Exercice 1 :

Trois enseignants E1, E2, E3 devront donner Dimanche prochain un certain nombre de séances de cours pour trois groupes C1, C2, C3:

E1 doit enseigner C1 pendant 2 heures et C2 pendant 1 heure;

E2 doit enseigner C1 pendant 1 heure, C2 pendant 1 heure et C3 pendant 1 heure;

E3 doit enseigner C1 pendant 1 heure, C2 pendant 1 heure et C3 pendant 2 heures.

Propose un graphe pour représenter cette situation? Quel est le type de graphe?

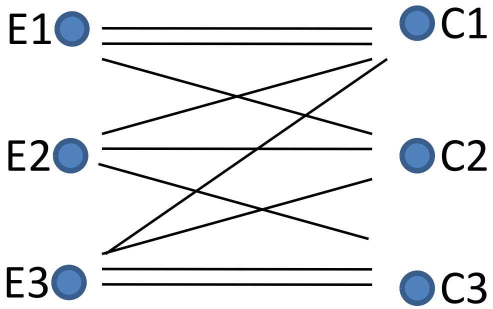
Donner le nombre minimal des créneaux horaires?

En utilisant le graphe, proposer un emploi du temps

Solution

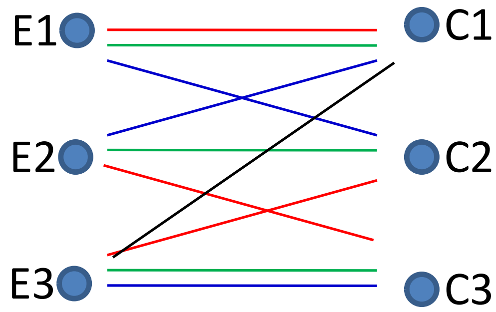
On remarque qu'on a deux sous ensembles de sommets les enseignants E et les groupes C, toutes les relations (arêtes) relient un sommet de E avec un sommet de C, dans ce cas on un graphe bi-parti.

On commence par relier les éléments de E avec les éléments de C avec des artes on obtient le graphe suivant:



Le nombre max de créneaux horaires correspond au nombre max d'heures que peut dispenser un enseignant qui est le degré max des éléments de E $Max(d(Ei))=d(E3)=4$; donc il ne faut quatre heures dans notre emploi du temps.

On adopte la convention suivante: 1[ère] heure en rouge,2[ème] en vert, 3[ème] en bleu et la 4[ème] en noir, on commence par affecter la 1[ère] heure (arbitrairement) puis la 2[ème], la 3[ème] et enfin la 4[ème] comme dans le graphe à droite:



On obtient le planning suivant

	E1	E2	E3
1ère heure(rouge)	C1	C3	C2
2ème heure(vert)	C1	C2	C3
3ème heure (bleu)	C2	C1	C3
4ème heure (noir)			C1

Exercice 2 :

On considère le graphe orienté G = (S, A) tel que

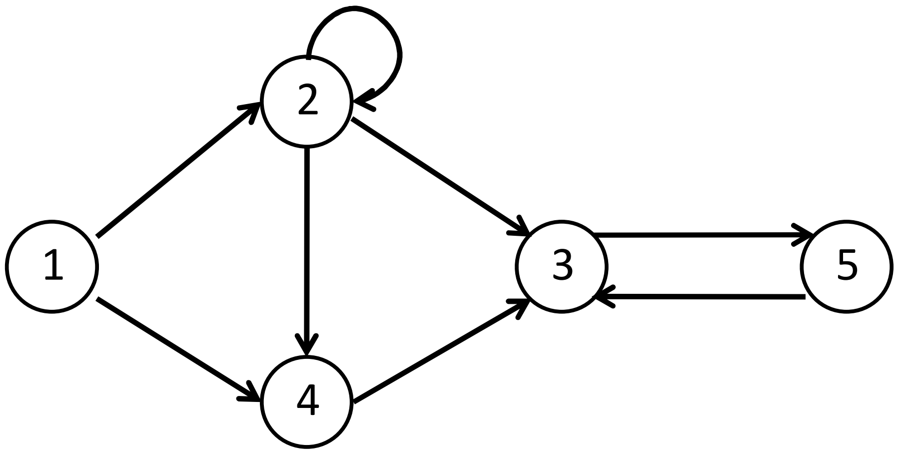
S = {1, 2, 3, 4, 5}, A = {(1, 2),(1, 4),(2, 2),(2, 3),(2, 4),(3, 5),(4, 3),(5, 3)}

