Chapitre 2

Notions fondamentales de la Théorie des Graphes

2.1 Introduction

De manière générale, un graphe permet de représenter simplement la structure, les connexions, les cheminements possibles d'un ensemble complexe comprenant un grand nombre de situations, en exprimant les relations, les dépendances entre ses éléments. En plus de son existence purement mathématique, le graphe est aussi une structure de données puissante pour l'informatique.

Ici on a quelques exemples d'application dans les graphes :

- Les interconnexions routières, ferroviaires ou aériennes entre différentes agglomérations, Quel est le plus court chemin (en distance ou en temps) pour se rendre d'une ville à une autre ?
- Les liens entre les composants d'un circuit électronique, Comment minimiser la longueur totale des connexions d'un circuit ?
- Le plan d'une ville et de ses rues en sens unique, Peut-on mettre une rue en sens unique sans rendre impossible la circulation en ville ?
- On cherche la planification des travaux ou à organiser la session d'examens.

Comme la théorie des graphes utilise un jargon bien particulier du fait du nombre de termes (mots) utilisés. Le début du cours comporte beaucoup de définitions.

2.2 Définitions

2.2.1. Graphe

Définition 2.1 : Un graphe est un ensemble de sommets (ou nœuds) qui sont reliés entre eux par des arcs ou par des arêtes. Mathématiquement, un graphe est représenté par un couple de deux ensembles G = (X,U) où « X » est l'ensemble des sommets et « U » l'ensemble des arêtes (graphe non orienté) ou arcs (orienté).

Définition 2.2 : Un graphe est un dessin géométrique défini par la donnée d'un ensemble de points (appelés sommets ou nœuds), reliés entre eux par un ensemble de lignes ou de flèches (appelées arêtes ou arcs). Chaque arête (arc) a pour extrémités deux points, éventuellement confondus.

Définition 2.3 : Un graphe G = (X,U) est donné par un ensemble « X » de sommets et par un sous ensemble « U » du produit cartésien X*X appelé ensemble des arcs de G. Si les ensembles X et U sont finis le graphe sera appelé graphe fini.

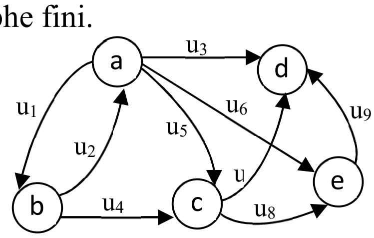


FIG 2.1 Graphe

Le dessin de la figure 2.1 est un graphe G=(X,U) où, X={a,b,c,d,e} est l'ensemble de sommets (*nœuds*), et U={ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7} avec u_1=(a,b), u_2=(b,a), u_3=(a,d), u_4=(b,c), u_5=(a,c), u_6=(a,e), u_7=(c,d), u_8=(c,e), u_9=(e,d) est l'ensemble d'arcs.

Remarque : Le nombre de sommets |X| du graphe simple G=(X,U) s'appelle **l'ordre** de G. On le dénote |G| ou ord (G).

2.2.2. Arc et Arête

Un arc relie deux sommets entre eux, il sera donc représenté par un couple (x,y) où x et y sont deux sommets. Un arc peut être orienté, c-à-d que l'ordre de x et de y est important dans le couple (x,y). Un arc peut être non orienté (arête) et dans ce cas, l'ordre de x et de y dans le couple (x,y) n'a aucune importance, donc (x,y)=(y,x). Les arcs sont représentés de la manière suivante :

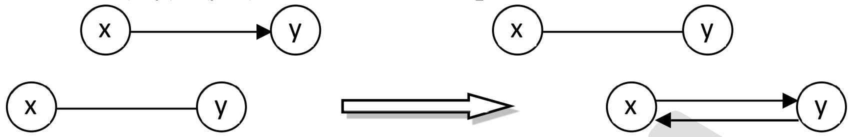


FIG 2.2 Arc orienté et Arc non orienté(Arête)

Remarque : un arc non orienté (arête) peut toujours être transformé en une situation où l'on n'a que deux arcs orientés (FIG 2.2).

2.2.3. Boucle

On appelle **boucle** un arc dont l'extrémité initiale est égale à son extrémité finale. Par exemple, (x,x) est une boucle.

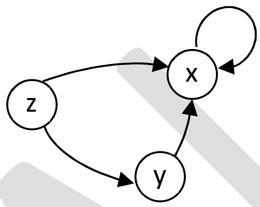


FIG 2.3 Boucle

2.2.4. P-Graphe

Un **p-graphe** est un graphe dans lequel il n'existe jamais plus de « p » arcs de la forme (i,j) entre deux sommets quelconques.

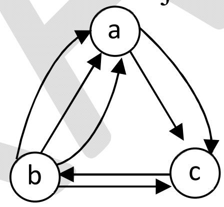


FIG 2.4 3-graphe

2.2.5. Graphe simple

Un graphe simple est un graphe sans boucles et sans arcs (arêtes) multiples.

