Université de Batna 2 Batna, 2020/2021

Département de Mathématiques

$2^{éme}$ année Mastère

TD 1

Stabilité stochastique

Exercice

1. Considérons l'équation différentielle stochastique

$$
\begin{aligned}
dx(t) &= Ax(t)dt + \sum_{i=1}^{m} B_i x(t) dw_i(t) \\
x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n
\end{aligned} \tag{1}
$$

   où A et B sont des matrices et $w_i(t)$, $i = 1, ..., m$, sont des mouvement Browniens. On suppose que:

$$AB_i = B_i A \ \text{ et } B_i B_j = B_j B_i, \ i, \ j = 1, ..., m$$

   Montrer que la solution de l'équation (1) est donnée par

$$x(t) = \Phi(t) \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) dy(s) \right]$$

   où $\Phi(t) = \exp \left\{ \left(A - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} B_i^2 \right) (t - t_0) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t) \left(w_i(t) - w_i(t_0) \right) \right\}$.

2. Etudier la stabilité en moment d'ordre p de l'équation (1).

3. En utilisant la fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, où P est une matrice définie positive solution de l'équation

$$A^T P + PA + \sum_{i=1}^{m} B_i^T P B_i = -Q$$

   $Q \succ 0$, montrer que le système (1) est stable en moment d'ordre 2.

4. Supposons que $A + A^T = c_1 I$ et $B_i = d_i I$, $i = 1, ..., m$. Etudier la stabilité en moment d'ordre 2 de l'équation (1) dans ce cas.