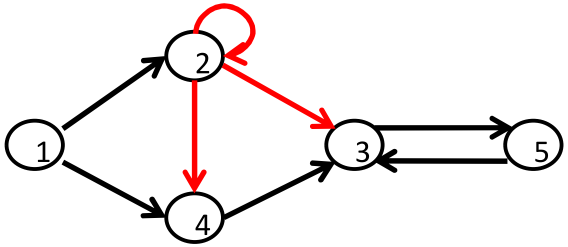
1. Tracer le graphe G.

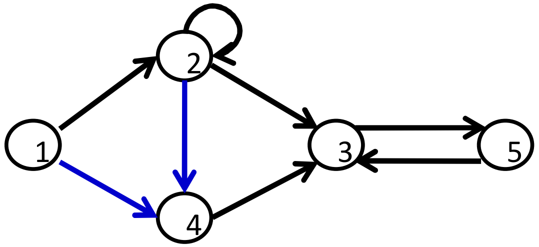
2. Donner le demi-degré extérieur de 2 et le demi-degré intérieur de 4,

3. Donner les sommets prédécesseurs de 4 et les sommets successeurs de 2,

4. Construire un graphe partiel et un sous-graphe de ce graphe.

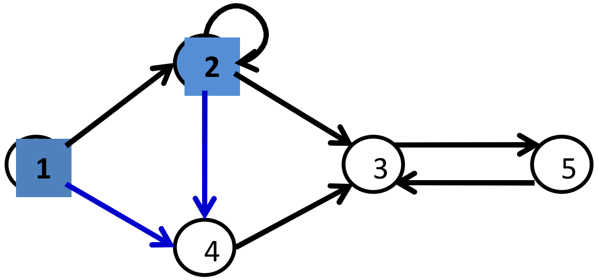




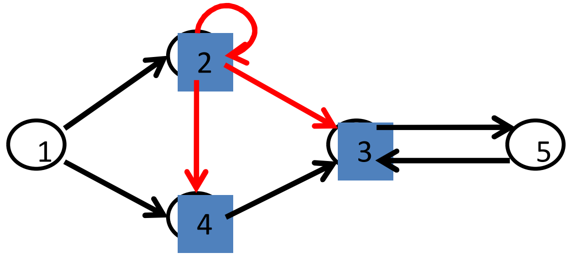


$d^{+}(2)=3$
- arcs en rouge partants du sommet 2

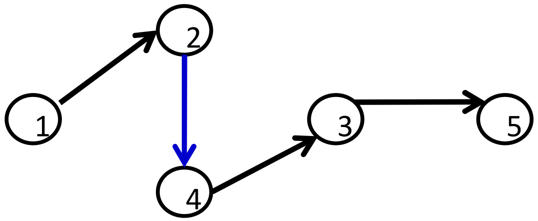
$d^{-}(4)=2$
arcs en bleu arrivants au sommet 4



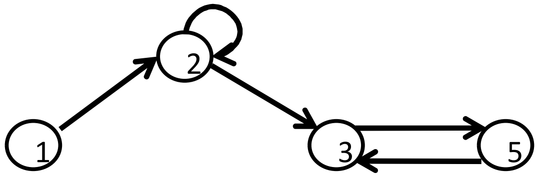
Pred(4)={1,2} ➔ sommets s_i tel que $(S_i,4) \in A$