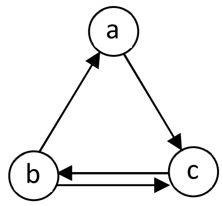


FIG 2.5 Graphe simple

2.2.6. Demi degré extérieur et Successeur

Le demi-degré extérieur d'un sommet est le nombre d'arcs adjacents qui en partent (les arcs sortants). On le note $d^+(x)/d^+(x) = |\{u \in U | u=(x,y) \text{ où } y \in X\}|$ y est un successeur de x, où l'ensemble de successeurs d'un sommet x est défini par : $\Gamma^+(x) = \{y / y \in X \text{ et } (x,y) \in U\}$

2.2.7. Demi degré intérieur et prédécesseur

Le demi-degré intérieur d'un sommet est le nombre d'arcs adjacents qui y arrivent (les arcs entrants). On le note $d^-(x)$ et $d^-(x) = |\{a \in U|\ a = (y,x)$ où $y \in X\}|$: y est un prédécesseur de x, où l'ensemble de prédécesseurs d'un sommet x est défini par : $\Gamma^-(x) = \{y/y \in X \text{ et } (y,x) \in U\}$.

2.2.8. Degré et Voisin

Le degré d'un sommet est le nombre d'arcs qui lui sont adjacents. On le note d(x), donc d(x) est la somme du nombre d'arcs sortants et celui d'arcs entrants « $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$ ». Pour un graphe non orienté (simple) le degré d(x) est le nombre de voisins de x, c'est-à-dire le nombre de sommets adjacents à x. l'ensemble de voisins d'un sommet x est défini par : $\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \bigcup \Gamma^-(x)$.

Remarques :
- Si un sommet possède une ou plusieurs boucles, chacune apporte une contribution de 2 dans le calcul du degré de ce sommet.
- On appelle un sommet dont le degré est égal à zéro ($d(x)=0$) un ***sommet isolé***.
- Un sommet dont le degré est égal à un ($d(x)=1$) un ***sommet pendant***.
- Un sommet dont le degré est n-1 ($d(x)=n-1$) un ***sommet dominant***.

Propriétés :
- La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à 2 fois son nombre d'arêtes $\sum_{i=1}^{n} d(x_i)=2|X|$
- Dans un graphe orienté G=(X,U) : $\sum_{x \in X} d^+(x) = \sum_{x \in X} d^-(x)$.

Exemple :

Soit le graphe :

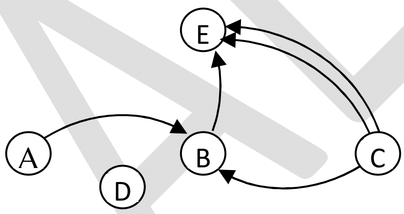


FIG 2.6 Graphe

D'après le graphe de la figure 2.6, les ensembles de successeurs, prédécesseurs et voisins de sommets (A, B, C, D, E) sont :

	A	B	C	D	E
$\Gamma^+(x)$	{B}	{E}	{B,E}	{}	{}
$\Gamma^-(x)$	{}	{A,C}	{}	{}	{B,C}
$\Gamma(x)$	{B}	{A,C,E}	{B,E}	{}	{B,C}

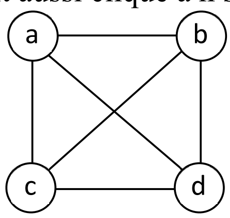
Le tableau suivant détermine les demi-degrés (intérieurs et extérieurs) et les degrés des sommets du graphe de la figure 2.6 :

	A	B	C	D	E	Total
$d^+(x)$	1	1	3	0	0	5
$d^-(x)$	0	2	0	0	3	5
d(x)	1	3	3	0	3	10

2.2.9. Graphe complet

Un graphe est dit complet s'il est simple à n sommets tel que toute paire de sommets est liée par un arc (arête). On note K_n le graphe simple complet à n sommets (on dit aussi clique à n sommets).

FIG 2.7 Graphe complet K_4



2.2.10. Graphe régulier

Un graphe G= (X,U) est dit régulier de degré k, si $\forall x \in X$, $d(x)=k$. Autrement dit, tous les sommets ont le même degré. Un graphe régulier de degré 3 est dit cubique.

Le graphe complet simple K_n est régulier de degré n-1.

Le graphe biparti complet $K_{n,n}$ est régulier de degré n.

2.2.11. Graphe complémentaire

À un graphe simple G=(X,U), on peut définir un graphe complémentaire $\overline{G}=(X,\overline{U})$ comme suit : $[(x,y) \in U \Rightarrow (x,y) \notin \overline{U}]$ et $[(x,y) \notin U \Rightarrow (x,y) \in \overline{U}]$, c'est-à-dire : une arête/arc appartient au graphe complémentaire $\overline{G}$ si elle n'appartient pas au graphe initial G.

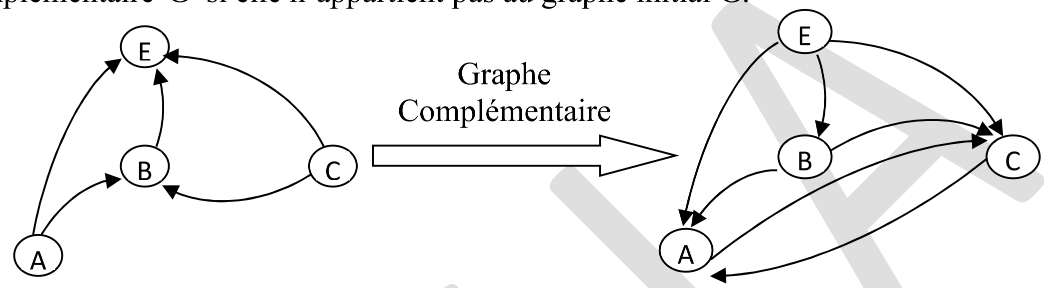


FIG 2.8 Graphe complémentaire

Remarque : L'union d'un graphe et son complémentaire est un graphe complet

2.2.12. Sous graphe

Soit un graphe G=(X,U) et X_0 un sous ensemble de X. Le sous graphe de G engendré par X_0 est le graphe $G_0=(X_0,U_0)$ tel que : $U_0=\{u/u \in U \text{ et } u \in X_0 \times X_0\}$.

