

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE BATNA 2 MOSTEFA BEN BOULAIID
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MECANIQUE



NOTES DE COURS

METHODE DES ELEMENTS FINIS

ANALYSE DES STRUCTURES
PAR ELEMENTS FINIS
(ANALYSE STATIQUE)

Par

Wahid KADDOURI

Batna, 2017

NOMENCLATURE

σ	Contraintes normales.
τ	Contraintes tangentielles.
ε	Déformation normale.
γ	Déformation de cisaillement.
l	Déplacement.
x, y, z	Coordonnées cartésiennes en repère local.
X, Y, Z	Coordonnées cartésiennes en repère global.
u, v, w	Déplacement dans les trois directions x,y et z en repère local.
$[B]$	Matrice liant les déformations aux déplacements.
$[D]$	Matrice liant les contraintes aux déplacements.
$[T]$	matrice de transformation.
N	Les fonctions d'interpolation ou de forme.
$[k]_l$	Matrice de rigidité élémentaire en repère local.
$[k]_g$	Matrice de rigidité élémentaire en repère global.
$[K]$	Matrice de rigidité globale.
$\{f_e\}_l$	Vecteur forces élémentaire en repère local.
$\{f_e\}_g$	Vecteur forces élémentaire en repère global.
$\{F\}$	Vecteur forces globales.
$\{q_e\}$	Degrés de liberté de l'élément.
R	Réactions aux appuis.
α	Angle d'inclinaison de l'élément.
I	Moment d'inertie.
A	La section de l'élément.
L	La longueur de l'élément.

ν	Coefficient de Poisson.
E	Module de Young.
G	Module de cisaillement.
E_p	Energie potentielle.
W	Energie de déformation
T	Travail des forces extérieures.
q	Densité d'une charge répartie
q_x	Composante suivant la direction x de la densité q
q_y	Composante suivant la direction y de la densité q

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels sur la mécanique du solide	3
1.1 Forces extérieures	3
1.1.1 Forces volumiques	3
1.1.2 Forces surfaciques	4
1.1.3 Forces ponctuelles	4
1.2 Contraintes :	4
1.2.1 Équations d'équilibre	6
1.3 Déformations	6
1.3.1 Déplacements	6
1.3.2 Déformations	6
1.3.3 Relations entre déplacements et déformations	8
1.4 Relations entre déformations et contraintes	9
1.5 Relations entre contraintes et déformations	10
1.5.1 État plan de contrainte et de déformation	11
1.5.1.1 Déformations planes	11
1.5.1.2 Contraintes planes	12
1.6 Énergie de déformation élastique	13
1.6.1 Cas du chargement uniaxial	13
2 Méthode des éléments finis en statique	15
2.1 Approximation nodale – fonctions de forme	15
2.2 Résolution	16
2.2.1 Énergie de déformation élémentaire	17
2.2.2 Travail élémentaire des forces de volume et de surface	17

2.2.3	Assemblage des matrices élémentaires	18
2.2.4	Introduction des conditions d'appui	19
3	Éléments de Ressort et de Barre	20
3.1	Élément de ressort	20
3.2	Élément fini de barre 1D	23
3.2.1	Caractéristiques d'une barre	23
3.2.2	Champ des déplacements	23
3.2.3	Champ des déformations	23
3.2.4	Champ des contraintes	23
3.2.5	Matrice de rigidité	24
3.2.6	Vecteur charges équivalentes	26
4	Élément de barre pour le calcul des treillis plans	28
4.1	Formulation de l'élément de barre 2D	28
4.1.1	Repères local et global	28
4.1.2	Changement de repère	29
4.1.3	Matrice de rigidité élémentaire $[k]_g$ en repère global	31
4.1.4	Vecteur forces équivalentes $\{f_n\}$ en repère global	31
4.1.5	Conditions aux limites	32
4.2	Exercice 1	32
4.3	Exercice 2	33
5	Élément Fini de poutre 1D (Poutre de Bernoulli)	34
5.1	Équation générale des poutres planes	34
5.2	Matrices de rigidité élémentaires en repère local	37
5.2.1	Champ de déplacement transversal $v(x)$	37
5.2.2	Relation déformations-déplacements	38
5.2.3	Relation contraintes-déformations	39
5.2.4	Matrice de rigidité	40
5.3	Vecteur charges équivalentes en repère local	41
5.4	Exercice 1	41
5.5	Exercice 2	42

6	Elément fini de Portique	43
6.1	Champ de déplacement axial $u(x)$	43
6.2	Champ de déplacement transversal $v(x)$	44
6.3	Champ de déformation	44
6.4	Matrices de rigidité élémentaires en repère local	45
6.5	Matrice de rigidité élémentaire en repère global	46
6.5.1	Changement de repère	46
6.6	Vecteur charges équivalentes	48
6.7	Exercice	50

Table des figures

1.1	Exemple de force de volume	3
1.2	Exemple de force de surface	4
1.3	Exemple de force ponctuelle	4
1.4	Illustration de contraintes	5
1.5	Équilibre de volume.	5
1.6	Vecteur déplacement.	7
1.7	Déformations planes	8
1.8	Etat plan de déformation.	11
1.9	Etat plan de contrainte	12
1.10	Energie de déformation uniaxiale.	13
1.11	Énergie de déformation de cisaillement.	14
2.1	Pièce mécanique (a) Modèle solide; (b) Modèle éléments finis.	15
3.1	Élément de ressort	20
3.2	Équilibre du ressort	21
3.3	Ressorts sollicités en traction	22
3.4	Élément de Barre 1D	23
3.5	Barre sollicitée à une charge répartie de densité $q(x)$	26
3.6	Charges équivalentes.	27
3.7	Tige modélisée par deux éléments de barre.	27
4.1	Élément barre représenté dans les repères local et global	28
4.2	Structure plane à deux barres et un ressort	32
4.3	Structure plane à deux barres	33
5.1	Déformation d'une poutre en flexion.	35
5.2	Rotation et courbure.	36

5.3	(a) Poutre plane chargée uniformément. (b) Charges équivalentes	41
5.4	Poutre sollicitée à une charge concentrée.	41
5.5	Poutre soumise à une force uniformément répartie	42
6.1	Élément fini de portique	43
6.2	Élément de portique en repère global	46
6.3	Élément de poutre plane chargé uniformément.	49
6.4	Portique à trois éléments	50

Introduction

Les racines mathématiques de la méthode des éléments finis remontent au moins à un demi-siècle. Les méthodes d'approximations pour la résolution des équations différentielles en utilisant des solutions d'essai (dans notre contexte, les fonctions d'interpolation) sont encore plus anciennes. **Lord Rayleigh** et **Ritz** ont utilisé des fonctions d'essai pour approcher des solutions d'équations différentielles. L'inconvénient de ces approches, par rapport à la méthode des éléments finis modernes, est que les fonctions d'essai doivent s'appliquer à l'ensemble du domaine du problème considéré. En utilisant le même concept pour la résolution, **Galerkin** a fourni une base très solide pour la méthode des éléments finis dans les années 40. L'introduction, par Courant, du concept de fonctions continues par morceaux dans un sous-domaine, la méthode des éléments finis a connu son vrai début.

À la fin des années 1940, en traitant les problèmes du moteur à réaction, les ingénieurs aéronautiques ont eu besoin d'une analyse plus sophistiquée de structures supportant des charges très importantes associées à des vitesses très élevées. Ces ingénieurs, sans l'aide des ordinateurs modernes, ont développé des méthodes d'analyse matricielles, dites de forces, dans laquelle les inconnues sont les forces et les connus sont des déplacements.

Le terme d'élément fini a été utilisé pour la première fois par **Clough** en 1960 dans le cas d'une analyse des contraintes planes et a été utilisé couramment depuis ce temps. Au cours des décennies 1960 et 1970, la méthode des éléments finis a été étendue à la flexion des plaques et des coques, à l'étude des récipients sous pression et à l'analyse des structures élastiques des problèmes tridimensionnels généraux. Ensuite elle a été élargie à l'étude de l'écoulement des fluides et au transfert de chaleur. Enfin Une autre extension de la méthode à l'étude des grandes déformations et à l'analyse dynamique pendant la même période.

Le calcul par éléments finis est très lourd, en raison d'exécution de plusieurs opérations sur de très grandes matrices. Au cours des premières années, les applications ont été réalisées à l'aide d'ordinateurs centraux, considérés à l'époque comme des outils très puissants et très rapides pour l'analyse technique. Au cours des années 1960, NASTRAN a été le premier code

par éléments finis développé capable de résoudre des problèmes à des centaines de milliers de degrés de liberté.

Dans les années qui ont suivi le développement de NASTRAN, de nombreux logiciels commerciaux ont été introduits pour l'analyse par éléments finis. Parmi ceux-ci, ANSYS, ALGOR, ABAQUS et COSMOS. Dans l'environnement informatique actuel, la plupart de ces codes peuvent être utilisés sur des ordinateurs de bureau et des postes de travail d'ingénierie pour résoudre des problèmes d'analyse de structures statique et dynamique, de transfert de chaleur, d'écoulement de fluide, d'électromagnétisme et de réponse sismique.

Ce cours constitue la première partie de la matière (M.E.F) destiné aux étudiants de master I des deux promotions GM et CM. Cette partie traite la formulation des éléments finis unidimensionnels destinés à l'analyse statique des structures. Il est rédigé d'une manière très simple pour permettre une compréhension facile des différents concepts. Le cours est divisé en six chapitres tels que :

Le chapitre 1 est consacré principalement à un rappel sur la mécanique du solide, ce qui servira par la suite de base pour la formulation des différents éléments.

Le chapitre 2 est dédié à la présentation du fondement de la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes de structures en utilisant le principe des travaux virtuels.

Le chapitre 3 permet la formulation de l'élément de ressort en utilisant la méthode des forces suivi de l'élément de barre (traction-compression) en utilisant la formulation déplacement. Chaque partie du chapitre est clôturée par un exercice de compréhension.

Le chapitre 4 permet, en utilisant la formulation de l'élément de barre du chapitre 3, la formulation de l'élément de barre pour le calcul des treillis plans composés de plusieurs éléments finis. Deux exercices viennent clôturer ce chapitre.

Le chapitre 5 traite la formulation de l'élément de poutre mince (flexion) basée sur les hypothèses de Bernoulli. Pour une meilleure compréhension, deux exercices sont à traiter.

Le chapitre 6 est consacré à l'élément fini de portique, le dernier élément unidimensionnel, travaillant à la fois à la traction-compression et à la flexion. Un exercice vient clôturer le chapitre.

