Université de Batna
Batna, 2020/2021

Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

$2^{éme}$ année Master

TD 2
Théorie du Contrôle stochastique

Exercice 1

Soit le système

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_1(t) = x_2(t)dt + ax_2(t)dw(t) \\ dx_2(t) = x_1(t)dt + u(t)dt + bx_2(t)dw(t) \end{array} \right. . \tag{1}$$

où a et b sont des constantes réelles.

1. Présenter le système (1) sous la forme

$$dx(t) = (A_0x(t) + Bu(t))\,dt + A_1x(t)dw(t)$$

2. Etudier la stabilité en moment d'ordre 2 du système (A_0, A_1).
2. Donner un contrôle qui stabilise le système (A_0, A_1, B) s'il existe.
3. Montrer que le système (A_0, A_1, B) est contrôlable.
4. Considérons le problème de Contrôle optimale:

$$\limsup_{T\to+\infty} E(\frac{1}{T}\int_0^T (x_1^2(t) + u^2(t))dt) \tag{2}$$

correspondant au système (1).
a. Montrer que le problème de contrôle optimal (2) admet une solution unique.
b. Trouver le contrôle optimal.
5. Montrer que l'équation

$$A_0^T X + XA_0 + A_1^T XA_1 + M = 0$$

admet une solution unique définie positive X, où $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Considérons le système décrit par la paire d'équations:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + \sigma w(t) \\ \dot{y}(t) = \beta u(t) \\ y(0) = y_0 \end{array} \right.$$

où $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$. Pour $T > 0$, on considère la fonctionnelle:

$$J(u) = E\left[\frac{a}{T}\int_0^T (x(t) + y(t))^2\,dt + \frac{b}{T}\int_0^T (u(t))^2\,dt\right]$$

où a, $b > 0$. Résoudre le problème du contrôle optimal inf $J(u)$.