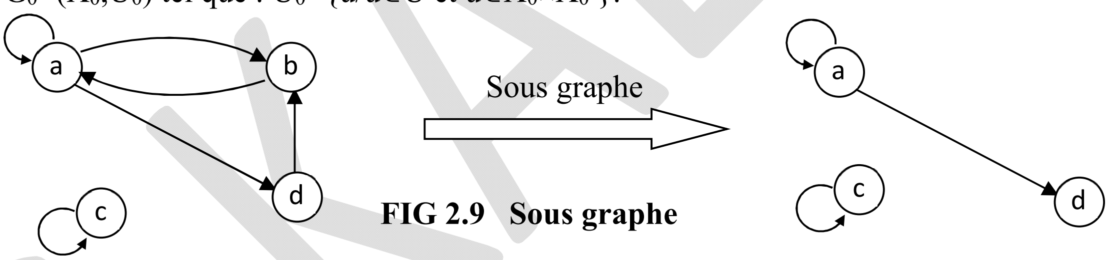


FIG 2.9 Sous graphe

2.2.13. Graphe partiel

Soit un graphe G = (X,U) et U_0 un sous ensemble de U. Le graphe partiel engendré par U_0 est le graphe G_0 tel que $G_0 = (X,U_0)$.

Le graphe partiel engendré par les arcs (a,a), (a,d), et (d,b) du graphe G de la figure 2.9 est :

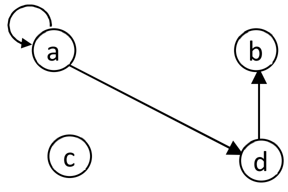


FIG 2.10 Graphe partiel

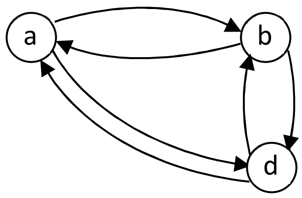
2.2.14. Graphe réflexif

On appelle graphe réflexif un graphe possédant une boucle sur chaque sommet.

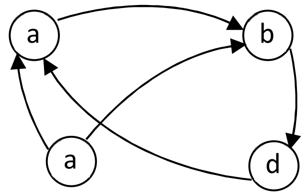
2.2.15. Graphe symétrique et asymétrique

Un graphe G (X,U) est **symétrique** si pour tout arc $u_1=(x,y)$ appartient à U, l'arc $u_2=(y,x)$ appartient également à U.

Un graphe G = (X,U) est **asymétrique** si : $\forall x, y \in X, (x,y) \in U \Rightarrow (y,x) \notin U$.



Graphe symétrique



Graphe asymétrique

FIG 2.11 Graphe symétrique et asymétrique

2.2.16. Graphe antisymétrique

Un graphe G=(X,U) est **antisymétrique** si, «$\forall x,y \in X, [(x,y)\in U$ et $(y,x)\in U] \Rightarrow x=y$» (si G est asymétrique, G est aussi antisymétrique).

2.2.17. Graphe transitif

Un graphe G=(X,U) est **transitif** si, quelque soit deux $u_1=(x,y)$ et $u_2=(y,z)$ appartiennent à U, alors l'arc $u_3=(x,z)$ appartient également à U ; «$\forall x, y, z\in X$, $[(x,y)\in U$ et $(y,z)\in U] \Rightarrow (x,z)\in U$».

2.2.18. Graphe planaire

Un graphe G=(X,U) est dit **planaire** si on peut le dessiner dans le plan sans croisement des arêtes. Ce type de graphe est particulièrement utilisé dans les problèmes de circuits électroniques.

2.2.19. Chemin

On appelle **chemin** une suite d'arcs dont l'extrémité terminale de chacun, sauf le dernier, est l'extrémité initiale du suivant.

Remarques :
- Le chemin c est dit **élémentaire** s'il ne rencontre pas plus d'une fois chacun de ses sommets.
- Le chemin c est dit **simple** s'il ne passe qu'une seule fois par chacun de ses arcs.
- La **longueur** d'un chemin **c** est égale au nombre de ses arcs.

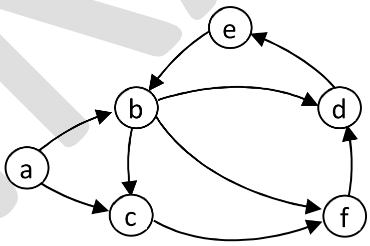


FIG 2.12 Graphe

Dans le graphe da la figure 2.14 :

- La suite des sommets suivante (a,c,f,d,e) est un chemin joignant «a» à «e». Ce chemin est élémentaire et simple
- La suite des sommets suivante (a,b,d,e,b,c) est un chemin joignant «a» à «c». Ce chemin est simple mais n'est pas élémentaire.
- La suite des sommets suivante (e,b,f,d,e,b,c) est un chemin joignant «e» à «c». Ce chemin n'est ni simple ni élémentaire.

2.2.20. Circuit

Un circuit est un chemin fermé (les deux extrémités du chemin sont confondues).

Dans le graphe de la figure 2.14, la suite (b,c,f,d,e,b) est un circuit.