Chapitre 1

Rappels sur la mécanique du solide

Ce chapitre est consacré principalement à un rappel de la théorie de la mécanique du milieu continu qui constituera une base pour la formulation des différents éléments.

1.1 Forces extérieures

Les forces extérieures auxquelles est soumis un corps sont classées en 3 catégories :

1.1.1 Forces volumiques

Ce sont des forces associées à la masse du corps et réparties sur tout le volume.

Exemple : Forces de gravitation, les forces magnétiques et forces d'inertie

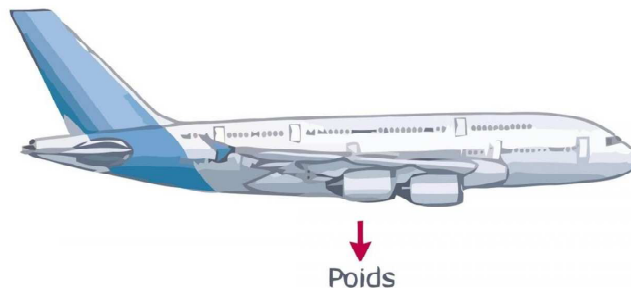


FIGURE 1.1: Exemple de force de volume

1.1.2 Forces surfaciques

Ce sont des forces de contact réparties sur toute la surface de contact.

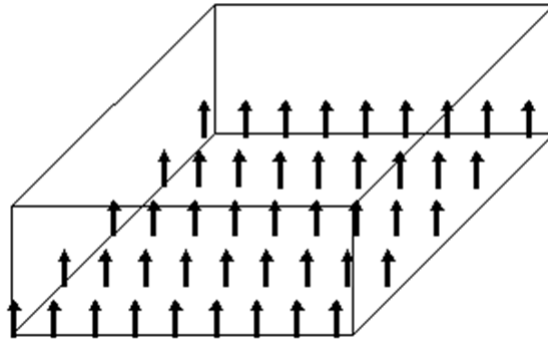


FIGURE 1.2: Exemple de force de surface

1.1.3 Forces ponctuelles

Ce sont des forces localisées appliquées en des points.

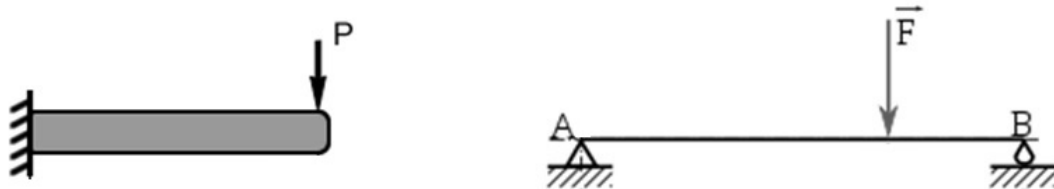


FIGURE 1.3: Exemple de force ponctuelle

1.2 Contraintes :

Un système de forces extérieures appliquées à un corps engendre un système de forces intérieures résultant de l'interaction des particules élémentaires. A chaque force élémentaire correspond une contrainte.

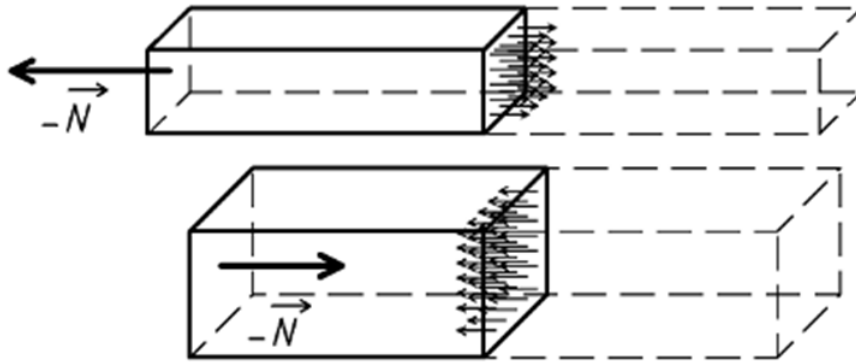


FIGURE 1.4: Illustration de contraintes

Dans le cas général, chaque point matériel est soumis à neuf composantes de contraintes.

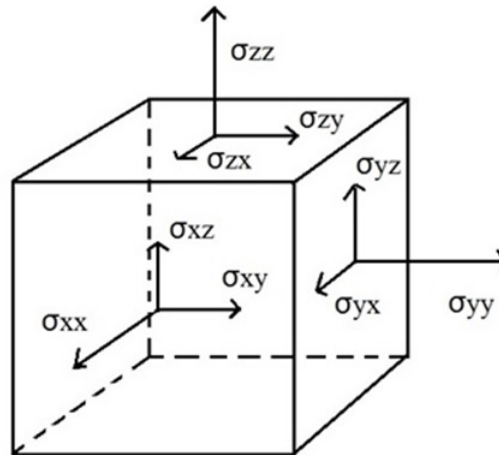


FIGURE 1.5: Équilibre de volume.

On a trois composantes de contraintes normales σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{zz} et six composantes tangentielles τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} et τ_{zy}

Pour satisfaire l'équilibre de l'élément, on doit avoir :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (1.1)$$

Le nombre de contraintes de cisaillement se réduit donc à trois. Les six valeurs caractérisant l'état de contrainte peuvent alors être regroupées au sein d'un vecteur de composantes :

$$\{\sigma\}^T = \left\{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \right\} \quad (1.2)$$

1.2.1 Équations d'équilibre

Dans le cas général tridimensionnel, l'équilibre des forces qui agissent sur un élément infinitésimal est exprimé par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + f_z &= 0\end{aligned}\tag{1.3}$$

où : f_x , f_y et f_z sont les composantes de la force volumique suivant les directions x,y, et z respectivement.

1.3 Déformations

1.3.1 Déplacements

Lorsque un corps est soumis à un système de forces, le déplacement d'un point est défini comme étant la distance séparant sa position initiale à sa position finale.

Le mouvement d'un point de O vers O' caractérisé par le vecteur \vec{l} peut être décomposé dans un système xyz en 3 composantes u, v, w qui représentent les déplacements de ce point sur les axes de référence soit :

$$\vec{l} = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} + w \cdot \vec{k}\tag{1.4}$$

On définit par ailleurs la norme du déplacement comme étant :

$$\|\vec{l}\| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\tag{1.5}$$

Ainsi un point situé initialement en (x, y, z) sera déplacé en $(x + u, y + v, z + w)$

1.3.2 Déformations

On dit qu'un corps est **déformé** quand les positions relatives entre les points appartenant à ce corps changent en fonction du système de forces appliquées.

Dans le cas général deux types de déformations se produisent, les longueurs parallèles aux directions x, y et z varient ainsi que les angles formés par ces longueurs.

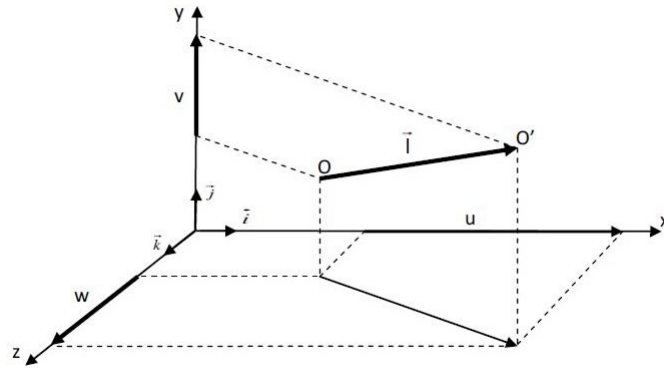


FIGURE 1.6: Vecteur déplacement.

Déformations directes La déformation directe dans une direction donnée est définie comme étant le rapport de la variation de longueur par la longueur d'une fibre originalement orientée dans cette direction.

Trois composantes indépendantes de déformation directe (normales) ε_{xx} , ε_{yy} et ε_{zz} sont définies en chaque point où :

ε_{xx} la déformation suivant x

ε_{yy} la déformation suivant y

ε_{zz} la déformation suivant z

Déformations de cisaillement : La déformation de cisaillement est définie comme étant la variation de l'angle droit formé par deux axes. Trois composantes de déformation de cisaillement γ_{xy} , γ_{xz} et γ_{yz} sont définies en chaque point où :

γ_{xy} la déformation de cisaillement dans le plan xy

γ_{xz} la déformation de cisaillement dans le plan xz

γ_{yz} la déformation de cisaillement dans le plan yz

d'où l'expression générale des composantes du vecteur des déformations :

$$\{\tau\}^T = \left\{ \tau_{xx} \quad \tau_{yy} \quad \tau_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right\} \quad (1.6)$$

1.3.3 Relations entre déplacements et déformations

Les déformations normales et de cisaillement peuvent être obtenues, en considérant dans un premier temps un état plan de déformation dans le plan xoy , en posant :

$$\varepsilon_{xx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A'B' - AB}{AB} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{A'D' - AD}{AD} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{dx \rightarrow 0 \\ dy \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{B'A'D'} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

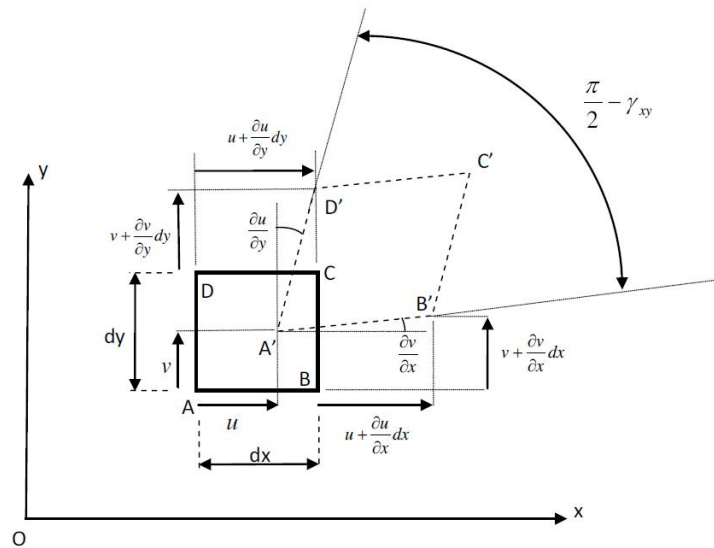


FIGURE 1.7: Déformations planes

La généralisation de cette approche bidimensionnelle aux deux autres plans permettra d'obtenir :

- Les déformations directes

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.7)$$

- Les déformations de cisaillement

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\end{aligned}\tag{1.8}$$

Par ailleurs, les expressions (1.7) et (1.8) pourront également être exprimées sous la forme matricielle suivante :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}\tag{1.9}$$

1.4 Relations entre déformations et contraintes

Sous l'action d'une contrainte normale uni-axiale, appliquée dans la direction x, la plupart des matériaux ont un comportement élastique caractérisé par la loi de Hooke :

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx}\tag{1.10}$$

liant linéairement contrainte et déformation.

