



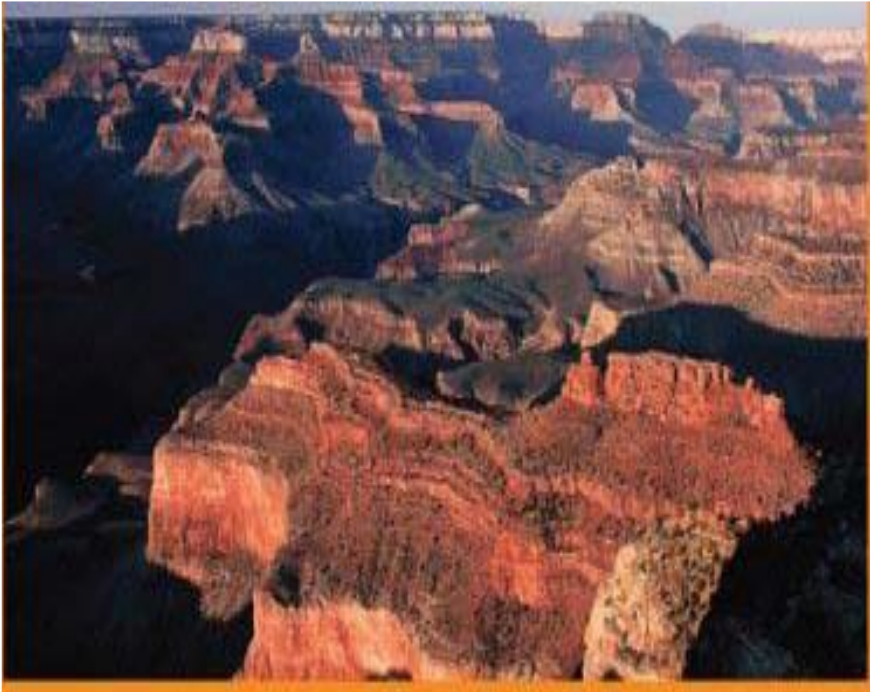
**République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère
de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université BATNA 2
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil**

MASTER I GEOTECHNIQUE

COURS

RHEOLOGIE DES SOLS



**PRESENTER PAR KARECH TOUFIK ENSEIGNANT UNIVERSITE
MOSTEFA BENBOULAIID BATNA 2**

Chapitre I Notion de Contrainte et Déformation dans le Sol

I.1 Introduction

I.2 Notion de contrainte - Equations d'équilibre.

1.2.1 Notion de contrainte

1.2.2 Les équations d'équilibre

I.3 Notion de déformation

I.3 Relations contraintes-déformations.

Chapitre II Les Modèles Elasto-Plastique

II-1 Introduction

II-2 Partition des déformations

II.3 Surface de charge et domaine d'élasticité

II. 4 Modèles de comportement élasto-plastique

Chapitre III : Lois élasto-plastiques avec écrouissage

III.1 Introduction

III.2 Modèle Cam Clay et Fonction Limite

III.3 Comportement de durcissement et de plastification

III.4 Comportement des argiles idéales reconstituées et saturées, dans le domaine normalement consolidé. Notion d'état critique

III.5. Présentation du modèle Cam-Clay modifié

III.6 Contraintes plastiques incrémentielles

III.7 Procédure de calcul étape par étape pour un essai triaxial CD sur argiles NC.

III.8 Calculs du comportement en contrainte-déformation consolidé et non drainé d'une argile normalement consolidée à l'aide du modèle modifié de Cam Clay.

3.8.1 Procédure de calcul pas à pas pour un essai triaxial CU sur des argiles NC

III.8 Application

Chapitre I Notion de Contrainte et Déformation dans le Sol

I.1 Introduction

On assimile les sols comme étant des massifs semi-infinis ou finis à deux ou à trois dimensions, en pratique on considère toujours (sauf cas contraire) les massifs à deux dimensions. Ces massifs, assimilés à un milieu continu, peuvent être soumis à divers types de sollicitation (figure 1) :

- les forces massiques :

* Poussée d'écoulement d'eau : E_w

* Pesanteur : W

- Les charges surfaciques :

