Chapitre 1
Introduction à la recherche opérationnelle

1.1 Introduction

La recherche opérationnelle (est appelée aussi : science de la gestion ou aide à la décision) est une discipline dont le but est de fournir des méthodes ou des techniques pour répondre à un type précis de problème, c'est-à-dire à élaborer une démarche universelle pour un type de problème qui aboutit à la (les) solution(s) la (les) plus efficace(s). Cette démarche comporte en général deux parties : la modélisation [1], qui consiste à représenter les opérations du système par un modèle mathématique, et le calcul d'un plan optimal ou quasi optimal.

Les modèles de recherche opérationnelle sont classés selon deux grandes catégories : modèles déterministes et modèles stochastiques (probabilistes). Certains modèles sont toutefois traités de façons plus appropriées comme hybrides, modèles comportant des éléments des deux catégories (déterministes et probabilistes). Le schéma suivant (FIG 1.1) permet d’avoir une vue d’ensemble des principaux sujets qui sont regroupés sous les techniques de Recherche Opérationnelle et qui sont associées aux différents types de modèles.

Généralement, ces méthodes sont employées sur des problèmes tels que leur utilisation "manuelle" devient impossible. C'est pourquoi, du fait qu'elles sont rationnelles, les démarches proposées par la recherche opérationnelle peuvent être traduites en programmes informatiques. Cette traduction d'une démarche en un programme informatique n'est pas sans difficulté. Tout d'abord, le temps d'exécution du programme résultant et/ou la place occupée dans la mémoire de l'ordinateur peuvent ne pas être acceptables. Ainsi, une méthode en recherche opérationnelle sera jugée sur ces critères de temps et de place. Plus une méthode sera rapide et peu gourmande en mémoire, plus elle sera considérée bonne.

1.2 Historique

Avec la Seconde Guerre mondiale, en 1940, Patrick Blackett est appelé par l'état-major anglais à diriger la première équipe de recherche opérationnelle, pour résoudre certains problèmes tels que l'implantation optimale de radars de surveillance ou la gestion des convois d'approvisionnement. Le qualificatif « opérationnelle » vient du fait que la première application d'un groupe de travail organisé dans cette discipline avait trait aux opérations militaires. La dénomination est restée par la suite,

[1] Un modèle est un moyen pour mieux comprendre la réalité ; il est utilisé pour représenter les propriétés fondamentales d’un certain phénomène. Un modèle permet de simuler une situation réelle pour mieux la connaître et l’analyser.

même si le domaine militaire n'est plus le principal champ d'application de cette discipline. Après la guerre, les techniques se sont considérablement développées, grâce, notamment, à l'explosion des capacités de calcul des ordinateurs. Les domaines d'application se sont également multipliés.

Depuis les années 70, les activités de recherche en R.O. au niveau mondial n'ont cessé de se développer tant au niveau de ses concepts théoriques et de l'amélioration technique de ses outils d'optimisation qu'au niveau applicatif où elle intervient de manière cruciale dans des secteurs de plus en plus nombreux et diversifiés comme les transports, la production industrielle, la planification, l'informatique, les télécommunications, l'énergie, l'administration, ...

La théorie des graphes est l’une des techniques (outils) les plus utilisées de la recherche opérationnelle. Ceci s’explique par la grande variété des problèmes qui peuvent être modélisés par des graphes et par l’efficacité des méthodes de résolution (algorithmes).

L’histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d’Euler au XVIIIe siècle et trouve son origine dans l’étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (les habitants de Königsberg se demandaient s’il était possible, en partant d’un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l’échiquier ou le problème de coloriage de cartes.

La théorie des graphes s’est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales.

Depuis le début du XXe siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d’Erdös.