2.2.21. Chaine

Une chaine est une suite d'arêtes telle que chaque arête de la suite à une extrémité en commun avec l'arête précédente. La direction n'a pas d'importance.

> **Remarques :**
> – Une chaîne est dite élémentaire s'il ne rencontre pas plus d'une fois chacun de ses sommets.
> – Une chaîne est dite **simple** s'il ne passe qu'une seule fois par chacun de ses arêtes.

Dans le graphe de la figure 2.14 :

– La suite des sommets suivante (a,c,f,b,e) est une chaîne. Cette chaîne est élémentaire et simple.
– La suite des sommets suivante (a,c,b,d,e,b,f) est une chaîne joignant «a» à «f». Cette chaîne est simple mais n'est pas élémentaire.
– La suite des sommets suivante (c,f,d,e,b,f,d,b,a) est une chaîne joignant «c» à «a». Cette chaîne n'est ni simple ni élémentaire.

2.2.22. Cycle

Un **cycle** est une chaîne fermée (les deux extrémités de la chaîne sont confondues).

Dans le graphe de la figure 2.14, la suite de sommets suivante (a,c,f,d,b,a) est un cycle.

2.2.23. Chaine, chemin, cycle et circuit Eulérien

Un chemin, chaîne, circuit ou cycle est dit **Eulérien** s'il passe une fois et une seule par tous les arcs/arêtes du graphe.

> **Remarques :**
> – Un graphe non orienté (orienté) possédant un cycle (circuit) Eulérien est appelé graphe Eulérien.
> – Un graphe non orienté (orienté) possédant une chaîne (chemin) Eulérien est appelé graphe Semi Eulérien.

2.2.24. Chaine, chemin, cycle et circuit Hamiltonien

Un chemin, chaîne, circuit ou cycle est dit **Hamiltonien** s'il passe une fois et une seule par tous les sommets du graphe.

> **Remarques :**
> – Un chemin Hamiltonien (une chaîne Hamiltonienne) est donc un chemin (une chaîne) élémentaire de longueur « n-1 ».
> – Un graphe G est dit Hamiltonien s'il contient un cycle Hamiltonien (cas non orienté) ou un circuit Hamiltonien (cas orienté).

2.2.25. Graphe acyclique

On dit qu'un graphe G est acyclique s'il ne possède pas de cycle.

Si dans un graphe tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2, alors le graphe possède au moins un cycle.

Un graphe acyclique à n sommets possède au plus « n-1 » arêtes.

2.2.26. Graphe inverse (graphe transposé)

$G^{-1}=(X,U')$ est le graphe inverse du graphe $G=(X,U)$ orienté si et seulement si $(x,y)\in U \Leftrightarrow (y,x)\in U'$.

Pour passer du graphe G à son graphe inverse G^{-1}, il suffit de retourner le sens de tous les arcs.

Graphe Orienté

Graphe Inverse

FIG 2.13 Graphe Inverse

2.3 Modélisation d’un graphe

Un certain nombre de représentations existent pour décrire un graphe. En particulier, elles ne sont pas équivalentes du point de vue de l’efficacité des algorithmes. On distingue principalement la représentation par matrice d’incidence sommets-arcs (ou sommets-arêtes dans le cas non orienté), par matrice d’adjacence et par listes d’adjacence.

2.3.1. Matrice d’incidence sommets-arcs/ sommets-arêtes

Un graphe peut être représenté par une matrice n*m (n=|X| et m=|U|), dite d'incidence, pouvant contenir uniquement les valeurs « 0, 1 ou -1 ». Chaque ligne de la matrice représente un sommet et chaque colonne de la matrice représente un arc/arête.
Ainsi, une case indique la relation qu'il existe entre sommet et arc (arête) :

Cas orienté

- 0 signifie que le sommet et l'arc ne sont pas adjacents,
- 1 signifie que le sommet est l'extrémité initiale de l'arc,
- -1 signifie que le sommet est l'extrémité terminale de l'arc

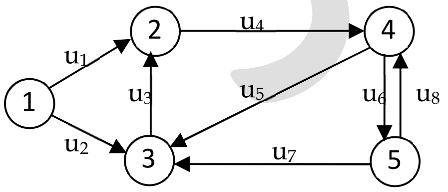
Cas non orienté

- 1 signifie que le sommet est une extrémité de l'arête.
- 0 signifie que le sommet et l'arête ne sont pas adjacents.

Remarques :

- Seulement 2m cases de la matrice sont non nulles sur « m*n » cases.
- Cette représentation occupe beaucoup de place en mémoire.
- Cette matrice ne convient pas pour les graphes avec boucles.
- Le nombre de valeurs égales à «+1» d’une ligne donne le degré extérieur « $d^+(x)$ » du sommet x correspondant.
- Le nombre de valeurs égales à «-1» d’une ligne donne le degré intérieur « $d^-(x)$ » du sommet x correspondant.
- La somme de chaque colonne est égale à 0 (un arc a une origine et une destination).

Soit le graphe G



La matrice d’incidence du graphe G est la suivante :

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	-1	1	0	0	0	0
3	0	-1	1	0	-1	0	-1	0
4	0	0	0	-1	1	1	0	-1
5	0	0	0	0	0	-1	1	1

FIG 2.14 Matrice d’incidence

2.3.2. Matrice d’adjacence sommets-sommets

Un graphe peut être représenté par une matrice nxn (n =|X|), dite d'adjacence, pouvant contenir uniquement les valeurs 0, 1. Chaque ligne et chaque colonne de la matrice représente un sommet (nœud). Ainsi, une case indique la relation qu'il existe entre deux sommets.