Succ(2)= {2,3,4} ➔ sommets s_j tel que $(2,S_j) \in A$



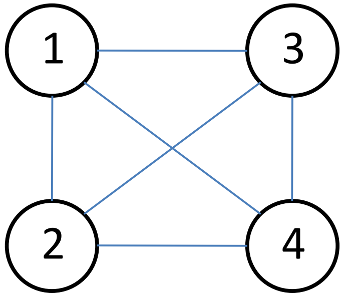
Exemple de graphe partiel obtenu par la suppression
Des arcs: {(1, 4),(2, 2),(2, 4),(3, 5),(4, 3)}



Exemple de sous graphe obtenu par la suppression du nœuds 4 et par conséquent, tous les arcs ayant le nœud 4 comme extrémité.

Exercice 3 :

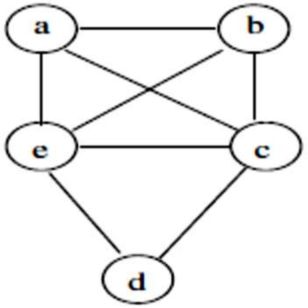
Dessiner un graphe non orienté complet à 4 sommets.
Quel est le degré des sommets de ce graphe ?
Combien d'arêtes possède-t-il ?
Généralisez ces résultats à un graphe simple complet ayant n sommets.



-Le degré de chacun des 4 sommets du graphe est 3
- Le graphe comporte 6 arêtes.
- Si on a n sommet d'un graphe complet, le degré de chaque sommet est de n-1, chaque arête participe au degré de ses extrémités et donc génère 2 degrés supplémentaires.
La somme des degrés de tous les sommets est de n(n-1).
Le nombre d'arêtes est déduit par |A|=n(n-1)/2 (puisque chaque arête augmente la somme des degrés par 2.
N.B: la propriété |A=n(n-1)/2 des graphes simples complets peut être prouvée par récurrence.

Exercice 5:

Montrer que le graphe suivant est eulérien



-Le degré de chacun des 4 sommets du graphe est 3

- Le graphe comporte 6 arêtes.

- Si on a n sommet d'un graphe complet, le degré de chaque sommet est de n-1, chaque arête participe au degré de ses extrémités et donc génère 2 degrés supplémentaires.

La somme des degrés de tous les sommets est de n(n-1).

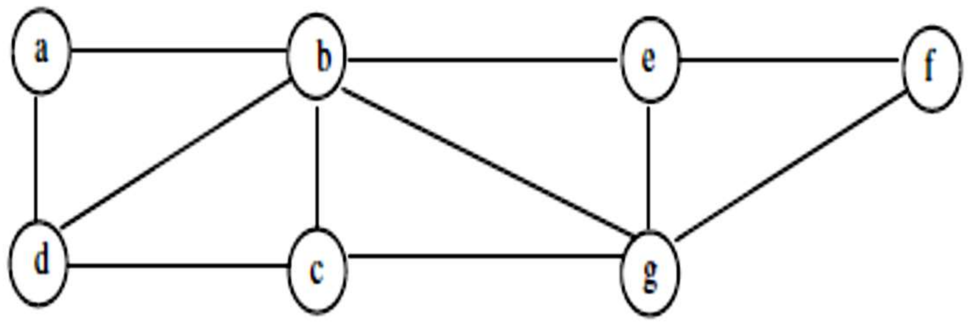
Le nombre d'arêtes est déduit par |A|=n(n-1)/2 (puisque chaque arête augmente la somme des degrés par 2.

N.B: la propriété |A=n(n-1)/2 des graphes simples complets peut être prouvée par récurrence.

Exercice 6:

On considère le graphe non orienté suivant :

Combien faut-il enlever d'arêtes à ce graphe pour le transformer en arbre ? Donnez un graphe partiel de ce graphe qui soit un arbre.