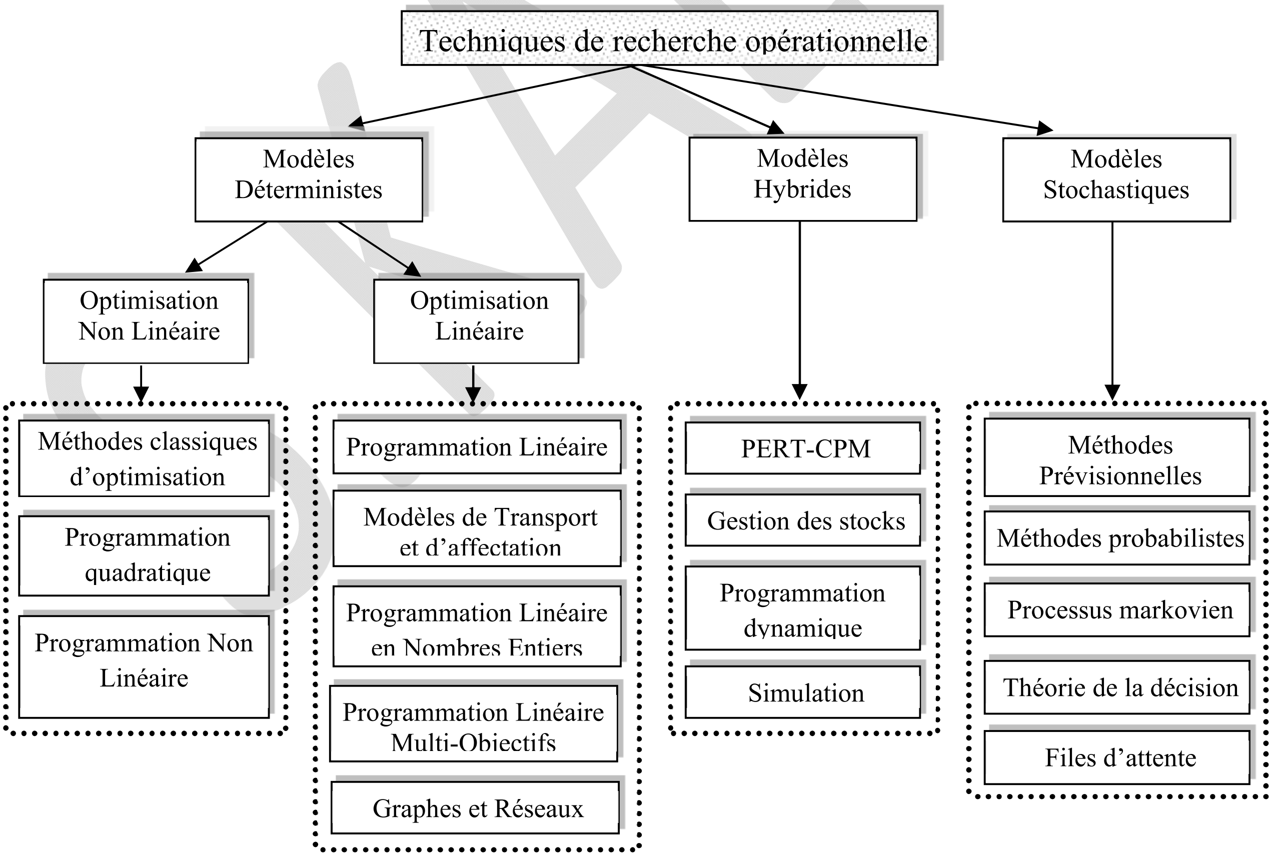

FIG 1.1 Techniques de Recherche Opérationnelle

La théorie des graphes est la discipline mathématique et informatique qui étudie les graphes, lesquels sont des modèles abstraits de dessins de réseaux reliant des objets.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques, . . .

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs. Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

Pour résoudre de nombreux problèmes concrets, on est amené à tracer sur le papier des petits dessins qui représentent (partiellement) le problème à résoudre. Bien souvent, ces petits dessins se composent de points et de lignes continues reliant deux à deux certains de ces points. On appellera ces petits dessins des graphes, les points des sommets (objets) et les lignes des arcs ou arêtes (liens).