- 0 signifie que les deux sommets ne sont pas reliés par un arc,

- 1 signifie que les deux sommets sont reliés par un arc orienté.

Le graphe de la figure 2.14 sera représenté par la matrice d'adjacence suivante :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	1	1	0	0
2	0	0	0	1	0
3	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

FIG 2.15 Matrice d'adjacence

Remarques :
- La place mémoire utilisée est : n^2 (n : est le nombre de sommets $|X|=n$).
- Seulement m cases de la matrice sont non nulles sur n^2 cases.
- Cette représentation est efficace au niveau de l'espace mémoire utilisé lorsque le graphe est suffisamment dense (i.e. lorsqu'il y a suffisamment d'arcs).
- Elle permet d'implémenter assez facilement les algorithmes.
- Deux arcs ayant les mêmes extrémités ne peuvent pas être représentés avec cette matrice.
- Pour des graphes values (pondérés), remplacer « 1 » par la valeur numérique de l'arc.

2.3.3. Listes chainées

Un graphe peut être représenté par des listes. Nous présentons ici une possibilité mais de nombreuses autres peuvent convenir. On définit tout d'abord une liste des sommets (*nœuds*) et à chaque sommet, on associe une liste de sommets successeurs.

Le graphe de la figure 2.14 sera représenté de la manière suivante.

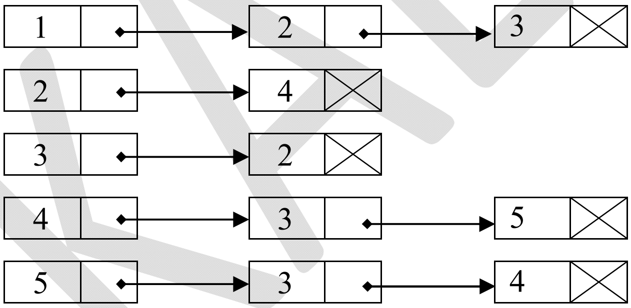


FIG 2.16 Listes chainés

Remarques
- Cette représentation est nettement plus efficace au niveau de la mémoire occupée que les deux représentations précédentes.
- Cette structure est souple. L'ajout et la suppression d'arcs ou de sommets sont plus aisés qu'avec les représentations matricielles.

2.4 Connexité d'un graphe

Lors de la conception d'un réseau de communication notamment, il peut être intéressant de savoir si la configuration choisie permet une communication de n'importe quel point à n'importe quel autre. Un moyen de le vérifier est de représenter le réseau sous la forme d'un graphe et de vérifier qu'il est fortement connexe.

2.4.1. Connexité, forte connexité

La notion de connexité est liée à l'existence de chaînes dans un graphe : depuis un sommet, existe-t-il une chaîne pour atteindre tout autre sommet ? Les graphes connexes correspondent à la représentation naturelle que l'on se fait d'un graphe. Les graphes non connexes apparaissent comme la juxtaposition d'un ensemble de graphes : ses composantes connexes.

Définition 2.4 : On définit la **connexité** dans un graphe par une relation entre deux sommets de la manière suivante : x et y ont une relation de **connexité** ⇔ il existe une **chaîne** entre x et y.

Définition 2.5 : On définit la **forte connexité** par une relation entre deux sommets de la manière suivante : x et y ont une relation de **forte connexité** ⇔ (il existe un **chemin** de x à y et un **chemin** de y à x).

Soit le graphe suivant :

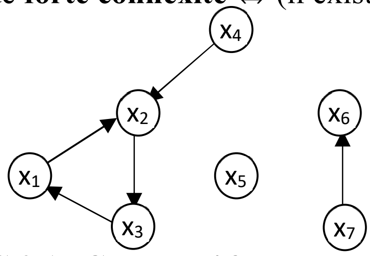


FIG 2.17 Connexe / fortement connexe

Il existe une chaîne entre le sommet x_1 et x_4 notée $C=(x_1, x_2, x_4)$. Alors x_1 et x_4 ont une relation de **connexité**.

Il n'existe pas de chaînes entre le sommet x_1 et x_5, entre le sommet x_1 et x_6, et entre le sommet x_5 et x_7, .Alors les couples (x_1 et x_5), (x_1 et x_6) et (x_5 et x_7) n'ont pas de relations de **connexité**.

Il existe un chemin entre le sommet x_1 et x_2 noté $C=(x_1, x_2)$ et un chemin entre x_2 et x_1 noté $C=(x_2, x_3, x_1)$. Alors x_1 et x_2 ont une relation de **forte connexité**.

Il existe un chemin entre le sommet x_4 et x_1 noté $C=(x_4, x_2, x_3, x_1)$ mais il n'existe pas de chemin entre x_1 et x_4. Alors x_1 et x_4 n'ont pas de relation de **forte connexité**.

2.4.2. Composante Connexe, fortement connexe

Définition 2.6 : On appelle **composante connexe** un ensemble de sommets qui ont deux à deux la relation de connexité. De plus, tout sommet en dehors de la composante n'a pas de relation de connexité avec aucun des éléments de la composante.

Définition 2.7 : De même, on appelle **composante fortement connexe** un ensemble de sommets qui ont deux à deux la relation de forte connexité. De plus, tout sommet en dehors de la composante n'a pas de relation de forte connexité avec aucun des éléments de la composante.