Solution:

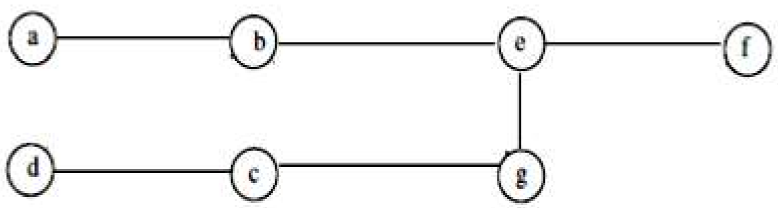
Soient |A| et |S| respectivement, le nombre d'arêtes et de sommets d'un graphe G

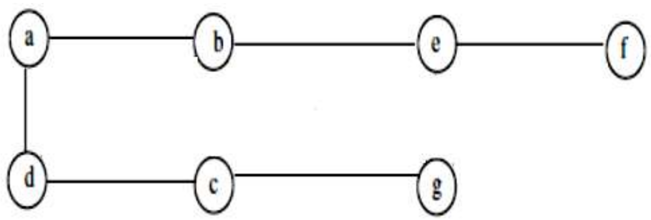
G un graphe ➔ |A|=|S|-1

Dans notre cas on a |S|=7, pour que G soit un arbre il faut que |A|=7-1=6

Et comme |A|=11 donc il faut enlever au minimum 11-6=5 arêtes.

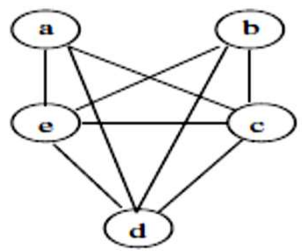
Les deux graphes ci-dessous représentent deux graphes partiaux de G et qui sont des arbres





Exercice 7:

Montrer que le graphe suivant est planaire :



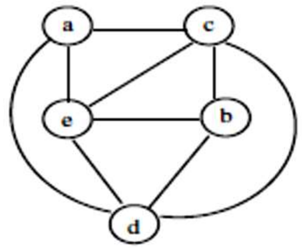
- Solution:

-Le degré est planaire si n’a pas de mineurs (sous graphe obtenu par fusion ou suppression de sommets) isomorphe à $K_{3,3}$ ou K_5

-Le graphe ci-dessus n’a pas de sous graphe de $K_{3,3}$ du fait que son nombre de sommet est 5 (un $K_{3,3}$ est un graphe de 6 sommets),

- Le graphe n’est pas isomorphe avec K_5 du fait que l’arête ab est inexistante.

- Le graphe ci-dessus est donc planaire, en effet il peut être redessiner comme suit:



Exercice 8:

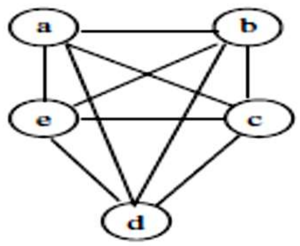
Vérifiez la formule d’Euler dans le cas d’un arbre.

Solution:

Nombre de faces d’un arbre=1 (sans cycle) et le nombre d’arêtes= s-1, f+s=1+(a+1)=a+2.

Exercice 9:

Montrez, en utilisant la formule d’Euler que le graphe suivant n’est pas planaire.



Solution:

f: nombre de faces, a: nombre d’arêtes et s: nombre de sommets

G est simle (pas d’arêtes multiples ni de boucles). Chaque face est délimitée au moins de trois arêtes.