Les graphes permettent de manipuler plus facilement ces objets et leurs relations.

L'ensemble des techniques et outils mathématiques mis au point en théorie des graphes permettent de démontrer facilement des propriétés, d'en déduire des méthodes de résolution, des algorithmes, ...

1.3 Méthodologie de Recherche Opérationnelle

Nous voulons présenter une démarche qui permettra, dans la plupart des cas, de structurer sans trop de difficultés un modèle de recherche opérationnelle. Bien que la démarche soit simple, la complexité de la modélisation provient du contexte même de la situation (problème) à modeler. Comme nous allons constater ultérieurement, la résolution par les techniques appropriées sera l'étape la plus facile, une fois que le modèle est bien structuré.

Dans le cas où la situation (problème) que l'on veut analyser se prête à l'utilisation de la technique de recherche opérationnelle comme outil d'aide à la décision, le chercheur opérationnel, face à un problème, pour pouvoir construire un modèle doit répondre aux questions suivantes :

1. Quels sont les objets (éléments) de ce modèle ?
2. Quelles sont les valeurs autorisées pour ces objets (contraintes) ?
3. Quelle est la quantité que l'on veut maximiser ou minimiser (objectif) ?

Une fois le modèle écrit, le chercheur opérationnel va proposer un algorithme de résolution, pour un même modèle, un grand nombre d'algorithmes peut être proposé, la recherche opérationnelle dispose d'outils théoriques qui permettent a priori d'apprécier les points (rapidité de l'algorithme, qualité de la solution ….) sans avoir à expérimenter (validation théorique).

Ensuite, il faut réaliser un prototype de l'algorithme qui permet de démontrer sa réalisabilité pratique (validation pratique). Enfin, si ces étapes sont validées, on passe au déploiement de la solution, qui consiste à produire un code robuste, programmer une interface, discuter les formats des fichiers d'input, de discuter la question de la maintenance du code, etc.

En résumé, la méthodologie de la recherche opérationnelle suit en général le schéma suivant :