2.4.3. Graphe Connexe, fortement connexe

Définition 2.8 : Un graphe est dit **connexe** si tous ses sommets ont deux à deux la relation de connexité ; autrement dit, si G contient une seule composante connexe.

Définition 2.9 : Un graphe est dit **fortement connexe** si tous ses sommets ont deux à deux la relation de forte connexité (G contient une seule composante fortement connexe).

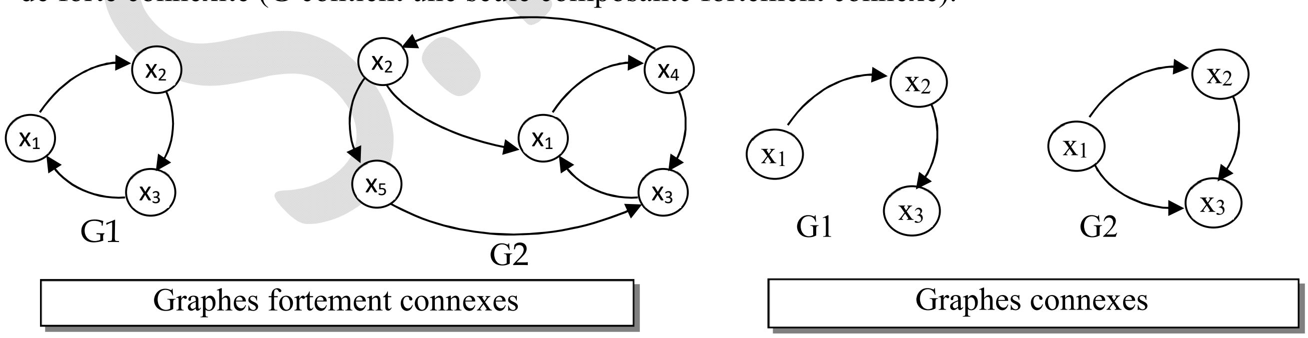


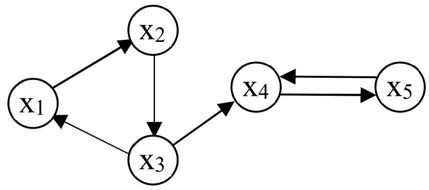
FIG 2.18 Graphe connexe / fortement connexe

2.4.4. Graphe réduit

On appelle graphe réduit du graphe G le graphe G' pour lequel chaque sommet (nœud) est associé à une composante fortement connexe de G. De plus, un arc relie un sommet x' à un sommet y' dans le graphe G' s'il existe un arc qui relie x à y dans G où x appartient à la composante fortement connexe de G associée à x' et où y appartient à la composante fortement connexe de G associée à y'.

Ce graphe n'est pas fortement connexe, car on ne peut pas trouver de chemin de x_4 à x_3 par exemple.

Par contre, on identifie deux composantes fortement connexes C1 = {x_1,x_2, x_3} et C2 = { x_4, x_5}.



Le graphe réduit du graphe G est le graphe suivant :

FIG 2.19 Graphe réduit

2.4.5. Algorithmes de construction

4.4.5.1. Détermination des composantes connexes

La stratégie suivie pour déterminer des composantes connexes d'un graphe (orienté ou non) est de descendre plus profondément dans le graphe chaque fois que c'est possible, on marque un sommet puis ses voisins direct (arête) et indirect (chaine) jusqu'à ce qu'aucun sommet ne peut être marqué, on atteint un ensemble de sommets marqués d'une composante connexe.

Algorithme CC
Entrées : G(X,U)
Sortie : k nombre de composantes connexes (C_1,C_2…..C_k les composantes connexes de G)
Début
 k ← 0; W ← X;
(1) Choisir un sommet $x \in W$ et marquer le d'un signe (+) ;
  Marquer tous ses voisins direct et indirect (chaine) d'un signe (+) ;
  k ← k + 1, et C_k ← tous les sommets marqués d'un signe (+);
  W← W - C_k ;
  Si (W ≠∅) **Alors** aller a (1) FSi
Fin

Lors de cette étape de l'algorithme, il faut bien veiller à parcourir la totalité des sommets du graphe, lorsque le traitement d'un sommet est terminé, on peut faire face à deux situations :

1. La liste des sommets de W est vide : l'algorithme a parcouru tous les sommets. On a découvert toutes les composantes connexes.
2. La liste des sommets de W est non vide : on répète l'étape (1) pour déterminer une nouvelle composante connexe.

Enfin on aura k composantes connexes k et C_1,….,C_k sont les composantes connexes de G.

Exemple : On applique l'algorithme précédent sur le graphe suivant :

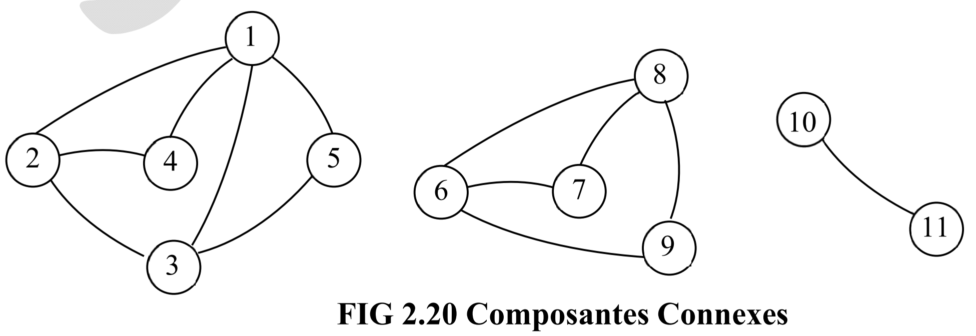


FIG 2.20 Composantes Connexes

1- k ← 0;W={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11};