Si on compte f faces on va compter au moins 3f arêtes, certaines arêtes étant communes, mais pas toutes(les isthmes). D'où l'inégalité:

3f<=2a .... (1)

et comme f+s=a+2 (formule d’euler) on a f=a+2-s ➔ 3f=3a-3s+6 .... (2)

De (1) et (2) on a

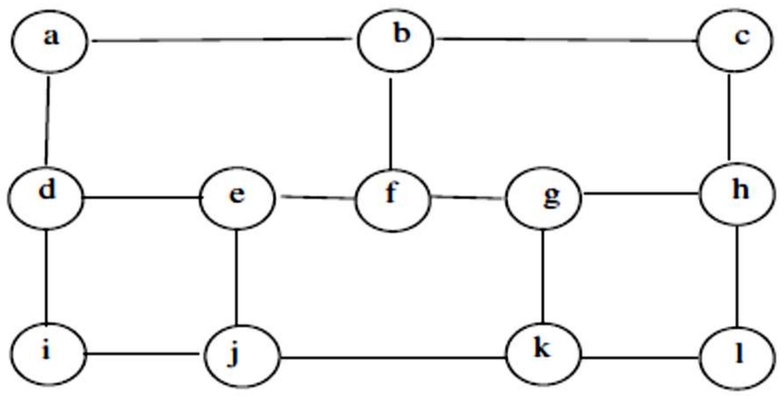
3a-3s+6 <=2a ➔ a+6<=3s ...(3)

Pour le graphe (K_5) de l’exercice on a=10 et s=5 on remplaçant dans (3) on trouve

16<=15 (contradiction) donc K_5 n’est pas planaire.

Exercice 10:

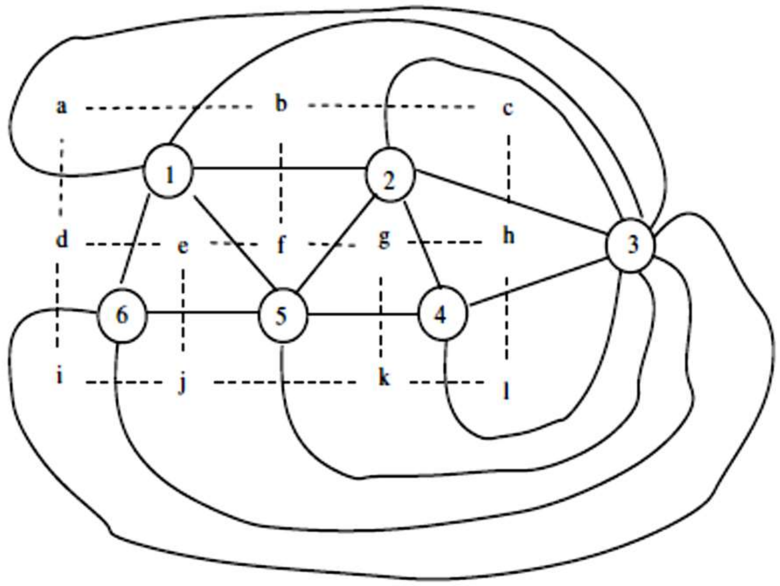
Est-il possible de dessiner sans lever la main un lacet (cordon) qui traverse chaque arête de ce graphe planaire une et une seule fois ?



Solution:

Considérons le graphe G' obtenu comme suit:

- À chaque face f_i de G correspond un sommet s_i dans G'
- À chaque arête de G frontière entre entre deux faces f_i et f_k correspond une arête a_{ik} reliant les sommets si et s_k



Traverser toutes les arêtes de G revient à trouver une chaine Eulérienne dans G' or on a 4 sommets de G' de degré impair (1,2,3 et 5) donc pas de chaine Eulérienne et le problème n'admet pas desolution,

Exercice 11:

5 étudiants (Dupont, Dupond, Durand, Duval et Duduche) doivent passer certains examens. Les examens que doivent passer chaque étudiant sont récapitulés dans le tableau suivant :