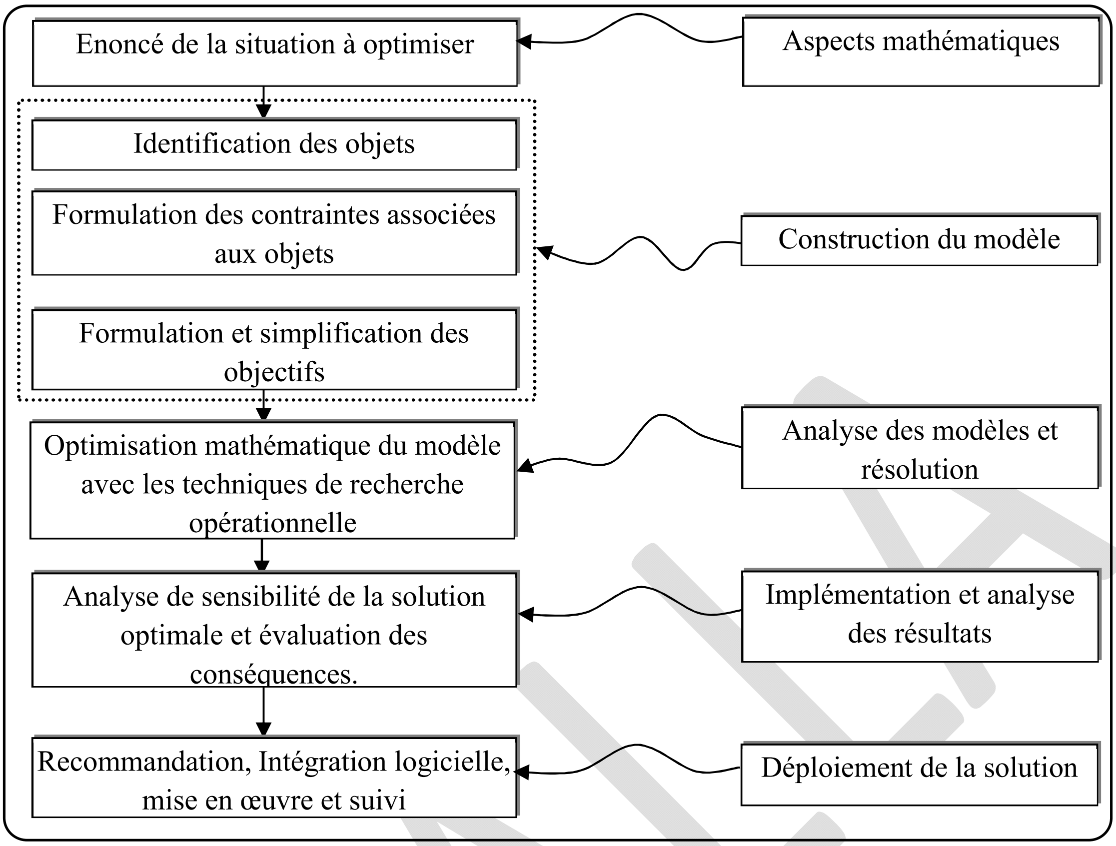

FIG 1.2 Méthodologie de modélisation et analyse en Recherche opérationnelles

1.4 Rappels Mathématiques (Matrices)

1.4.1 Définitions et notations

Définition 1 :

Une matrice de format **(n, m)** à coefficients dans **K** est un tableau de **n x m** éléments de **K** organisés en **n** lignes et **m** colonnes. Chaque élément de la matrice est repéré par deux indices, le premier est l'indice de la ligne, le second est l'indice de la colonne.

K éventuellement de booléens, de complexes etc ...

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

On la note aussi : $A=[a_{ij}]$ avec $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq m$,

Avec n : nombre de lignes,

m : nombre de colonnes

a_{ij} : élément de A.

Définition 2 :

- Le couple (n, m) est appelé **dimension** de la matrice A.
- L'ensemble des matrices de dimension (n, m) est noté $\mathbf{M_{n,m}(K)}$.
- Si n = m alors A est dite **carrée** d'ordre *n* et on note : $A \in M_n(K)$.

- Une matrice de dimension (n, 1) est une matrice **colonne**.
- Une matrice de dimension (1, m) est une matrice **ligne**.

Exemple :

Soit A=[a_{ij}]= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ une matrice de n=3 lignes, m=3 colonnes

- **a_{23}**=3 un élément de A.
- **Dimension** de A est (3,3).
- A∈ **$M_{3,3}$(K),** n=m=3 alors A est dite **carrée** d'ordre 3 donc A ∈ M_3(K).

1.4.2. Opérations élémentaires sur les matrices

Définition 3 : (Addition)

Soient A, B deux matrices de dimension (n, m) sur K :

A =[a_{ij}] ; B =[b_{ij}], i=1…n ; j=1…m.

On appelle somme de A et B la matrice C de dimension (n, m) sur K définie par :

C=[c_{ij}]=A + B tel que $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (pour i=1…n ; j=1…m).

Il suffit pour cela d'additionner les coefficients deux à deux où A et B sont toutes les deux des matrices à n lignes et m colonnes.

On a les propriétés suivantes :

- (A+B)+C=A+(B+C)
- A+0=A
- A+B=B+A
- A+(-A)=0

Définition 4 : (Multiplication par un scalaire)

Pour multiplier une matrice par un nombre k, on multiplie chaque coefficient a_{ij} de A par k : C=[c_{ij}]=k*A tel que $c_{ij}=k*a_{ij}$ (pour i=1…n ; j=1…m).

Définition 5 : (Multiplication de deux matrices)

Soients A une matrice à n lignes p colonnes et B une matrice à p lignes m colonnes, leur produit est la matrice C=A*B à n lignes m colonnes est obtenu en multipliant la i^{eme} ligne de A par la j^{eme} colonne de B.