2- k ← 1; x ← 1 ;C_1={1,2,3,4,5} ; W=W-C_1={6,7,8,9,10,11};

3- $k \leftarrow 2$; $x \leftarrow 6$;$C_2=\{6,7,8,9\}$; $W=W-C_2=\{10,11\}$;

4- $k \leftarrow 3$; $x \leftarrow 10$;$C_3=\{10,11\}$; $W=W-C_3=\varnothing$;

5- $W=\varnothing$ Alors on a 3 composantes connexes C_1,C_2 et C_3.

4.4.5.2. Détermination des composantes fortement connexes

La stratégie suivie pour déterminer des composantes fortement connexes d'un graphe orienté est de descendre plus profondément dans le graphe chaque fois que c'est possible, on marque un sommet puis ses successeurs direct (arc) et indirect (chemin) et ses prédécesseurs direct (arc) et indirect (chemin) jusqu'à ce qu'aucun sommet ne peut être marqué, on atteint un ensemble de sommets marqués d'une composante fortement connexe.

Algorithme CFC
Entrées : G (X, U)
Sortie : k nombre de composantes fortement connexes (C_1,C_2…..C_k les composantes fortement connexes de G)
Début
$k \leftarrow 0$; $W \leftarrow X$;
(1) Choisir un sommet de $x \in W$ et marquer le d'un signe (+) ou (-) ;
Marquer tous ses successeurs direct et indirect d'un signe (+) ;
Marquer tous ses prédécesseurs direct et indirect d'un signe (-) ;
$k \leftarrow k + 1$, et $C_k \leftarrow$ tous les sommets marqués d'un signe (+) et (-);
$W \leftarrow W - C_k$;
Retirer le signe (+) ou (-) de tous les sommets marqués du W.
Si ($W \neq \varnothing$) **Alors** aller a (1) FSi
Fin

Lors de cette étape de l'algorithme, il faut bien veiller à parcourir la totalité des sommets du graphe, lorsque le traitement du sommet est terminé, on peut faire face à deux situations :

1. La liste des sommets de W est vide : l'algorithme a parcouru tous les sommets. On a découvert toutes les composantes fortement connexes.
2. La liste des sommets de W est non vide : on répète l'étape (1) pour déterminer une nouvelle composante fortement connexe.

Enfin on aura k composantes fortement connexes k et C_1,….,C_k sont les composantes fortement connexes de G.

Exemple : On applique l'algorithme précédent sur le graphe suivant :

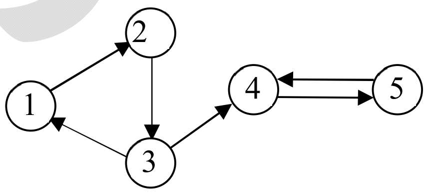


FIG 2.21 Graphe Composantes fortement Connexes

1- $k \leftarrow 0$; $W=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$;

2- $k \leftarrow 1$; $x \leftarrow 1$; $C_1=\{1,2,3\}$; $W=W-C_1=\{4,5\}$;

3- $k \leftarrow 2$; $x \leftarrow 4$; $C_2=\{4,5\}$;$W=W-C_2=\varnothing$;

$W=\varnothing$ Alors on a 2 composantes connexes et C_1et C_2.

2.5 Graphe biparti

2.5.1. Graphe biparti

Un graphe G=(X,U) est dit biparti si on peut diviser l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensembles X_1 et X_2 tels que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1 \cup X_2 = X$ et tout arête $u \in U$ a une extrémité dans X_1 et l'autre dans X_2. On le note $G = (X_1, X_2, U)$.

Un graphe biparti permet notamment de représenter une relation binaire.

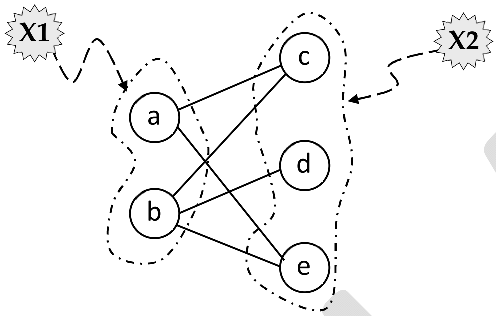


FIG 2.22 Graphe biparti

2.5.2. Graphe biparti complet

Un graphe biparti G = (X1,X2,U) est dit **biparti complet** si $\forall x \in X1$ on a $d(x)=|X2|$. Si $|X1| = a$ et $|X2| = b$, on note ce graphe $K_{a,b}$.

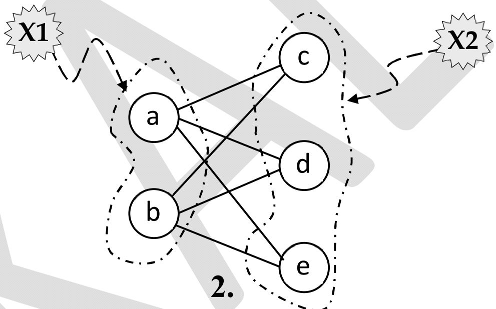


FIG 2.23 Graphe biparti complet $K_{2.3}$

2.5.3. Couplage

Soit G = (X, U) un graphe simple non orienté. Un couplage U' est un graphe G'=(X,U') ou U' est un sous ensemble d'arêtes $U' \subset U$ tel que deux arêtes de U' ne sont pas adjacentes.