E est appelé module d'élasticité ou module de Young.

Donc la composante de déformation ε_{xx} est donnée par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}\tag{1.11}$$

Les déformations suivant les directions y et z sont exprimées pour un matériau isotrope par :

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu \cdot \left(\frac{\sigma_{xx}}{E} \right)\tag{1.12}$$

où ν est appelé coefficient de poisson.

Pour le cas général d'un élément soumis à un état de contrainte tridimensionnel, les déformations totales dans les trois directions sont données par :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu \cdot (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]
\end{aligned} \tag{1.13}$$

De plus, un essai de cisaillement pur permet de montrer qu'il existe des relations linéaires entre contraintes et déformations de cisaillement telles que :

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} \\
\gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{xz} \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{yz}
\end{aligned} \tag{1.14}$$

où la constante G représente le module d'élasticité de cisaillement appelé aussi le module de rigidité.

D'où la relation finale entre déformations et contraintes :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \{\sigma\} \tag{1.15}$$

1.5 Relations entre contraintes et déformations

L'inversion de l'expression (1.15) permet de déduire les contraintes à partir des déformations, soit :

$$\{\sigma\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \{\varepsilon\} \tag{1.16}$$

1.5.1 État plan de contrainte et de déformation

1.5.1.1 Déformations planes

On est en présence d'un problème de déformation plane l'orsque un solide, de section transversale constante, et l'une des dimensions est très importante par rapport aux deux autres. Dans ce cas, le solide peut être décomposé en « tranches » d'épaisseur unitaire, le calcul se limitant alors à l'étude d'une seule de ces tranches, Figure (1.8).

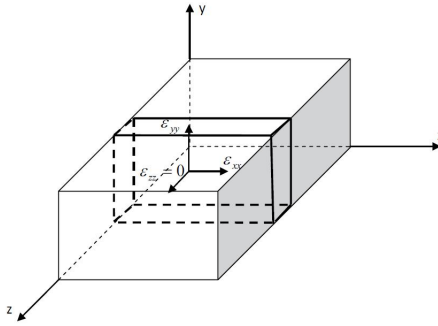


FIGURE 1.8: Etat plan de déformation.

En conséquence, toutes les déformations associées à l'axe transversal, z en l'occurrence, seront prises égales à zéro.

On a donc :

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (1.17)$$

et

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1.18)$$

En remplaçant (1.17) et (1.18) dans (1.16), la relation contrainte-déformation devient pour les déformations planes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.19)$$

De (1.13), on déduit également que :

$$\sigma_{zz} = \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (1.20)$$

1.5.1.2 Contraintes planes

Contrairement à la condition de déformation plane, la condition de contrainte plane est caractérisée par le fait que la dimension suivant la direction z est très petite par rapport aux deux autres et par conséquent l'hypothèse de contrainte plane suppose que toutes les contraintes associées à l'axe transversal, z en l'occurrence, sont nulles, Figure (1.9).

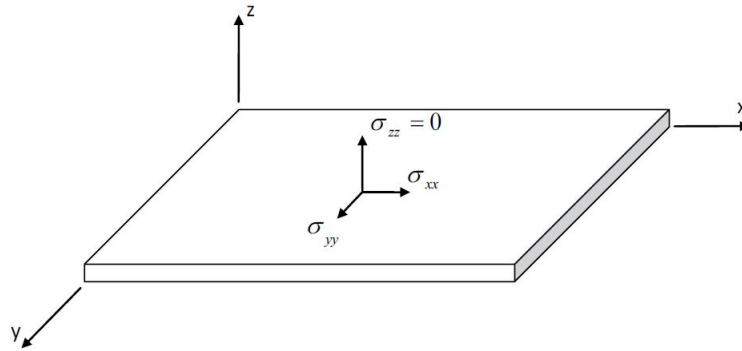


FIGURE 1.9: Etat plan de contrainte

On a donc :

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1.21)$$

et

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} \quad (1.22)$$

la relation contrainte-déformation devient pour les contraintes planes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.23)$$

et (1.13) permet d'établir que :

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (1.24)$$

Cette approche étant directement applicable aux éléments de faibles épaisseurs, les éléments membranes, plaques et coques suivront cette hypothèse de contrainte plane.

1.6 Énergie de déformation élastique

1.6.1 Cas du chargement uniaxial

Soit un infiniment petit de dimensions dx, dy, dz extrait d'un solide quelconque Figure (1.10), l'énergie emmagasinée par le volume dV soumis à une charge F constante dans la direction x sera égale à :

$$dW = \frac{1}{2} \cdot F \cdot du \quad (1.25)$$

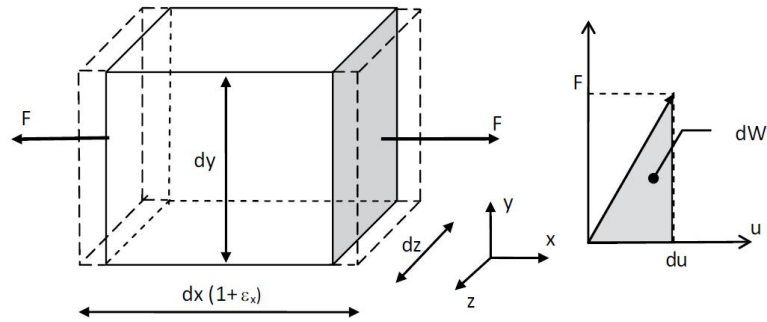


FIGURE 1.10: Énergie de déformation uniaxiale.

Comme

$$du = \varepsilon_{xx} \cdot dx$$

et

$$F = \sigma_{xx} \cdot dydz$$

L'énergie dW peut également s'exprimer par :

$$dW = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} \cdot dx dy dz \quad (1.26)$$

Généralisée au volume V du solide, l'expression de l'énergie de déformation devient :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} \cdot dx dy dz \quad (1.27)$$

Dans le cas général et par superposition des trois directions on obtient :

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \cdot \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \cdot \varepsilon_{zz}) \cdot dx dy dz \quad (1.28)$$

D'une façon similaire, l'énergie de déformation de cisaillement, Figure (1.11), sera exprimée par :

$$dW = \frac{1}{2} (\tau_{xy} \cdot dy dz) \cdot \gamma_{xy} dx = \frac{1}{2} \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} dx dy dz \quad (1.29)$$

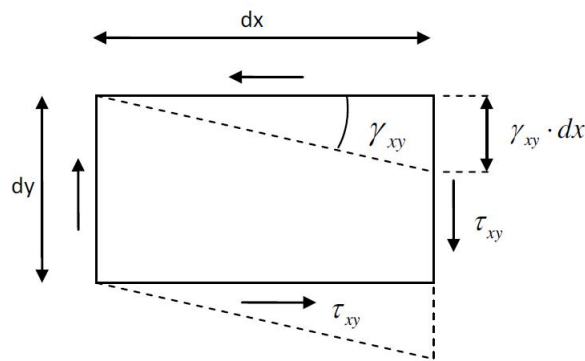


FIGURE 1.11: Énergie de déformation de cisaillement.

Dans le cas général, l'énergie de déformation élastique sera exprimée par :

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \cdot \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \cdot \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz}) \cdot dx dy dz \quad (1.30)$$

Sous forme matricielle :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \cdot \{\sigma\} \cdot dV \quad (1.31)$$

Chapitre 2

Méthode des éléments finis en statique

2.1 Approximation nodale – fonctions de forme

La méthode des éléments finis et comme toute méthode numérique, consiste à remplacer le système **continu** par un système **discret**. Le solide est alors divisé en un certain nombre de sous-domaines appelés **éléments**, dont l'**assemblage** permet la reconstitution de la géométrie initiale. Chacun des éléments est relié à ces voisins par des **noeuds** dont les **degrés de liberté** (DDL) constituent les inconnues du problème.

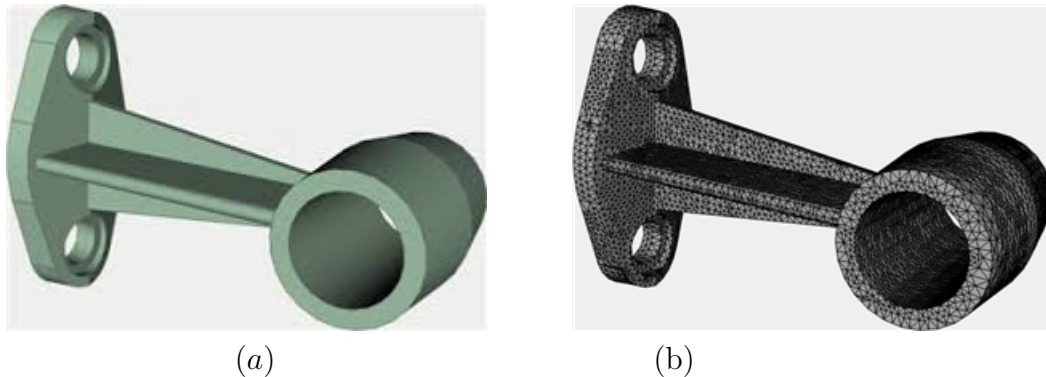


FIGURE 2.1: Pièce mécanique (a) Modèle solide ; (b) Modèle éléments finis.

Considérant un champ de déplacement cinématiquement admissible sur l'élément, la méthode consiste le plus souvent à approximer celui-ci au moyen d'une fonction polynomiale formée d'un nombre fini de paramètres et à l'exprimer en fonction des déplacements nodaux (les déplacements associés aux degrés de liberté). On aura donc :

$$P(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot P_i \quad (2.1)$$

où :

P_i désignent les inconnues en déplacement associées aux degrés de liberté considérés,

$N_i(x, y, z)$ désignent les **fonctions de forme** de l'élément permettant d'obtenir les déplacements de celui-ci en n'importe quel point de sa géométrie et ce toujours à partir des déplacements nodaux.

En regroupant toutes les fonctions de forme de l'élément au sein de la matrice $[N]$ et les déplacements nodaux dans le vecteur q_e , le champ de déplacement s'exprime alors :

$$\{u\} = [N] \{q_e\} \quad (2.2)$$

avec $\{u\}$ correspondant au vecteur des fonctions de déplacement applicables sur l'élément : $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, $\beta_x(x, y, z)$, etc.