Le produit est défini par ses coefficients :

cij = $\sum_{k=1}^{p} a_{ik} * b_{kj}$=$a_{i1}*b_{1j} + a_{i2}*b_{2j} + ...+a_{ip}*b_{pj}$ (pour i =1…n et j = 1…m).

Pour que le produit A*B soit possible, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

Définition 6 : (Transposée)

Étant donnée une matrice A =[a_{ij}] de $M_{n,m}$(K), sa transposée est la matrice de $M_{m,n}$(K) dont le coefficient d'ordre (j, i) est a_{ij} , On note **A^t**.

Pour écrire la transposée d'une matrice, il suffit de transformer ses lignes en colonnes ou colonnes en lignes.

On a $(A^t)^t$ = A.

Définition 7 :

- On appelle **diagonale** d'un matrice carrée d'ordre n, les éléments a_{11},a_{22},..,a_{ii},…a_{nn} de la matrice.
- Une matrice est dite **diagonale** si tous ses éléments non diagonaux sont nuls.

- Une matrice carrée d'ordre n ne comportant que des 1 sur la diagonale et des 0 sur les autres est appelée matrice identité et notée $\mathbf{I_n}$.

Définition 8 :(Inverse)

Soit A une matrice de $M_n(K)$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice de $M_n(K)$, notée $\mathbf{A^{-1}}$, telle que $\mathbf{A*A^{-1} = A^{-1}*A=I_n}$ ou I_n matrice identité.

Exemple :

Soit A=$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ et C= $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ des matrices

A+B= $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$= $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

A+C impossible car dimension de A ≠ dimension de C

(-2)* B= B * (-2) = (-2) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 8 & -10 & -6 \end{bmatrix}$

A * B Impossible car le nombre de colonnes de A ≠ de nombre de lignes de B.

A * C =$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$*$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$= $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

$\mathbf{A^t}$=$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{\boldsymbol{t}}$ =$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

1.4.3. Déterminant

Le calcul du déterminant d'une matrice est un outil nécessaire tant en algèbre linéaire pour vérifier une inversibilité ou calculer l'inverse d'une matrice.

Le déterminant de la matrice carrée A= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Est donné par la formule :

$$\mathbf{det(A) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(A_{ij})} \quad \textbf{avec i quelconque}$$

Ou $$\mathbf{det(A) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(A_{ij})} \quad \textbf{avec j quelconque}$$

Le terme $\mathbf{(-1)^{i+j} det(A_{ij})}$ est appelé le **cofacteur** du terme $\mathbf{a_{ij}}$ tel que : $cof(a_{ij}) = (-1)^{i+j} det(A_{ij}))$

Le terme $\mathbf{det(A_{ij})}$ est appelé le **mineur** du terme $\mathbf{a_{ij}}$.

$\mathbf{A_{ij}}$ est une matrice obtenue en enlevant de **A** sa $\mathbf{i^{éme}}$ ligne et $\mathbf{j^{éme}}$ colonne.

Cette méthode porte le nom de développement suivant une ligne (ou une colonne), méthode de Laplace ou méthode des cofacteurs ou des mineurs.

Exemple :

Soit la matrice A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Avec i=2 quelconque $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{2j}(-1)^{2+j} \det(A_{2j})$

$$\det(A) = a_{21}(-1)^{2+1} \det(A_{21}) + a_{22}(-1)^{2+2} \det(A_{22})$$

$$\det(A) = 0\ (-1)^3\ 3 + (-2)\ (-1)^4\ 1 = -2$$

Question : Calculer le det(A) Avec j=2 quelconque ?

1.4.4. Inverse d'une matrice

Soit A une matrice de $M_n(K)$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice de $M_n(K)$, notée $\mathbf{A^{-1}}$, telle que $\mathbf{A*A^{-1} = A^{-1}*A=I_n}$ ou I_n matrice identité et $\mathbf{det(A) \neq 0}$.

$$\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} cof(A^t)}$$

Ou **$\mathbf{Cof(A^t)}$:** matrice des cofacteurs de $\mathbf{A^t}$.

