Université de Batna
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques Batna, 2020/2021

$2^{ème}$ année Master

TD 3

Théorie du Contrôle stochastique

Exercice 1

1. Etudier la stabilité en moment d'ordre 2 de l'équation:

$$\begin{aligned} dx(t) &= -x(t)dt + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x(t)dw(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

2. Considérons l'équation différentielle

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(x(t),t)dt + g(x(t),t)dw(t),\ t \geq t_0 \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{1}$$

f et g sont des fonctions vectorielles sur $\mathbb{R}^n \times [t_0, +\infty[$.
Supposons qu'ils existent une matrice définie positive Q et des constantes α_1, α_2 et α_3 telles que

$$x^T Q f(x,t) + (1/2)\, trace\, (g(x,t))^T\, Q g(x,t) \leq \alpha_1 x^T Q x$$

et

$$\alpha_2 x^T Q x \leq \left| x^T Q g(x,t) \right| \leq \alpha_3 x^T Q x$$

pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, +\infty[$. Montrer que
1/ Si $\alpha_1 < 0$, alors le système (1) est exponentiellement stable en moment d'ordre p pour $p < 2 + 2\left|\alpha_1\right| / \alpha_3^2$.
2/ Si $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2^2$, alors le système (1) est exponentiellement stable en moment d'ordre p pour $p < 2 - 2\alpha_1/\alpha_2^2$.

Exercice 2

Considérons le système: $\begin{cases} dx(t) = (Ax(t) + Bu(t))\, dt + A_1 x(t)dw(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$,
1/ Montrer que si (A, A_1, B) est stabilisable alors (A, B) est stabilisable.
2/ Etudier la stabilisabilité du système $\begin{cases} dx_1(t) = x_2(t)dt + ax_1(t)dw(t) \\ dx_1(t) = -x_1(t)dt + u(t)dt + bx_2(t)dw(t) \\ x_1(0) = x_0^1,\ x_2(0) = x_0^2 \end{cases}$

Exercice 3

Résoudre le problème de contrôle optimal

$$\inf_u E \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} u^2(t) dt$$

correspondant au système:

$$\begin{aligned} dx(t) &= (\mu x(t) - u(t))\, dt + \sigma x(t) dw(t) \\ x(0) &= x_0 > 0 \end{aligned}$$

où $\lambda > 0$ et $\sigma > 0$.

Exercice 4

Soit le système

$$\begin{aligned} dx(t) &= (Ax(t)dt + Bu(t))\, dt + C dw(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

où A, B et C sont des matrices données. $(w(t))$ est un processus de Wiener scalaire. Supposons que:

a. (A, B) est stabilisable.

b. (A, D) est détectable, où $DD^T = Q$, Q est une matrice semi-définie positive.

En utilisant la programmation dynamique, résoudre le problème de contrôle optimal:

$$\lim_{T \to +\infty} E(\frac{1}{T} \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt)$$

correspondant au système

$$\begin{aligned} dx(t) &= (Ax(t)dt + Bu(t))\, dt + B_1 x(t) dw_1(t) + B_2 u(t) dw_2(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$