Le degré du polynôme retenu pour l'élément est donc intimement lié aux nombres de noeuds et de degrés de liberté par noeud. Par exemple, un élément unidimensionnel à trois noeuds aura une fonction d'approximation parabolique.

Généralement, les fonctions d'interpolation retenues sont linéaires, quadratiques et plus rarement cubiques ce qui ne se révèle pas toujours conforme aux théories visées telles que celles des poutres, des plaques ou des coques. En effet, les ligne et surface élastique découlant de ces théories sont plutôt du troisième voire du quatrième degré. Une solution revient à discrétiser le modèle de telle manière à reconstituer le champ réel de déplacement à partir de fonctions de degré inférieur. La qualité et l'efficacité d'une telle reconstitution dépendront donc d'une part du type d'élément choisi, en d'autres termes de ses capacités, et d'autre part de la densité du maillage. Dans le cas des éléments courants et toujours dans une hypothèse de linéarité, ce choix aura pour conséquence de ne pas garantir la continuité du champ de contrainte d'où la recherche d'une discrétisation adaptée permettant sa bonne reconstitution. De ce fait, la taille des éléments utilisés sera généralement petite.

2.2 Résolution

La méthode de résolution s'inspire généralement de celle de Rayleigh – Ritz qui consiste via une minimisation de l'énergie potentielle, en une recherche des termes d'une fonction approximant le champ inconnu et satisfaisant aux conditions aux limites.

On définit l'énergie potentielle totale E_p comme étant la différence entre l'énergie potentielle de déformation W et le travail T des forces de volume et de surface :

$$E_p = W - T = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} . dV - \int_V \{u\}^T . \{f_v\} . dV - \int_S \{u\}^T . \{f_s\} . dS \quad (2.3)$$

Le problème revient alors à rechercher un champ de déplacement minimisant E_p de manière à caractériser l'équilibre.

2.2.1 Énergie de déformation élémentaire

Notant la relation (1.9) sous une forme plus synthétique $\{\varepsilon\} = [d] \{u\}$, le vecteur des déformations pourra être exprimé en fonction des déplacements nodaux à partir de :

$$\{\varepsilon\} = [d] \{u\} = [d][N] \{q_e\} = [B] \{q_e\} \quad (2.4)$$

avec $[d]$: opérateur dérivation dont les dimensions dépendent de celles de l'élément étudié. L'énergie de déformation W_e associée à l'élément e peut être exprimé par :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\varepsilon\}^T . \{\sigma\} . dV_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{q_e\}^T . [B]^T . [D] . [B] . \{q_e\} . dV_e \quad (2.5)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \{q_e\}^T . [k_e] . \{q_e\} \quad (2.6)$$

avec

$$[k_e] = \int_{V_e} [B]^T . [D] . [B] . dV_e \quad (2.7)$$

est la **matrice de rigidité élémentaire** de l'élément e .

2.2.2 Travail élémentaire des forces de volume et de surface

En rajoutant les forces concentrées $\{p_e\}$ appliquées aux extrémités de l'élément (actions des éléments connectés à e), le travail élémentaire des forces extérieures T_e , d'après l'équation (2.3) s'exprime par :

$$T_e = \int_{V_e} \{u_n\}^T . \{f_v\} . dV_e + \int_{V_s} \{u_n\}^T . \{f_s\} . dS_e + \{q_e\}^T . \{p_e\} \quad (2.8)$$

d'après l'équation (2.2), le travail élémentaire peut être exprimé par :

$$T_e = \int_{V_e} \{q_e\}^T \cdot [N_e]^T \cdot \{f_v\} \cdot dV_e + \int_{V_s} \{q_e\}^T \cdot [N_e]^T \cdot \{f_s\} \cdot dS_e + \{q_e\}^T \cdot \{p_e\} \quad (2.9)$$

d'où finalement

$$T_e = \{q_e\}^T (\{f_e^v\} + \{f_e^s\} + \{p_e\}) \quad (2.10)$$

avec :

$$\{f_e^v\} = \int_{V_e} [N_e]^T \cdot \{f_v\} \cdot dV_e \quad (2.11)$$

sont les forces nodales de volume

et

$$\{f_e^s\} = \int_{V_s} [N_e]^T \cdot \{f_s\} \cdot dS_e \quad (2.12)$$

sont les forces nodales de surface.

2.2.3 Assemblage des matrices élémentaires

Les caractéristiques globales sont obtenues par assemblage des différentes quantités W_e et T_e établies en (2.5) et (2.8). L'énergie potentielle totale de la structure est alors égale à la somme des différences entre énergies de déformation et travaux des forces de chacun des éléments :

$$E_p = W - T = \sum_e W_e - \sum_e T_e = \sum_e \frac{1}{2} \{q_e\}^T \cdot [k_e] \cdot \{q_e\} - \sum_e \{q_e\}^T (\{f_e^v\} + \{f_e^s\} + \{p_e\}) \quad (2.13)$$

$$E_p = W - T = \sum_e W_e - \sum_e T_e = \frac{1}{2} \{Q\}^T \cdot [K] \cdot \{Q\} - \{Q\}^T \{F\} \quad (2.14)$$

avec :

$\sum [k_e] = [K]$ est la matrice de rigidité de toute la structure.

$\{F\} = \{F^v\} + \{F^e\} + \{P\}$ vecteur des charges nodales.

Comme l'équilibre est caractérisé par une variation nulle d'énergie potentielle par rapport au déplacement, le système s'écrit finalement :

$$\delta E_p = \{\delta Q\}^T \cdot [K] \cdot \{Q\} - \{\delta Q\}^T \{F\} = 0 \quad (2.15)$$

$$\delta E_p = \{\delta Q\}^T \cdot ([K] \cdot \{Q\} - \{F\}) = 0 \quad (2.16)$$

donc, on aboutit au système d'équations :

$$[K] \cdot \{Q\} = \{F\} \quad (2.17)$$

La matrice $[K]$ est symétrique et singulière ($\det[K] = 0$) du fait de l'absence de conditions d'appui. En d'autres termes, elle ne peut traduire pour l'instant qu'un mouvement de corps rigide.

2.2.4 Introduction des conditions d'appui

Pour l'équilibre de la structure, des conditions d'appui doivent être introduites de telle manière à assurer la stabilité d'ensemble. Suivant la nature des degrés de liberté bloqués, ces supports peuvent reconstituer des appuis ponctuels, des appuis rotulés ou des encastremets correspondant à des déplacements nuls ou imposés.

Le système (2.17) peut être transformé de telle manière à séparer les degrés de liberté libres et bloqués soit :

$$[K] \cdot \{Q\} = \{F\} \iff \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LB}] \\ [K_{BL}] & [K_{BB}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q_L\} \\ \{Q_B\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{ext}\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

avec :

$\{F_{ext}\}$: vecteur des charges associées aux degrés de liberté libres,

$\{R\}$: vecteur des réactions d'appui.

La première étape de la résolution consiste en la détermination des déplacements inconnus $\{Q_L\}$ en résolvant le système réduit :

$$[K_{LL}] \{Q_L\} = \{F_{ext}\} - [K_{LB}] \{Q_B\} \quad (2.19)$$

la dernière étape consiste en la détermination des réactions aux appuis par :

$$\{R\} = [K_{BL}] \{Q_L\} + [K_{BB}] \{Q_B\} \quad (2.20)$$

Chapitre 3

Eléments de Ressort et de Barre

Ce chapitre développe les caractéristiques des éléments finis de deux éléments structuraux unidimensionnels relativement simples, un ressort à élasticité linéaire et un élément élastique de traction ou compression.

3.1 Elément de ressort

Un ressort élastique est un dispositif mécanique capable de supporter uniquement des efforts axiaux, Figure 3.1.

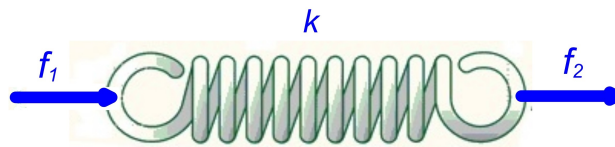


FIGURE 3.1: Elément de ressort

k est le **raideur** du ressort

Si f_1 et f_2 sont les forces appliquées aux deux extrémités du ressort, la déformation nette du ressort sera exprimée par :

$$\Delta u = u_2 - u_1 \quad (3.1)$$

où : u_1 et u_2 les déplacements des deux extrémités du ressort.

La résultante des efforts axiaux internes est donnée par :

$$f = k \cdot \Delta u = k(u_2 - u_1) \quad (3.2)$$

Pour l'équilibre :

$$f_1 + f_2 = 0$$

$$\Rightarrow f_1 = -f_2$$

Pour l'équilibre de f_1 avec f la résultante des efforts internes, Figure 3.2 , on a :

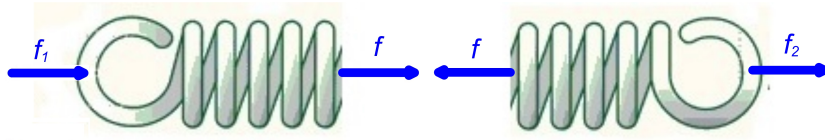


FIGURE 3.2: Equilibre du ressort

$$\sum f = 0 \Rightarrow f_1 + f = 0$$

$$\Rightarrow f_1 = -f = -k.(u_2 - u_1)$$

Pour l'équilibre de f_2 avec f la résultante des efforts internes, figure 3.2 , on a :

$$\sum f = 0 \Rightarrow f_2 - f = 0$$

$$\Rightarrow f_2 = f = k.(u_2 - u_1)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

avec

$$[k] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$[k]$ est la rigidité du ressort.

Exercice # 1 Soit le système constitué de deux ressorts alignés, Figure 3.3, tel que :

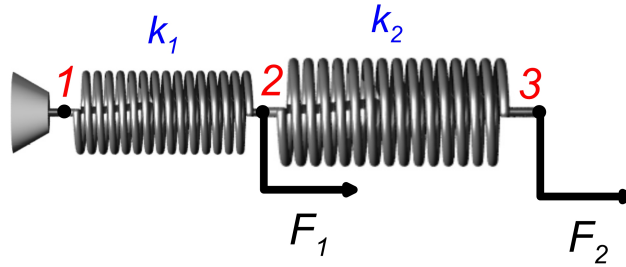


FIGURE 3.3: Ressorts sollicités en traction

Le noeud 1 est fixe et les noeuds 2 et 3 supportent deux forces concentrées $F_1 = 75\text{ N}$ et $F_2 = 50\text{ N}$.

