^2-b^2)}{4a^4+4a^2+16ba+17}\left[\,-(2a^2+1)\quad 4\,(ab+1)\,\right]\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$$

stabilise le système.
3. Montrons que le système (A_0, A_1, B) est contrôlable. On a

$$rang\,(B, A_0B) = rang\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 2$$

alors (A_0, B) est contrôlable et ainsi (B, A_0, A_1) est contrôlable.
4. Considérons le problème de Contrôle optimale:

$$\limsup_{T\to+\infty} E\left(\frac{1}{T}\int_0^T (x_1^2(t)+u^2(t))dt\right) \tag{2}$$

correspondant au système (1).
a. C'est un problème de contrôle optimal à horizon infinie. Pour montrer qu'il admet une solution unique on montre que (A_0, B) est stabilisable et que (G, A_0) est détectable où $G^TG = Q$.
Comme (A_0, B) est contrôlable alors, d'aprés les résultats de la théorie de contrôle des sytèmes déterministes, le système (A_0, B) est stabilisable.
Soit

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{T}\int_0^T (x_1^2(t)+u^2(t))dt\\ &= \frac{1}{T}\left(\int_0^T (x_1(t), x_2(t))\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} + u^2(t))dt\right)\\ &= \frac{1}{T}\left(\int_0^T \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}^T Q\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} + Ru(t))dt\right) \end{aligned}$$

avec $Q=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $R = 1$. On remarque que

$$\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

alors la matrice G telle que $G^TG = Q$ est $G = \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix}$. Montrons que (G, A_0) est détectable. On a

$$rang\begin{pmatrix} G\\ GA_0\end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 2$$

Alors (G, A_0) est observable et d'aprés les résultats de la théorie de contrôle des sytèmes déterministes, le système (G, A_0) est détectable. .(A_0, B) est stabilisable et (G, A_0) est détectable alors le problème de contrôle optimal (2) admet une solution unique.
b. Trouvons le contrôle optimal. D'aprés le cours, le contrôle optimal est donné par $u^*(t) = -R^{-1}B^TPx(t)$ où P est la solution de l'équation de Riccati

$$A_0^TP + PA_0 - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$

Soit $P=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}$. On a

$$A_0^T P + P A_0 - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad -\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2p_2 & p_1+p_3 \\ p_1+p_3 & 2p_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-p_2^2 & -p_2p_3 \\ -p_2p_3 & -p_3^2 \end{pmatrix}=0$$
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -p_2^2+2p_2+1 & p_1+p_3-p_2p_3 \\ p_1+p_3-p_2p_3 & 2p_2-p_3^2 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} -p_2^2+2p_2+1=0 \\ p_1+p_3-p_2p_3=0 \\ 2p_2-p_3^2=0 \end{cases}$$

dont la solution est : $\left[\begin{array}{c} p_1=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}=3.1075, \\ p_2=\sqrt{2}+1, ,p_3=\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1} \end{array}\right]$. Alors le contrôle optimal est

$$\begin{aligned}
u^*(t) &= -R^{-1}B^T P x(t) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} x(t) \\
&= -\begin{pmatrix} p_2 & p_3 \end{pmatrix} x(t) = -p_2 x_1(t) - p_3 x_2(t) \\
&= -\left(\sqrt{2}+1\right) x_1(t) - \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1 x_2(t)}
\end{aligned}$$

5. Considérons l'équation

$$A_0^T X + X A_0 + A_1^T X A_1 + M = 0$$

On a

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_2+1 & x_1+x_3 \\ x_1+x_3 & 2x_2+a\left(ax_1+bx_2\right)+b\left(ax_2+bx_3\right) \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} 2x_2+1=0 \\ x_1+x_3=0 \\ 2x_2+a\left(ax_1+bx_2\right)+b\left(ax_2+bx_3\right) \end{cases}$$

de la deuxième équation de ce système on remarque que $x_1=-x_3$, alors X ne peut pas être définie positive.