$\mathbf{Cof(a_{ij})}$: Cofacteur de l'élément $\mathbf{a_{ij}}$ tel que $\mathbf{Cof(a_{ij}) = (-1)^{i+j} det(A^t{}_{ij})}$

Exemple :

Soit la matrice A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ donc A^t= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

det(A)=-2≠0 alors A est inversible

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{cof}(A^t) = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Vérification : $A*A^{-1}$=$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$= I_2

1.5 Exemples

−Chemin le plus court

Soit un ensemble de villes et des chemins directs reliant ces villes entre elles. Le problème dit "**du plus court chemin**" consiste à trouver pour une ville de départ donnée et une ville d'arrivée donnée le chemin le plus court qui relie ces deux villes. Le problème peut également être de trouver un chemin le plus court pour chaque couple de villes.

– Ordonnancement / planification

Considérons la gestion d'un grand projet. Il est constitué de différentes étapes à réaliser. Il est logique de penser que certaines tâches doivent être effectuées avant d'autres alors que certaines peuvent très bien être effectuées en même temps. Ainsi, on établit une certaine relation d'ordre entre les étapes. Un premier problème consiste à trouver une planification des tâches qui aboutisse à la réalisation du projet en un minimum de temps. Ensuite, il peut être intéressant de détecter les étapes dites "critiques" dont le moindre retard peut affecter toute la suite du projet.

– Flot maximum

Soit des châteaux d'eau ayant un débit constant (m^3/s). Ils desservent un certain nombre de villes, chacune ayant des besoins quantifiés constants. L'eau est acheminée à travers des conduits dont le débit maximum est connu. Le problème est de trouver un moyen de satisfaire au mieux les demandes de chaque ville. En d'autres termes, essayer d'apporter le plus d'eau possible vers les villes.

– Flot de coût minimum

Il s'agit d'un problème semblable à celui du flot maximum mais on suppose en plus qu'un coût fonction du débit est associé à l'utilisation d'un conduit. Le problème devient alors de satisfaire les villes mais de la manière la moins onéreuse.

– Sac à dos

Un randonneur (personne qui fait une promenade assez longue à pied, à cheval, etc.) prépare son **sac à dos** pour partir en excursion. Bien entendu, il veut éviter d'avoir un sac trop lourd et décide de se limiter dans le choix des objets qu'il emporte afin de ne pas dépasser un certain poids. Cependant, il veut emporter le maximum de choses utiles. Pour cela, il affecte une valeur quantitative à chaque objet en plus de son poids (plus la valeur est importante, plus le randonneur juge l'objet important). Le problème peut donc se formuler de la manière suivante : trouver l'ensemble des objets dont la somme des utilités est maximum tout en ne dépassant pas un poids fixé.

– **Affectation**

Des modifications de postes sont effectuées dans une entreprise. Plusieurs personnes doivent être affectées à de nouveaux postes. Ainsi, chacun classe par ordre de préférence les postes qu'il veut occuper. Le problème ici est d'attribuer à chaque personne un poste tout en essayant de satisfaire au mieux le souhait de chacun.

– **Voyageur de commerce**

Un voyageur de commerce doit démarcher dans un certain nombre de villes. Il connaît bien entendu la distance qui sépare les villes entre elles. Cependant, le voyageur de commerce veut perdre le moins de temps possible dans ses déplacements. Le problème est donc de trouver un chemin qui passe par toutes les villes une et une seule fois et qui soit le court possible.

Généralement en recherche opérationnelle, on a souvent à traiter des problèmes dont le nombre de solutions devient rapidement difficile à imaginer. Bien que les exemples vus ici soient petits, il faut bien comprendre qu'en réalité, on sera confronté à des problèmes de taille beaucoup plus importante. Ce qui explique que l'on cherche des méthodes toujours plus efficaces pour résoudre les problèmes.