Déterminez les déplacements aux noeuds libres et la réaction à l'appui sachant que les raideurs des deux ressorts sont $k_1 = 50\text{ N/mm}$ et $k_2 = 75\text{ N/mm}$.

3.2 Élément fini de barre 1D

3.2.1 Caractéristiques d'une barre

On considère une barre de section A constante, de longueur L et ayant un module d'élasticité E . La barre est liée aux autres éléments par des rotules (moments nuls aux extrémités).

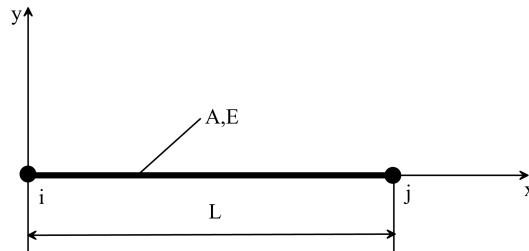


FIGURE 3.4: Élément de Barre 1D

L'axe de référence de la barre est droit, ne transmettant que des efforts normaux dans la direction x , Figure (3.4).

3.2.2 Champ des déplacements

Dans le cas d'une poutre, les déplacements sont exprimés par :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u(x) \\ v(x, y, z) = 0 \\ w(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

3.2.3 Champ des déformations

Le champ des déformations est exprimé par la déformation ε_{xx} telle que :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} \quad (3.5)$$

est constante dans toute la section et les déformations $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

3.2.4 Champ des contraintes

Le champ des contraintes est exprimé par la loi de Hooke 1D tel que :

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} \quad (3.6)$$

où E est le module d'élasticité (Young) du matériau de la barre.

3.2.5 Matrice de rigidité

Considérant un élément unidimensionnel à deux noeuds travaillant uniquement en traction ou en compression. Le matériau utilisé étant supposé linéaire, la déformation est de ce fait constante sur la hauteur de sa section. La fonction de déplacement $u(x)$ est alors forcément linéaire. On a donc :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = Cte \quad (3.7)$$

on peut prendre

$$u(x) = a_0 + a_1 \cdot x \quad (3.8)$$

et comme

$$x = 0 \Rightarrow u(0) = u_i$$

$$x = L \Rightarrow u(L) = u_j$$

où L est la longueur de la barre

alors l'expression (3.8) peut être écrite :

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_i + \frac{x}{L}u_j \quad (3.9)$$

sous forme matricielle :

$$u(x) = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

la matrice de rigidité est déterminée par l'expression :

$$[k_e]_l = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (3.11)$$

Le déplacement de chaque noeuds de la barre est exprimé par :

$$u(x) = N_1(x).u_i + N_2(x).u_j \quad (3.12)$$

où les fonctions d'interpolation $N(x)$ sont données par :

$$\begin{cases} N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \\ N_2(x) = \frac{x}{L} \end{cases} \quad (3.13)$$

La discretisation du champ de déformation de l'équation (3.5) par l'approximation, équation (3.9), donne :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = \frac{dN_1(x)}{dx}u_i + \frac{dN_2(x)}{dx}u_j \quad (3.14)$$

sous forme matricielle :

$$\varepsilon_{xx} = \left\langle \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

donc la matrice $[B]$ est exprimée par :

$$[B] = \left\langle \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right\rangle \quad (3.16)$$

d'après (3.13), la matrice $[B]$ sera :

$$[B] = \left\langle \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle = \frac{1}{L} \langle -1 \quad 1 \rangle \quad (3.17)$$

la matrice de rigidité élémentaire est déterminée par l'expression :

$$[k_e]_l = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} [B]^T [D] [B] dz.dy.dx \quad (3.18)$$

où : la matrice $[B]$, pour l'élément barre, est exprimée par l'équation (3.17) et la matrice $[D]$ est exprimée par le module d'élasticité E de la barre, équation (3.6).

Comme la section de la barre est constante, donc, l'expression (3.18) devient :

$$[k_e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV = \int_{x_i}^{x_j} [B]^T [D] [B] .A.dx \quad (3.19)$$

où A est la section de la barre, avec :

$$A = \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} dz \cdot dy \quad (3.20)$$

D'après (3.17) et (3.6) l'expression de la matrice de rigidité élémentaire dans le repère local (3.19) sera :

$$[k_e]_l = A \cdot \int_{x_i}^{x_j} \frac{1}{L} \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right\} \cdot E \cdot \langle -1 \quad 1 \rangle dx$$

$$[k_e]_l = \frac{A \cdot E}{L^2} \cdot \int_{x_i}^{x_j} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right] dx$$

$$[k_e]_l = \frac{A \cdot E}{L^2} \cdot \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right] \cdot (x_j - x_i)$$

Finalement la matrice de rigidité de l'élément fini barre est exprimée par :

$$[k_e] = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right] \quad (3.21)$$

3.2.6 Vecteur charges équivalentes

Considérant une barre chargée uniformément par une charge $q_x(x)$, Figure(3.5). D'après (2.12), le vecteur charges équivalentes $\{f_e\}$, sera déterminé par :

$$\{f_e\} = \int_0^L \langle N \rangle^T \cdot (-q_x(x)) \cdot dx \quad (3.22)$$

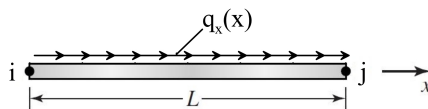


FIGURE 3.5: Barre sollicitée à une charge répartie de densité $q(x)$

Pour le cas particulier de charge répartie de densité $-q_x$ constante, le vecteur charges équivalentes $\{f_e\}$, Figure (3.6), sera :

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \cdot -q_x \cdot dx = \begin{Bmatrix} -\frac{q_x L}{2} \\ -\frac{q_x L}{2} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

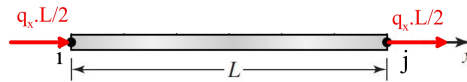


FIGURE 3.6: Charges équivalentes.

Exercice # 2 Une tige en acier sollicitée à la compression et modélisée par deux éléments finis de barre, Figure (3.7). Déterminez les déplacements aux noeuds et les contraintes dans chaque barre sachant que les deux barres ont comme caractéristiques : $A = 500\text{mm}^2$ et $E = 207\text{GPa}$

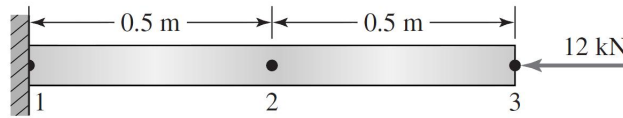


FIGURE 3.7: Tige modélisée par deux éléments de barre.

Chapitre 4

Élément de barre pour le calcul des treillis plans

Les barres composant un treillis plan sont positionnées arbitrairement dans l'espace et font des angles différents avec le repère **global** (\vec{X}, \vec{Y}) de la structure, Figure (4.1).

On note α l'angle entre l'axe \vec{X} du repère global et l'axe \vec{x} du repère local à la barre.

4.1 Formulation de l'élément de barre 2D

4.1.1 Repères local et global

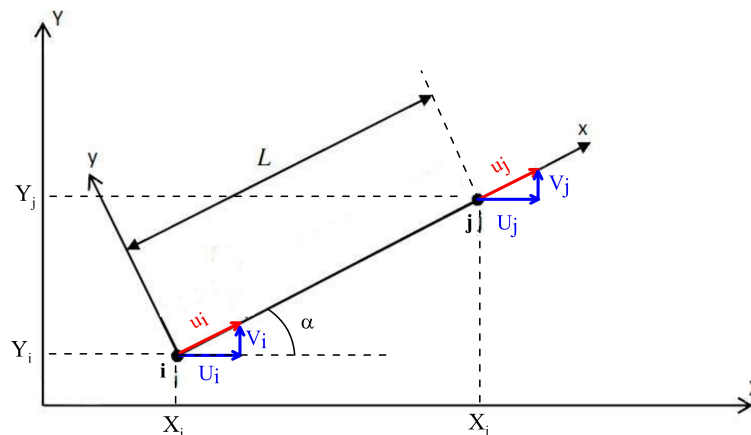


FIGURE 4.1: Élément barre représenté dans les repères local et global

Les coordonnées des neuds dans le repère local sont exprimées par :

au noeud **i** : x_i

au noeud **j** : x_j avec : $L = x_j - x_i$

Alors que les coordonnées dans le repère global sont exprimées par :

au noeud **i** : X_i

au noeud **j** : X_j avec :

$$L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \quad (4.1)$$

Les variables nodales dans le repère local sont exprimées par :

au noeud **i** : u_i

au noeud **j** : u_j Les variables nodales dans le repère global sont exprimées par :

au noeud **i** : U_i et V_i

au noeud **j** : U_j et V_j

Démarche générale : La démarche générale pour la formulation de l'élément fini barre 2D consiste à :

Etape 1 : Calculer la matrice de rigidité $[k]_l$ et le vecteur de charges équivalentes $\{f\}_l$ dans le repère local (voir chapitre I).

Etape 2 : Transformer la matrice de rigidité $[k]_g$ et le vecteur de charges équivalentes $\{f\}_g$ du repère local au repère global par le biais d'une matrice dite de transformation.

4.1.2 Changement de repère

La matrice de transformation qui permet le passage du repère local au repère global est déterminée par les relations liant les déplacements (u, v) dans le repère local aux déplacements (U, V) dans le repère global.

Au noeud i la variable nodale u_i peut être exprimée par :

$$u_i = U_i \cos(\alpha) + V_i \sin(\alpha) \quad (4.2)$$

avec :

$$\cos(\alpha) = \frac{X_j - X_i}{L}$$

et

$$\sin(\alpha) = \frac{Y_j - Y_i}{L}$$

avec L est la longueur de la barre exprimée par (4.1)

L'expression (4.2) peut être exprimée sous forme matricielle par :

$$u_i = \langle \cos(\alpha) \quad \sin(\alpha) \rangle \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

et pour les deux noeuds i et j , de la barre, on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle t \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle t \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

ou sous forme condensée :

$$\{u_n\} = [T] \{U_n\} \text{ ou } \langle u_n \rangle = \langle U_n \rangle [T]^T \quad (4.6)$$

avec :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$[T]$ est la matrice des cosinus directeurs ou de transformation.