Remarques
- Dans le graphe G'=(X.U') $\forall x \in X$ $d(x) \leq 1$ (s'il existe une arête de U' incidente à x).
- Un sommet $x \in X$ est dit saturé par le couplage $U' \subset U$ si d(x)=1 dans G'.
- Un sommet $x \in X$ est dit non saturé par le couplage $U' \subset U$ si d(x)=0 dans G'.
- Un couplage U' est dit parfait s'il sature tous les sommets du graphe.
- Un couplage U' est dit maximal si $U' \cup \{x\}$ n'est pas un couplage de G.
- Un couplage maximum U' est le couplage de cardinalité maximale c.à.d. $|U'| \geq |C|$ $\forall$ C couplage de G.

Exemple : Soit le graphe non orienté de la FIG 2.24 :
- $U_1=\{(1,3),(4,6)\}$ forme un couplage maximal
  Les sommets 1,3 et 4 sont saturé par le couplage U_1
  Les sommets 2 et 5 ne sont saturé par le couplage U_1
- $U_2=\{(1,2),(4,6),(5,3)\}$ forment un couplage maximum

Tous les sommets du couplage U_2 sont saturés alors le couplage U_2 est parfait.

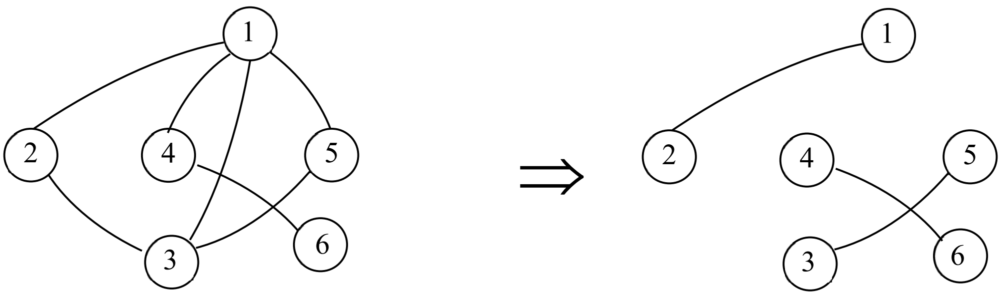


FIG 2.24 Couplage maximum et parfait

2.5.4. Recouvrement stable et transversal

Soit G = (X, U) un graphe. Un transversal T (recouvrement stable) de G est un sous ensemble de sommets $T \subset X$ tel que si toute arête de U possède, au moins, une extrémité dans T.

Remarques

- Un transversal T de G est minimal si $\forall x \in T$, T-{x} n'est pas un transversal de G.
- Un transversal minimum T est le transversal de cardinalité minimale c.à.d. $|T| \leq |T'|$ $\forall T'$ transversal de G.

Exemple : Soit le graphe G= (X, U) non orienté de la FIG 2.24 :

- T1= {2,3,4,5} forme un transversal minimal de G.
- T2= {1,3,6} forme un transversal minimum.

2.5.5. Couplage et Recouvrement stable dans les graphes bipartis

Le théorème de Konig : Si G est biparti, alors $|T| = |U'|$

Avec T transversal minimum et U' couplage maximum.

Soit le graphe biparti G = (X1,X2,U), avec X1={1,2,3} et X2={4,5,6,7}

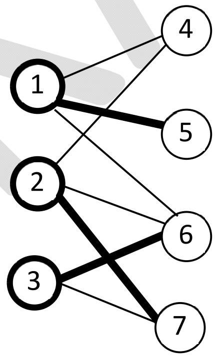


FIG 2.25 Couplage et recouvrement dans un graphe biparti

2.6 Algorithme de détection de circuits

Un graphe orienté comporte un circuit si et seulement si lors d'un parcours des sommets accessibles depuis un sommet, on retombe sur ce sommet. On peut donc adapter l'algorithme de parcours en profondeur pour détecter la présence d'un circuit.

On utilise une liste des sommets « L » en cours de visite, la procédure de parcours maintient à jour cette liste de sommets dont l'appel sur cette procédure n'est encore fini. Cette liste est initialisée à ∅. On utilise de plus un tableau de booléens visite initialiser à faux et indexé par les sommets du graphe.

```
Algorithme Détection_Circuit ;
Entrées : G (X, U) orienté ;
Sortie : G avec ou sans circuit ;
  Procédure Visite_Liste (x : sommet)
  Début
    Si (x∈L) Alors   circuit ← vrai ;
    Sinon
        visite[x] ←vrai ;
        L←L∪{x} ;
        Pour (chaque successeur y de x)  Faire
          Visite_Liste (y)
        FPour
        L ← L−{x} ;
    FSi
  Fin
Début
  circuit ← faux;
  L ← ∅ ;
  Pour (chaque sommet x)  Faire
        visite[x] ← faux ;
  FPour
  Pour (chaque sommet x) Faire
    Si (visite[x] = faux) Alors Visite_Liste(x)  FSi
    Si (circuit = vrai) Alors aller à (1)  FSi
  FPour
  (1)  Si (circuit = faux) Alors Afficher ('le graphe est sans circuit')
        Sinon Afficher ('le graphe est avec circuit')
Fin
```