* Ponctuelles : P_i

* Réparties : q_i

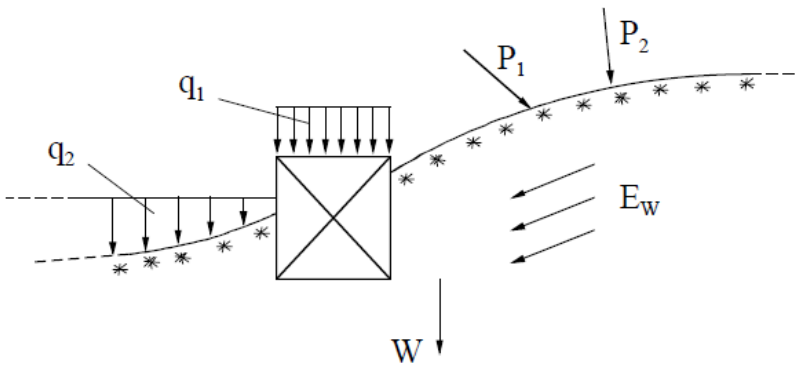


Figure 1.1. Types de sollicitation appliqués sur un massif de sol

L'étude du massif par la mécanique des sols consiste à déterminer sa réaction sous les sollicitations qui s'y exercent, et de vérifier si sa stabilité est assurée ou non. A cet effet on s'intéresse aux contraintes et aux déformations qui sont provoquées dans le sol sous l'action des sollicitations extérieures comme l'indique le schéma suivant :

Sollicitations extérieures \longrightarrow Contraintes \longrightarrow Déformations

On fait alors des hypothèses sur le comportement du sol qui se traduisent par des relations contraintes-déformations, on en distingue deux cas :

- Lorsque les sollicitations sont faibles par rapport à la résistance du sol, les déformations sont faibles, elles sont donc proportionnelles aux forces appliquées, on utilise dans ce cas la théorie d'élasticité linéaire.
- Lorsque les sollicitations sont très importantes, elles engendrent des déformations jusqu'à provoquer la rupture du sol, on applique dans ce cas la théorie de la plasticité.

I.2 Notion de contrainte - Equations d'équilibre.

1.2.1 Notion de contrainte

Pour un matériau, c'est une notion fictive analogue à celle de la tension d'un fil. Un fil souple tendu et rectiligne est en équilibre sous l'action de deux forces extérieures égales appliquées à ses extrémités. En coupant ce fil par un plan (A) en deux parties (I) et (II), sur la surface de coupure δS (très petite assimilée à un point) la partie (II) exerce une force sur la partie (I). Cette force est par définition la tension du fil dont la direction est celle du fil (figure 1.2).



Figure 1.2. Tension dans un fil

De la même manière, soit un solide quelconque à la surface duquel s'exercent des forces. En coupant ce solide par un plan fictif (A), sur la surface de coupure S la partie (II) exerce des forces sur la partie (I). Soit un point M d'une portion de surface δS entourant le point M sur S. Sur δS la force exercée par la partie (II) est δP dont la direction n'est pas connue a priori (figure 3). On appelle contrainte au point M sur la facette δS le vecteur:

$$p = \frac{\delta P}{\delta S} \quad 1.1$$

La contrainte est une fonction du point M considéré et de la facette passant par ce point. La contrainte p se décompose en une contrainte normale σ suivant la normale MN à la facette, et en une contrainte de cisaillement τ suivant le plan de la facette.

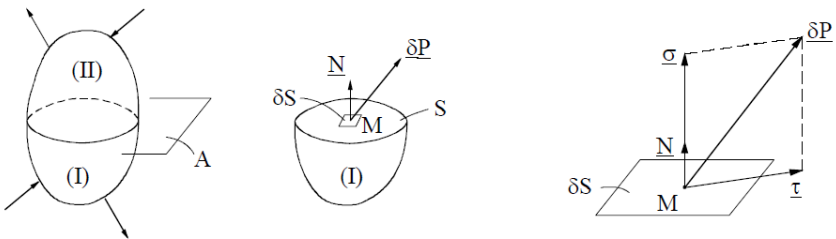


Figure 1.3. Contrainte dans un solide et décomposition d'une contrainte

Pour déterminer les contraintes qui s'exercent sur toutes les différentes facettes autour d'un point M, on montre qu'il suffit de connaître en ce point les six valeurs suivantes :

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

c.à.d. les composantes des contraintes qui s'exercent sur les faces d'un cube centré au point M, et dont les arêtes sont parallèles aux axes Ox, Oy et Oz (figure 4). Ces valeurs représentent les termes du tenseur de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ qui s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad 1.2$$

σ_{ij} est la composante appliquée sur la facette perpendiculaire à l'axe (i) parallèlement à l'axe (j).