4.1.3 Matrice de rigidité élémentaire $[k]_g$ en repère global

L'énergie interne de déformation s'écrit :

$$E = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [k]_l \{u_n\} \quad (4.8)$$

en substituant les expressions (4.6) dans (4.8) on obtient :

$$W = \frac{1}{2} \langle U_n \rangle [T]^T [k]_l [T] \{U_n\} = \frac{1}{2} \langle U_n \rangle [k]_g \{U_n\} \quad (4.9)$$

avec $[k]_g$ la matrice de rigidité élémentaire dans le repère global est exprimée par :

$$[k]_g = [T]^T [k]_l [T] \quad (4.10)$$

En substituant l'expression (3.21) de la matrice de rigidité élémentaire dans le repère local et l'expression (4.7) dans l'expression (4.10), on obtient la matrice de rigidité élémentaire $[k_e]_g$ dans le repère global :

$$[k_e]_g = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$[k_e]_g = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & c.s & -c^2 & -c.s \\ c.s & s^2 & -c.s & -s^2 \\ -c^2 & -c.s & c^2 & c.s \\ -c.s & -s^2 & c.s & s^2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

avec : $c = \cos(\alpha)$ et $s = \sin(\alpha)$

4.1.4 Vecteur forces équivalentes $\{f_n\}$ en repère global

L'énergie des forces externes T s'écrit :

$$T = \langle u_n \rangle \{f_n\}_l = \langle U_n \rangle [T]^T \{f_n\}_l = \langle U_n \rangle \{f_n\}_g \quad (4.13)$$

avec $\{f_n\}_g$ est le vecteur élémentaire de charges équivalentes dans le repère global donné par :

$$\{f_n\}_g = [T]^T \{f_n\}_l \quad (4.14)$$

4.1.5 Conditions aux limites

Il existe différents types de conditions aux limites.

Appui fixe : $U = 0$ et $V = 0$

Appui roulant dans la direction X : $U = 0$ et $V \neq 0$

Appui roulant dans la direction Y : $U \neq 0$ et $V = 0$

Appui incliné : Appui roulant dans une direction Y' différente de X et Y : $U' \neq 0$ et $V' = 0$

4.2 Exercice 1

Soit la structure suivante constituée par deux barres planes appuyées en deux noeuds et reposant sur un ressort élastique en son troisième noeud comme indiqué dans la Figure (4.2)

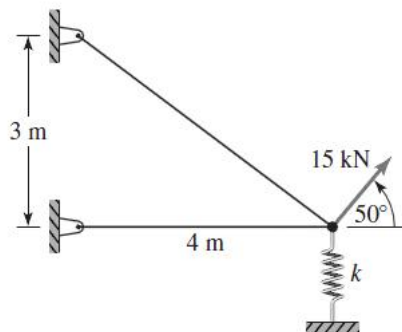


FIGURE 4.2: Structure plane à deux barres et un ressort

Les deux barres ont une section $A = 315 \text{ mm}^2$ et un module d'élasticité $E = 80 \text{ GPa}$. Le ressort a une rigidité $k = 50 \text{ N/mm}$.

- 1- Déterminer le système global de ce système.
- 2- Déterminer les déplacements inconnus
- 3- Déduire les réactions aux appuis
- 4- Déterminer les efforts internes dans chaque barre.

4.3 Exercice 2

La structure plane suivante, Figure (4.3), est sollicitée à une force verticale $F = 10 \text{ KN}$ au noeud 2.

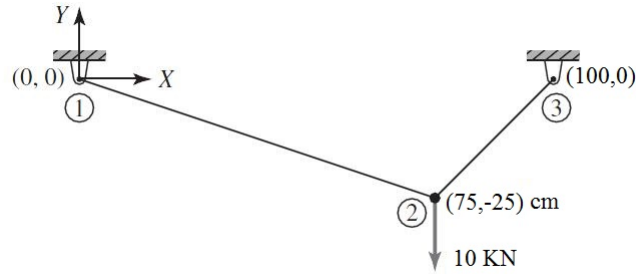


FIGURE 4.3: Structure plane à deux barres

Si les deux barres ont une section $A = 200 \text{ mm}^2$ et un module d'élasticité $E = 210 \text{ GPa}$, déterminer :

- 1- Le système global de ce système ;
- 2- Les déplacements du noeud 2 ;
- 3- Les réactions aux appuis
- 4- Les contraintes dans chaque barre.

Chapitre 5

Élément Fini de poutre 1D (Poutre de Bernoulli)

L'hypothèse de **Bernoulli** stipule qu'au cours de la déformation, les sections droites restent planes et perpendiculaires à la courbe moyenne. Cette hypothèse permet de négliger le cisaillement dans le cas de la flexion. Elle n'est pas valable pour les poutres courtes, à savoir que la dimension des sections doit être petite devant la longueur de la courbe moyenne.

5.1 Équation générale des poutres planes

L'étude des déformations longitudinales sur un tronçon $ABGH$, Figure 5.1, permet d'établir une relation linéaire entre la déformation longitudinale et le rayon de courbure ρ . En effet et de par sa définition, la déformation à l'ordonnée y est égale à :

$$\epsilon_{xx} = \frac{E'F' - EF}{EF} \quad (5.1)$$

donc :

$$\epsilon_{xx} = \frac{E'F' - EF}{EF} = \frac{(\rho - y).d\beta - \rho.d\beta}{\rho.d\beta} = -\frac{y}{\rho} \quad (5.2)$$

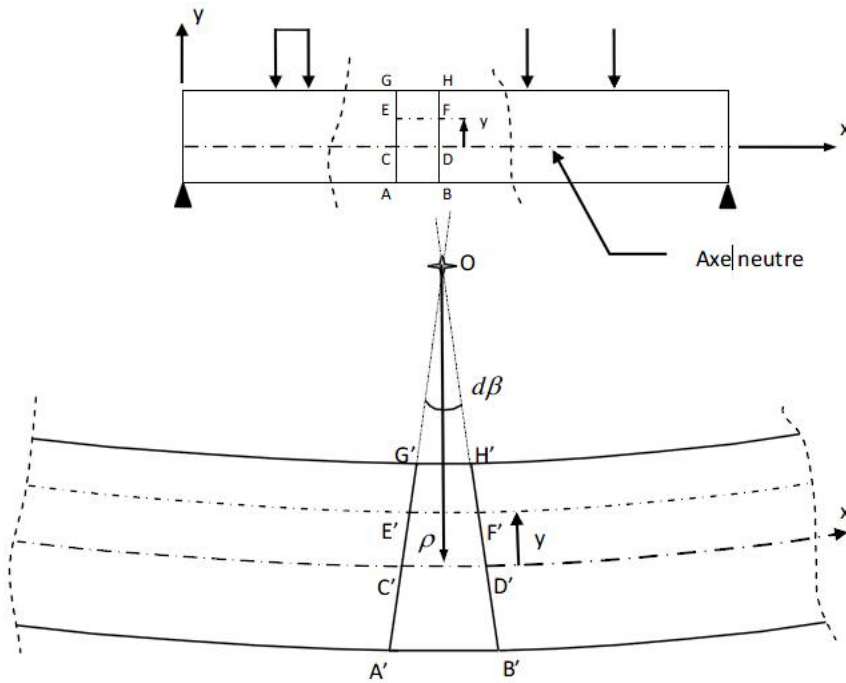


FIGURE 5.1: Déformation d'une poutre en flexion.

et la relation contrainte-déformation sera :

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} = -\frac{E}{\rho} \cdot y \quad (5.3)$$

l'équation d'équilibre est exprimée par :

$$\int_S \sigma_{xx} \cdot y \cdot dS - M_z = 0 \quad (5.4)$$

D'après (5.3) et (5.4), la relation moment-courbure de la théorie des poutres est exprimée par :

$$\frac{M_z}{EI_z} = -\frac{1}{\rho} \quad (5.5)$$

où : $I_z = \int_V y^2 \cdot dS$: moment d'inertie autour de l'axe z (perpendiculaire au plan xy).

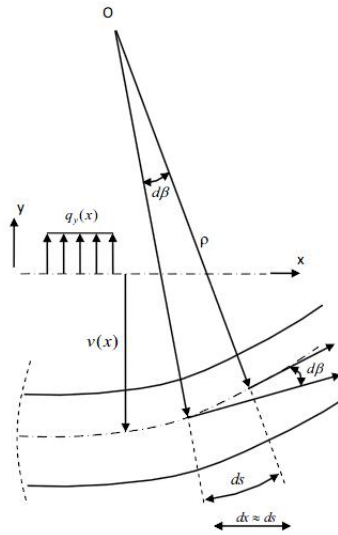


FIGURE 5.2: Rotation et courbure.

Sous l'effet des charges extérieures, le point situé sur l'axe neutre à l'abscisse x subira un déplacement vertical $v(x)$ et une rotation $\beta(x)$.

Par ailleurs et d'après la Figure (5.2), on sait que $dx = \rho d\beta \implies \frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{\rho}$

Comme la déformation de cisaillement γ_{xz} est nulle, donc :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial v}{\partial x} - \beta = 0 \quad (5.6)$$

donc :

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.7)$$

ce qui permet de déduire :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\beta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (5.8)$$

En égalisant (5.5) et (5.8), les relations moment-courbure et déformation-courbure deviennent :

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M_y}{EI_y} = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{y}{\rho} = -y \frac{d^2w}{dx^2} \quad (5.10)$$

5.2 Matrices de rigidité élémentaires en repère local

Soit un élément de poutre plane de longueur L , de section S et d'inertie I constantes et dont le matériau a un module d'élasticité longitudinal E .

Cet élément à deux noeuds destiné au calcul des réseaux de poutres chargés dans leur plan fait appel à la théorie des poutres qui permet de ramener le problème tridimensionnel à un problème unidimensionnel en condensant ses caractéristiques au niveau de sa fibre moyenne.

5.2.1 Champ de déplacement transversal $v(x)$

En flexion, chacun des noeuds de cet élément possède deux degrés de liberté, un en translation dans la direction transversale v et un associé à la rotation β autour de l'axe z perpendiculaire au plan xy .