Exercice 2

Considérons le système décrit par la paire d'équations:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \sigma w(t) \\ \dot{y}(t) = \beta u(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$. Pour $T > 0$, on considère la fonctionnelle:

$$J(u) = E\left[\frac{a}{T}\int_0^T (x(t) + y(t))^2 \, dt + \frac{b}{T}\int_0^T (u(t))^2 \, dt\right]$$

où a, $b > 0$. Soit $z(t) = x(t) + y(t)$. On a

$$\begin{cases} dz(t) = dx(t) + dy(t) = \sigma dw(t) + \beta u(t)dt \\ z(0) = x(0) + y(0) = x_0 + \sigma w(0) + y_0 = x_0 + y_0 \end{cases}$$

on obtient le système

$$\begin{cases} dz(t) = \beta u(t)dt + \sigma dw(t), \; t > 0 \\ z(0) = x_0 + y_0 \end{cases}$$

Pour la fonction coût on obtient

$$J(u) = E\left[\frac{a}{T}\int_0^T z(t)^2 dt + \frac{b}{T}\int_0^T (u(t))^2 \, dt\right]$$

alors on obtient le problème de contrôle optimal

$$\inf J(u) = E\left[\frac{a}{T}\int_0^T z(t)^2 dt + \frac{b}{T}\int_0^T (u(t))^2 \, dt\right]$$

sous contraintes

$$\begin{cases} dz(t) = \beta u(t)dt + \sigma dw(t), \; t > 0 \\ z(0) = x_0 + y_0 \end{cases}$$

C'est un problème de contrôle optimal quadratique avec

$$A = 0, \; B = \beta, \; A_1 = \sigma, \; Q = \frac{a}{T}, \; R = \frac{b}{T}$$

Le contrôle optimal est donné par

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P z(t)$$

où P est la solution de l'équation différentielle de Riccati

$$\dot{P}(t) + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \; P(T) = 0$$

On a

$$\dot{P}(t) + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \dot{P}(t) - \frac{T}{b}\beta^2 P(t)^2 + \frac{a}{T} = 0\\
&\iff \dot{P}(t) = \frac{T}{b}\beta^2 P^2 - \frac{a}{T} = 0\\
&\iff \dot{P}(t) = \frac{T}{b}\beta^2 \left(P(t) - \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(P(t) + \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)
\end{aligned}
$$

On trouve

$$
\begin{aligned}
2T\frac{\beta}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\frac{dP(t)}{P(t) - \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}} - \frac{dP(t)}{\left(P(t) + \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)}\right) &= \frac{T}{b}\beta^2 dt\\
\left(\frac{dP(t)}{P(t) - \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}} - \frac{dP(t)}{\left(P(t) + \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)}\right) &= \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \left(\int_t^T \frac{dP(s)}{P(s) - \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}} - \int_t^T \frac{dP(s)}{\left(P(s) + \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)}\right) = \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\int_t^T ds\\
&\iff \ln\left|\frac{P(T) - \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}}{P(t) - \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}}\right| - \ln\left|\frac{P(T) + \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}}{P(t) + \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}}\right|_t^T = \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}(T-t)\\
&\iff \ln\left|\frac{-\frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}}{P(t) - \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}}\right| - \ln\left|\frac{\frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}}{P(t) + \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}}\right| = \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}(T-t)\\
&\iff \ln\left|\frac{P(t) + \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}}{P(T) - \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}}\right| = \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}(T-t)\\
&\iff \frac{P(t) + \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}}{P(t) - \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}} = \exp\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}(T-t)\right)\\
&\iff \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}\left(1 + \exp\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}(T-t)\right)\right) = \left(\exp\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}(T-t)\right) - 1\right)P(t)\\
&\implies P(t) = \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}\left(1 + \exp\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}(T-t)\right)\right) / \left(\exp\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}(T-t)\right) - 1\right)
\end{aligned}
$$

Alors le contrôle optimal est

$$
\begin{aligned}
u^*(t) &= -\frac{\beta T}{b}P(t)z(t)\\
&= -\sqrt{\frac{a}{b}}\left(\exp\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}(T-t)\right) + 1\right) / \left(\exp\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}(T-t)\right) - 1\right)(x(t) + y(t))
\end{aligned}
$$

Le coût minimal est

$$
J^* = P(0)z(0)^2 = \frac{1}{T}\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{a}{b}}\left(\left(\exp\left(\frac{\beta T}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\right) + 1\right) / \left(\exp\left(\frac{\beta T}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\right) - 1\right)\right)(x_0 + y_0)^2
$$