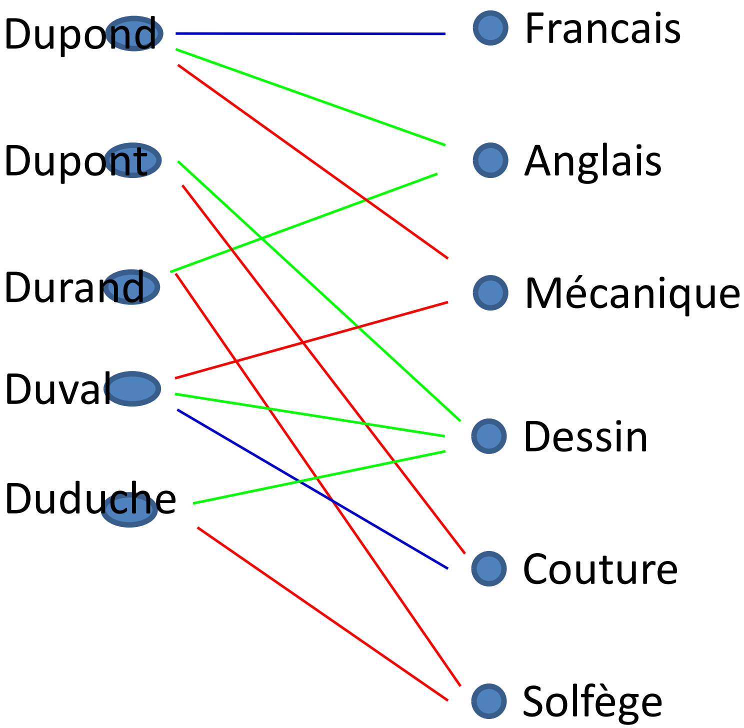
Dupond	Français, anglais, mécanique
Dupont	Dessin, Couture
Durand	Anglais, Solfège
Duval	Dessin, Couture, Mécanique
Duduche	Dessin, Solfège

On désire que tous les étudiants devant subir une même épreuve le fassent en même temps. Chaque étudiant ne peut se présenter qu'à une épreuve au plus par jour. Quel est le nombre minimal de jours nécessaires à l'organisation de toutes les épreuves ?

Solution:

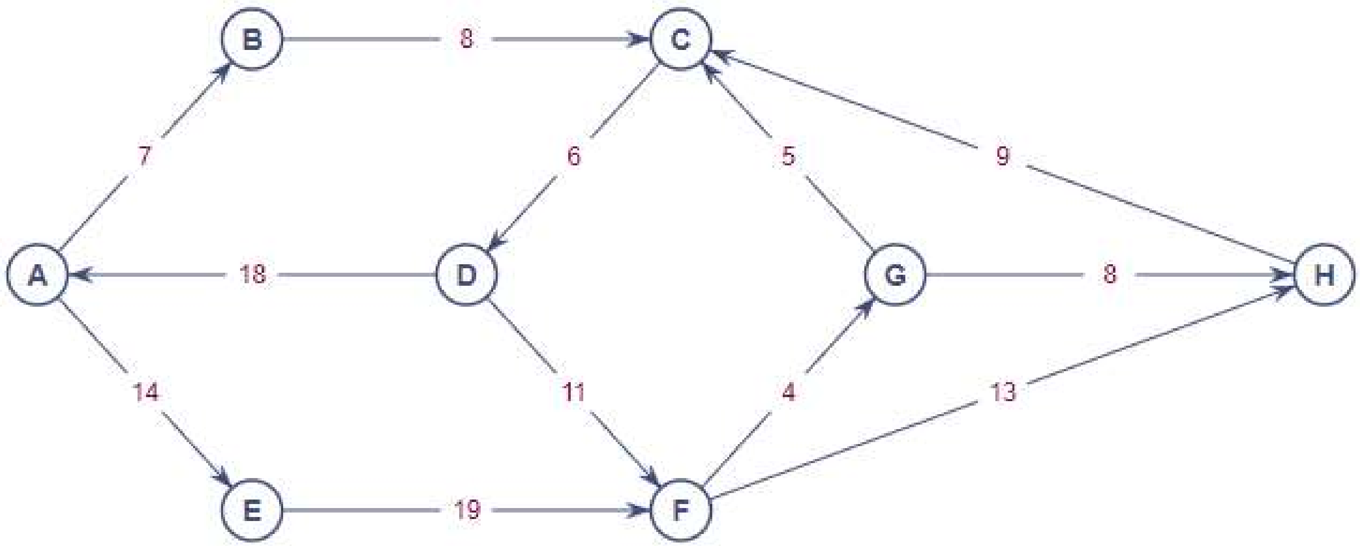
Solution (11):