Quatre conditions aux limites $(v_i, \beta_i, v_j, \beta_j)$ peuvent donc être utilisées pour définir sa fonction d'approximation ce qui explique l'expression de $v(x)$ sous la forme d'un polynôme de degré 3.

$$v(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

À partir des conditions aux limites de $v(x)$ (i.e. $v(0) = v_i, v'(0) = \beta_i, v(L) = v_j, v'(L) = \beta_j$), le vecteur des déplacements nodaux s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [N_d] \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

ou : $[N_d]$ est dite matrice nodale

en inversant le système (5.12), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} v_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} = [N_d]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} v_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

Soit en injectant (5.13) dans (5.11),

$$v(x) = \langle 1 \ x \ x^2 \ x^3 \rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

$$v(x) = \langle 1 \ x \ x^2 \ x^3 \rangle [N_d]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} v_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

$$v(x) = \langle 1 \ x \ x^2 \ x^3 \rangle \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

donc les fonctions de forme de l'élément poutre 1D sont exprimées par :

$$\begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{Bmatrix}^T = \langle 1 \ x \ x^2 \ x^3 \rangle \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

avec :

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ N_2(x) &= x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_3(x) &= 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \\ N_4(x) &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.2.2 Relation déformations-déplacements

D'après l'expression (5.10), la déformation est exprimée par :

$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (5.19)$$

avec :

$$v(x) = N_1(x).v_i + N_2(x).\beta_i + N_3(x).v_j + N_4(x).\beta_j \quad (5.20)$$

donc

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dN_1}{dx}v_i + \frac{dN_2}{dx}\beta_i + \frac{dN_3}{dx}v_j + \frac{dN_4}{dx}\beta_j \quad (5.21)$$

et

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2N_1}{dx^2}v_i + \frac{d^2N_2}{dx^2}\beta_i + \frac{d^2N_3}{dx^2}v_j + \frac{d^2N_4}{dx^2}\beta_j \quad (5.22)$$

La déformation peut être réécrite :

$$\varepsilon_{xx} = -y \frac{d^2v}{dx^2} = -y \left\langle \frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right\rangle \begin{Bmatrix} v_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

donc la matrice [B] de l'expression (2.7) sera exprimée par :

$$[B] = -y \left\langle \frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right\rangle \quad (5.24)$$

et explicitement

$$[B] = -y \left\langle \frac{-6}{L^2} + 12 \frac{x}{L^3} \quad \frac{-4}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - 12 \frac{x}{L^3} \quad \frac{-2}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \right\rangle \quad (5.25)$$

5.2.3 Relation contraintes-déformations

Comme il s'agit d'un problème unidimensionnel, le module d'élasticité E de la poutre permet la liaison entre la contrainte et la déformation :

$$\sigma_{xx} = E.\varepsilon_{xx} \quad (5.26)$$

5.2.4 Matrice de rigidité

La matrice de rigidité de la poutre dans le repère local est déterminée par l'expression (2.7)

$$[k_e] = \int_{V_e} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV_e$$

où : la matrice $\langle B \rangle_{1 \times 4}$ est donnée par (5.25)

La matrice $[D]_{1 \times 1} = E$ est donnée par l'expression (5.26)

en substituant les expressions (5.25) et (5.26) dans (2.7), on obtient :

$$[k_e] = \int_0^L \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} y^2 \begin{pmatrix} \frac{-6}{L^2} + 12 \frac{x}{L^3} \\ \frac{-4}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - 12 \frac{x}{L^3} \\ \frac{-2}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \end{pmatrix} \cdot E \cdot \begin{pmatrix} \frac{-6}{L^2} + 12 \frac{x}{L^3} & \frac{-4}{L} + 6 \frac{x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - 12 \frac{x}{L^3} & \frac{-2}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \end{pmatrix} dy \cdot dz \cdot dx \quad (5.27)$$

sachant que :

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} y^2 \cdot E \cdot dy \cdot dz = E \cdot I \quad (5.28)$$

où I est le moment d'inertie de la poutre suivant l'axe z .

L'expression (5.27) devient :

$$[k_e] = E \cdot I \cdot \int_0^L \begin{pmatrix} \frac{-6}{L^2} + 12 \frac{x}{L^3} \\ \frac{-4}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - 12 \frac{x}{L^3} \\ \frac{-2}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-6}{L^2} + 12 \frac{x}{L^3} & \frac{-4}{L} + 6 \frac{x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - 12 \frac{x}{L^3} & \frac{-2}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \end{pmatrix} dx \quad (5.29)$$

après intégration de tous les coefficients de la matrice, on obtient :

$$[k_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

5.3 Vecteur charges équivalentes en repère local

Considérons une poutre plane sollicitée uniformément, par une charge de densité q_y constante, Figure (5.3) (a)

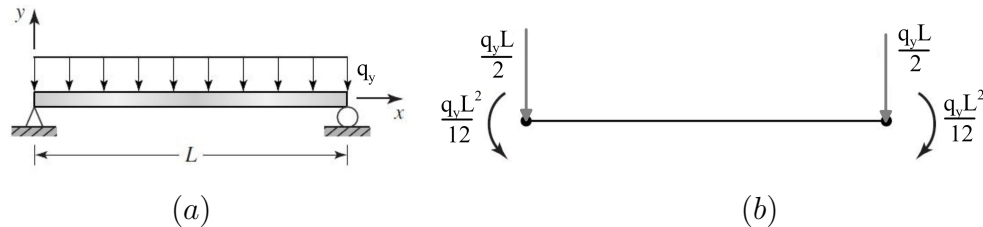


FIGURE 5.3: (a) Poutre plane chargée uniformément. (b) Charges équivalentes

Le vecteur charges équivalentes $\{f_e\}$, Figure (5.3) (b), est déterminé par :

$$\{f_e\} = \int_0^L \langle N \rangle^T \cdot (-q_y) \cdot dx \quad (5.31)$$

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{Bmatrix} \cdot (-q_y) \cdot dx = \begin{Bmatrix} -\frac{q_y L}{2} \\ -\frac{q_y L^2}{12} \\ -\frac{q_y L}{2} \\ \frac{q_y L^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

5.4 Exercice 1

Une poutre droite (1, 2, 3) de section droite constante est encadrée en 1 et repose en 2 sur un appui simple. Soit EI_z la rigidité linéique de flexion.

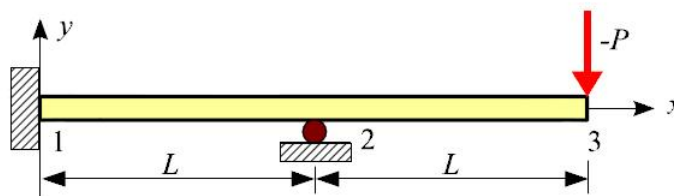


FIGURE 5.4: Poutre sollicitée à une charge concentrée.

Déterminer les déplacements inconnus et les réactions aux appuis

5.5 Exercice 2

La poutre droite représentée sur la Figure (5.5) est encastrée en 1 et repose sur un appui simple en 2 et 3. Soit EI_z la rigidité de flexion de la poutre. La poutre porte une force répartie de densité constante $-2p$ entre les noeuds 1 et 2 et $-p$ entre les noeuds 2 et 3.

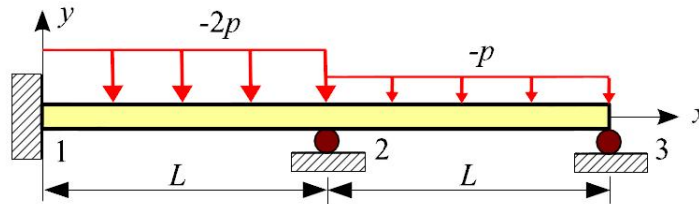


FIGURE 5.5: Poutre soumise à une force uniformément répartie

Déterminer les déplacements inconnus et les réactions aux appuis

Chapitre 6

Elément fini de Portique

L'élément de portique est un élément unidimensionnel qui travaille à la traction-compression et à la flexion en même temps, Figure (6.1)

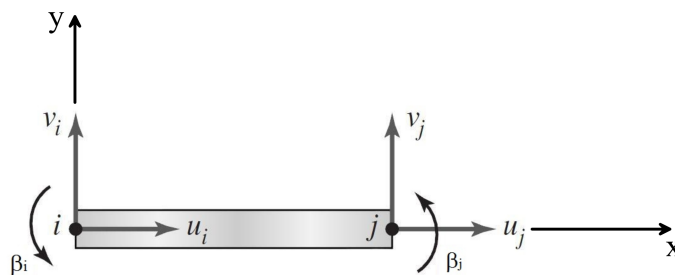


FIGURE 6.1: Elément fini de portique

6.1 Champ de déplacement axial $u(x)$

Sans le chargement de flexion, du fait de son raccourcissement ou de son allongement, l'élément a un comportement identique à celui d'une barre.

La déformation associée est homogène sur toute la section et exprimée, comme en (3.5), par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} \quad (6.1)$$

De plus et comme $u(0) = u_i$ en i et $u(L) = u_j$ en j , on obtient comme pour l'élément barre, la même fonction de déplacement que celle établie en (3.9) :

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_i + \frac{x}{L}u_j \quad (6.2)$$

6.2 Champ de déplacement transversal $v(x)$

En flexion, l'élément a un comportement identique à celui d'une poutre. Chacun des noeuds de cet élément possède deux degrés de liberté, un en translation dans la direction transversale $v(x)$ et un associé à la rotation β autour de l'axe z perpendiculaire au plan xy .

La déformation associée, d'après (5.10), est :

$$\varepsilon_{xx} = -y \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (6.3)$$

Sa fonction d'approximation est exprimée, d'après (5.20), par :

$$v(x) = N_1(x).v_i + N_2(x).\beta_i + N_3(x).v_j + N_4(x).\beta_j \quad (6.4)$$

6.3 Champ de déformation

En regroupant les résultats des chapitres précédents, déplacements de l'élément barre et ceux déplacements de l'élément poutre, le champ de déplacement complet de l'élément peut s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} & x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & 0 & 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \beta_i \\ u_j \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

sous forme condensée :

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = [N] \{q_e\} \quad (6.6)$$

La déformation de la poutre résultant de la concomitance de la flexion (6.3) et des variations

de longueur (6.1) (traction-compression) , on a :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (6.7)$$

En substituant (6.5) dans l'expression (6.7), le champ de déformation sera exprimé par :

$$\varepsilon_{xx} = \left\langle \begin{matrix} 1 - \frac{x}{L} & 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} & x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{x}{L} & 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{matrix} \right\rangle \begin{matrix} u_i \\ v_i \\ \beta_i \\ u_j \\ v_j \\ \beta_j \end{matrix} \quad (6.8)$$

ou sous forme condensée :

$$\varepsilon_{xx} = [B] \{q_e\} \quad (6.9)$$

6.4 Matrices de rigidité élémentaires en repère local

L'expression finale de la matrice de rigidité élémentaire sera déterminée par :

$$[k_e] = \int_{V_e} [B]^T E [B] dV_e = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} [B]^T E [B] dz dy dx \quad (6.10)$$

$$[k_e] = \int_{V_e} [B]^T E [B] dV_e = E \int_0^L \left(\int_{S_e} .dS_e \right) [B]^T [B] .dx \quad (6.11)$$

En substituant (6.8) dans (6.11) on obtient :

$$[k_e] = E \int_0^L \left(\int_{S_e} .dS_e \right) \left\{ \begin{matrix} 1 - \frac{x}{L} \\ 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{x}{L} \\ 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{matrix} \right\} \left\langle \begin{matrix} 1 - \frac{x}{L} & 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} & x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{x}{L} & 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{matrix} \right\rangle .dx \quad (6.12)$$

donc :

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

avec : $\int_{S_e} dS_e = S$ (Section constante). $\int_{S_e} y^2 . dS_e = I$ (Inertie constante).

