1ère année Master
Option: Mathématiques Appliquées

TD 2

Equation différentielles stochastiques

Exercice 1

Soit $(w(t))_{t\geq 0}$ le mouvement brownien standard. Considérons l'équation différentielle stochastique:

$$\begin{aligned} dx(t) &= \mu x(t)dt + \sigma x(t)dw(t),\ t \geq 0 \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où σ, $\mu \in \mathbb{R}$.

1. Donner la solution de cette équation.
2. Montrer que pour tout a$\in \mathbb{R}$, le processus $x_a(t) = e^{at}x(t)$ vérifie

$$dx_a(t) = (a+\mu)\, x_a(t)dt + \sigma x_a(t)dw(t)$$

En déduire la solution de l'équation

$$dy(t) = \sigma y(t)dw(t)$$

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles stochastiques suivantes:

1. $$dy(t) = -\frac{1}{2}e^{-2y(t)}dt + e^{-y(t)}dw(t), t \geq 0$$

2. $$\begin{cases} dy(t) = \frac{b-y(t)}{1-t}dt + dw(t),\ 0 \leq t < 1 \\ y(0) = a \end{cases}$$

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\begin{cases} dx(t) = \left(\frac{2}{1+t}x(t) + b(1+t)^2\right)dt + b(1+t)^2 dw(t),\ t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $b \in \mathbb{R}$. Calculer $E(x(t))$ et $E(x^2(t))$.

Exercice 4

Considérons l'équation différentielle stochastique scalaire

$$\begin{aligned} dx(t) &= (a + x(t)dt + (b + x(t))\, dw(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où a, b sont des constantes et w est le mouvement Brownien standard.
a. Montrer que cette équation admet une solution unique.
b. Donner la solution de cette équation.
b. Calculer $E(x(t))$ et la variance $var(x(t))$.