Après représentation par graphe, le problème revient au coloriage de ce graphe (trouver le nombre chromatique) qui est de 3



Exercice 12:

Trouvez les plus courts chemins partants de A (à partir de A):



Solution 12:

D(i): Distance depuis le nœuds initial (ici le nœud A) vers le nœud i
P(i) : Prédécesseur de i qui offre la meilleure distance D(i) à une étape donnée,

Rappels: Principe de l'algorithme de Dijkstra

1- On part avec l'ensemble N={A} (le nœud qu'on veut calculer les chemins les plus courts avec les autres), pour tous les autres nœuds on initialise leurs distances D à ∞ et leur prédécesseur à néant (le tiret -)

Itérations:

2- On choisi un nœud i qui n'appartient pas à l'ensemble N et avec le minimum de distance D(i) et on le met dans N

3- Pour tous les successeurs de i: Mettre à jour les distances et les prédécesseurs comme suit: soit j un successeur de i

D(j)=min (D(j), D(i)+W(i,j)) W(i,j) est le poid de l'arête a(i,j),

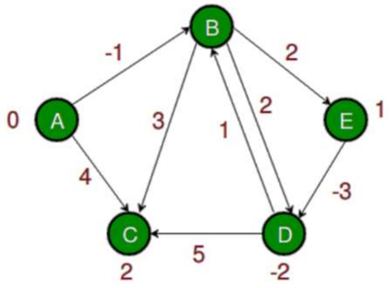
Si D(i)+W(i,j)<D(j) alors P(j)=i

4-Répéter 2 et 3 jusqu'à ce qu'il ne reste aucun nœud de G non inclus dans N

On appliquant l'algorithme sur le graphe G on obtient le tableau ci après:

Etape	N	D(A), P(A)	D(B), P(B)	D(C), P(C)	D(D), P(D)	D(E), P(E)	D(F), P(F)	D(G), P(G)	D(H), P(H)
Initialisation	{}	0,-	∞,-	∞,-	∞,-	∞,-	∞,-	∞,-	∞,-
Etape 1	{A}		**7,A**	∞,-	∞,-	14,A	∞,-	∞,-	∞,-
Etape 2	{A,B}			15,B	∞,-	**14,A**	∞,-	∞,-	∞,-
Etape 3	{A,B,E}			**15,B**	∞,-		33,E	∞,-	∞,-
Etape 4	{A,B,E,C}				**21,C**		33,E	∞,-	∞,-
Etape 5	{A,B,E,C,D}						~~33,E~~ **32,D**	∞,-	∞,-
Etape 6	{A,B,E,C,D,F}							**36,F**	45,F
Etape 7	{A,B,E,C,D,F,G}								~~45,F~~ **44,G**

Exercice 13: Trouver les plus courts chemins à partir de A (Algorithme de Bellman-Ford)



Algorithme 8: Algorithme de Bellman

Données : Un graphe orienté pondéré $G = (X, A, W)$ et un sommet $s \in X$

Résultat : Le plus court chemin de s vers tous les autres sommets de G

```
// V_0, ..., V_N : plus court chemins de s à tout autre sommet de G, d'au
   plus 0, ..., N sommets
```