$\int_{S_e} y . dS_e = 0$ (Moment statique nul par rapport à la fibre moyenne).

Les termes en ES sont bien liés aux degrés de liberté associés à la traction-compression et ceux en EI aux degrés de liberté associés à la flexion de l'élément.

6.5 Matrice de rigidité élémentaire en repère global

La Figure (6.2) permet la représentation de l'élément portique dans le repère global.

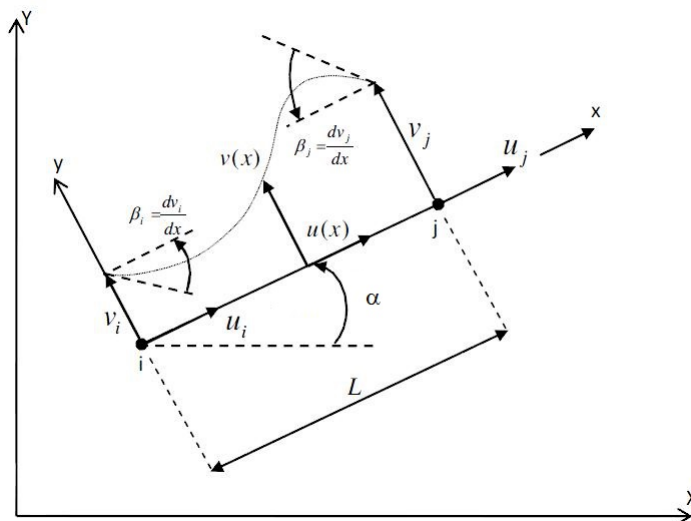


FIGURE 6.2: Elément de portique en repère global

6.5.1 Changement de repère

La matrice de transformation qui permet le passage du repère local au repère global est déterminée par les relations liant toutes les variables nodales de l'élément portique dans le repère local aux variables nodales dans le repère global.

Au noeud i les variables nodales u_i et v_i peuvent être exprimées par :

$$u_i = U_i \cos(\alpha) + V_i \sin(\alpha) \quad (6.14)$$

$$v_i = -U_i \sin(\alpha) + V_i \cos(\alpha) \quad (6.15)$$

avec :

$$\cos(\alpha) = \frac{X_j - X_i}{L}$$

et

$$\sin(\alpha) = \frac{Y_j - Y_i}{L}$$

avec L est la longueur de la barre exprimée par (4.1)

L'expression (6.14) peut être exprimée sous forme matricielle par :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

et pour les deux noeuds, i et j , on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (6.17)$$

L'élément de **poutre plane** possédant deux noeuds à **trois degrés de liberté**, la matrice de changement de base s'écrit en vertu de (4.22) :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \beta_i \\ u_j \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ B_i \\ U_j \\ V_j \\ B_j \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

ou sous forme condensée :

$$\{u_n\} = [T] \{U_n\} \quad (6.19)$$

avec :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

$[T]$ est la matrice des cosinus directeurs ou de transformation.

D'après (4.10), la matrice de rigidité de l'élément poutre plane peut être déterminée par :

$$[k_e]_g = [T]^T [k_e]_l [T] \quad (6.21)$$

d'où finalement :

$$[k_e]_g = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L}.c^2 + \frac{12EI}{L^3}.s^2 & (\frac{ES}{L} - \frac{12EI}{L^3}).c.s & -\frac{6EI}{L^2}.s & -\frac{ES}{L}.c^2 - \frac{12EI}{L^3}.s^2 & (-\frac{ES}{L} + \frac{12EI}{L^3}).c.s & -\frac{6EI}{L^2}.s \\ (\frac{ES}{L} - \frac{12EI}{L^3}).c.s & \frac{ES}{L}.s^2 + \frac{12EI}{L^3}.c^2 & \frac{6EI}{L^2}.c & (-\frac{ES}{L} + \frac{12EI}{L^3}).c.s & -\frac{ES}{L}.s^2 - \frac{12EI}{L^3}.c^2 & \frac{6EI}{L^2}.c \\ -\frac{6EI}{L^2}.s & \frac{6EI}{L^2}.c & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}.s & -\frac{6EI}{L^2}.c & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L}.c^2 - \frac{12EI}{L^3}.s^2 & -(\frac{ES}{L} - \frac{12EI}{L^3}).c.s & \frac{6EI}{L^2}.s & \frac{ES}{L}.c^2 + \frac{12EI}{L^3}.s^2 & (\frac{ES}{L} - \frac{12EI}{L^3}).c.s & \frac{6EI}{L^2}.s \\ -(\frac{ES}{L} - \frac{12EI}{L^3}).c.s & -\frac{ES}{L}.s^2 - \frac{12EI}{L^3}.c^2 & -\frac{6EI}{L^2}.c & (\frac{ES}{L} - \frac{12EI}{L^3}).c.s & \frac{ES}{L}.s^2 + \frac{12EI}{L^3}.c^2 & -\frac{6EI}{L^2}.c \\ -\frac{6EI}{L^2}.s & \frac{6EI}{L^2}.c & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}.s & -\frac{6EI}{L^2}.c & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

6.6 Vecteur charges équivalentes

- Vecteur charges équivalentes exprimé en repère local

Les expressions (3.23) et (5.32) définissent les vecteurs charges équivalentes pour les cas de traction-compression et flexion respectivement.

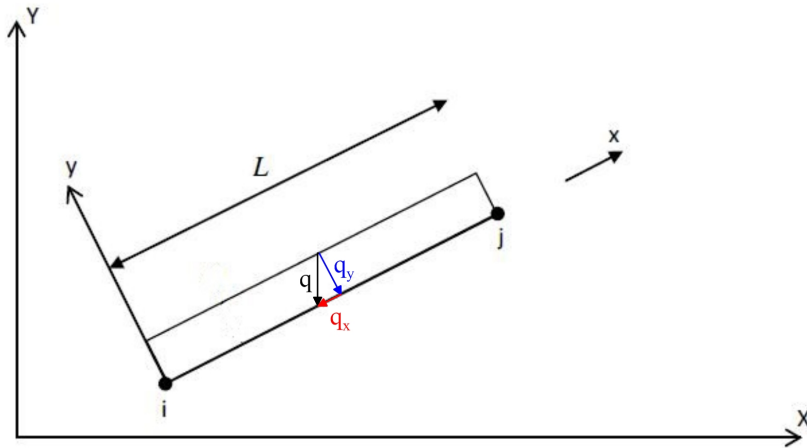


FIGURE 6.3: Élément de poutre plane chargé uniformément.

Le vecteur charges équivalentes pour l'élément fini de portique en repère local pour le cas d'une charge répartie de densité constante q , Figure (6.3), sera exprimé par:

$$\{f_e\}_l = \begin{Bmatrix} q_x \frac{L}{2} \\ -\frac{q_y L}{2} \\ -\frac{q_y L^2}{12} \\ q_x \frac{L}{2} \\ -\frac{q_y L}{2} \\ \frac{q_y L^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

où : q_x est la composante suivant x de la densité q
 et q_y est la composante suivant y de la densité q

- Vecteur charges équivalentes exprimé en repère global

Le vecteur charges équivalentes $\{f_e\}_g$ exprimé dans le repère global est déterminé par la transformation :

$$\{f_e\}_g = [T]^T \{f_e\}_l \quad (6.24)$$

6.7 Exercice

Soit la structure suivante constituée de trois éléments et quatre noeuds. Le chargement consiste en une charge répartie verticale q appliquée aux éléments 1 et 2, Figure(6.4). Sachant que les appuis aux noeuds 1, 3 et 4 sont tous encastrés. Déterminer les déplacements et efforts dans cette structure sachant que :

$$L = 10m, q = 10kN/m, E = 2.11011N/m^2, S = 0.00459m^2 \text{ et } I = 0.0000579m^4.$$

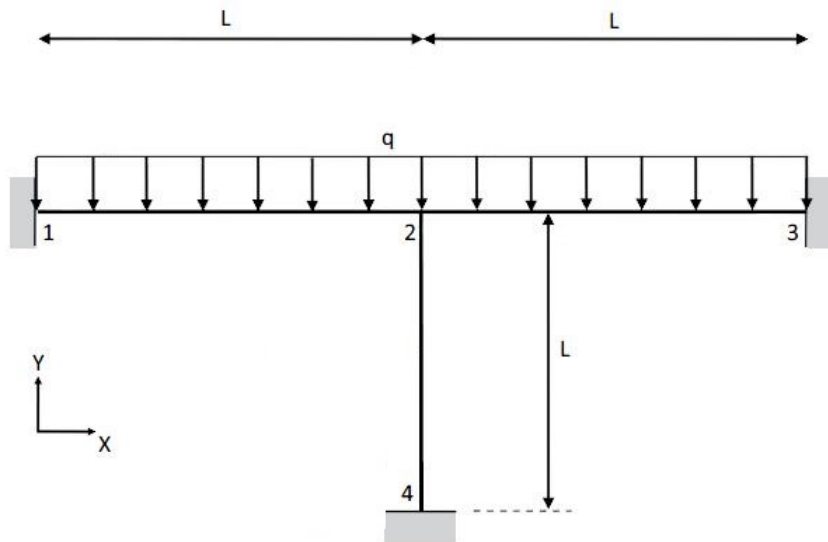


FIGURE 6.4: Portique à trois éléments

Bibliographie

- [1] AHMED BIA. *Mécanique des structures*. emBArec Press, 1994.
- [2] MICHEL. CAZENAVE. *Méthode des éléments finis, Approche pratique en mécanique des structures*. Dunod, Paris, 2010.
- [3] YVES. DEBARD. *Méthode des éléments finis*. Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique, 2011.
- [4] GILBERT. TOUZOT GOURI. DHATT. *Une présentation de la méthode de éléments finis*. Maloine S.A. Editeur Paris et Les presses de l'université laval québec., 1981.
- [5] DAVID V. HUTTON. *Fundamentals of Finite Element Analysis*. McGraw Hill, 2003.
- [6] J.F. IMBERT. *Analyse des structures par éléments finis*. CEPADUES EDITIONS, 1984.
- [7] S. KEBDANI O. RAHMANI. *Introduction a la méthode des éléments finis pour les ingénieurs*. Office des publications universitaires, 1988.