Initialiser V_0 à $+\infty$

$V_0[s] = 0$

`// Itération courante k`

$k \leftarrow 0$

répéter

- $k \leftarrow k + 1$
- **pour** *y allant de 1 à N, $y \neq s$* **faire**
  - $V_k[y] \leftarrow \min(V_{k-1}[y], \min_{x \in \Gamma^-(y)}\{V_{k-1}(x) + W[x, y]\})$

jusqu'à $k = N$ *ou* $V_k = V_{k-1}$

si $V_k \neq V_{k-1}$ **alors**

- **retourner** *Il existe un circuit de longueur négative*

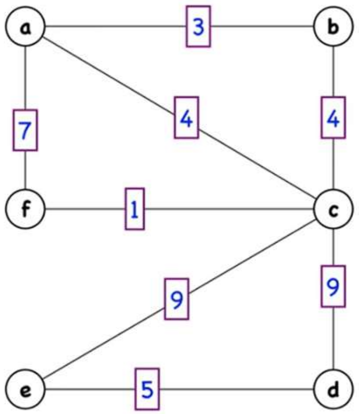
sinon

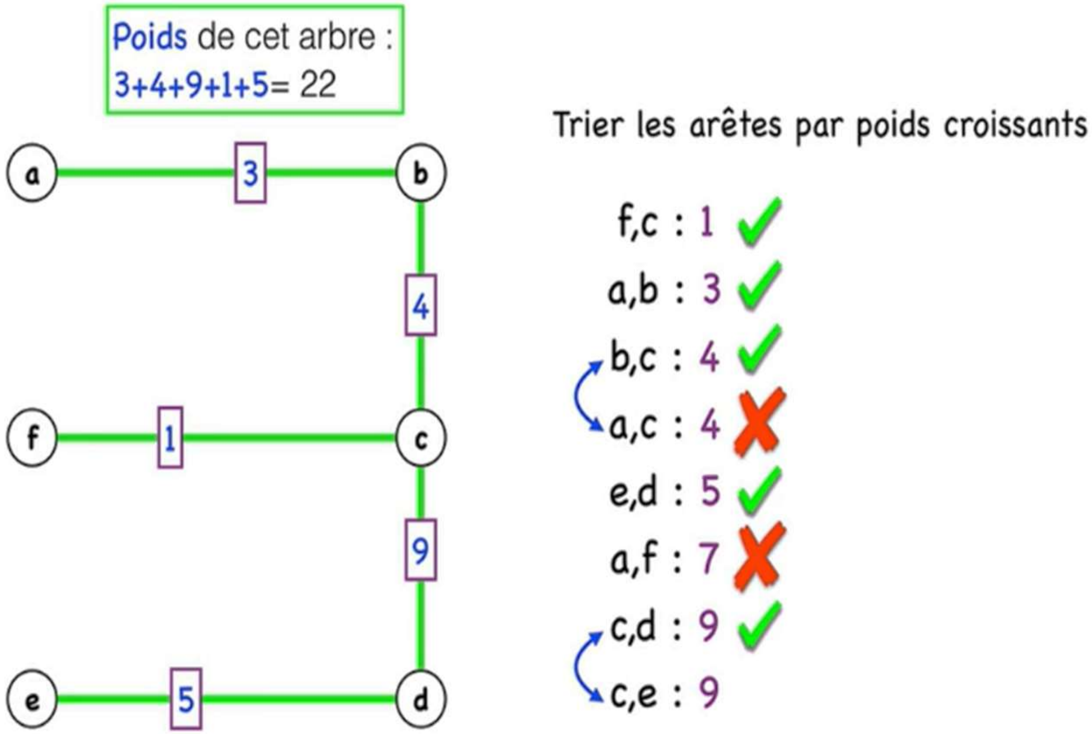
- **retourner** V_k

	A	B	C	D	E
V0	0	∞	∞	∞	∞
V1	0	**-1**	4	∞	∞
V2		-1	4 2	1	**1**
V3		-1	2	1 -2	**1**
V4		-1	**2**	**-2**	1

On a V4=V3 donc on arrive à la fin,

Exercice 14: Appliquer l'algorithme de Kruskal pour construire un arbre couvrant de poids minimal





Exercice 15: Déterminer le flot maximal à partir du graphe de flot ci-dessous (Algorithme de Ford-Fulkerson)