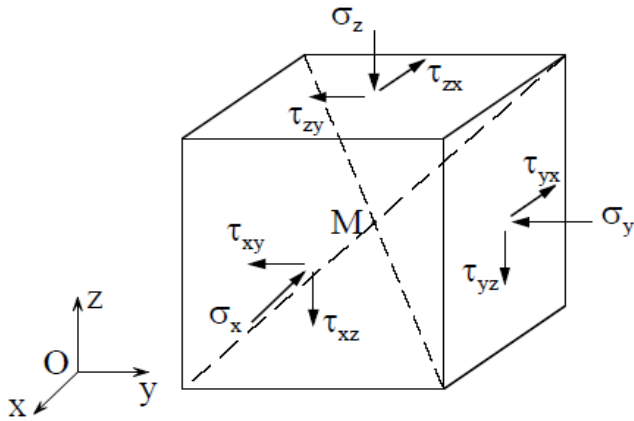


Figure 1.4. Etat de contrainte autour d'un point

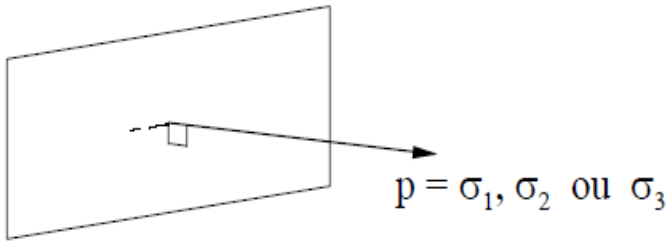


Figure 1.5. Plan principal et contrainte principale

Sur une facette dont le vecteur normal unitaire a pour composantes (a, b, c), la contrainte P a pour composantes :

$$\begin{aligned}
 P_x &= a \cdot \sigma_x + b \cdot \tau_{xy} + c \cdot \tau_{xz} \\
 P_y &= a \cdot \tau_{yx} + b \cdot \sigma_y + c \cdot \tau_{yz} \\
 P_z &= a \cdot \tau_{zx} + b \cdot \tau_{zy} + c \cdot \sigma_z
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

En tout point il existe trois plans privilégiés pour lesquels la contrainte est uniquement normale ($\tau = 0$), ils sont appelés plans principaux. Leurs directions normales sont les directions principales qui sont perpendiculaires deux à deux (figure 5); et les contraintes correspondantes notées: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont dites principales.

1.2.2 Les équations d'équilibre

L'état de contrainte caractérisé par les six quantités précédemment introduites : $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, est variable d'un point à l'autre. Soit un milieu bidimensionnel où on considère un carré

élémentaire, dont les côtés sont parallèles aux axes Ox et Oy, et ont pour dimensions dx et dy (figure 6). Sur chaque côté s'exercent des contraintes et des forces, calculons les pour le côté de milieu M1 de coordonnées $(x + \frac{dx}{2}, y)$

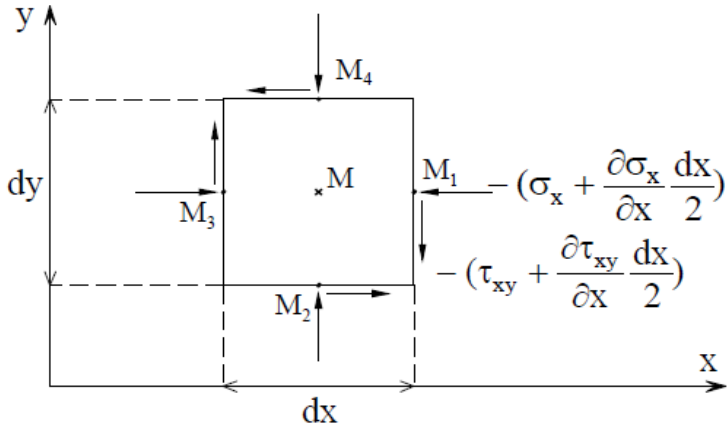


Figure1.6. Etat de contrainte dans un carré élémentaire

Les contraintes qui s'exercent en M sont : σ_x , σ_y et τ_{xy} , celles qui s'exercent en M1 sont :

$$\sigma = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \quad 1.4$$

$$\tau = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

Ainsi la force s'exerçant sur le côté de milieu M1 a pour composantes suivant Ox et Oy :

$$(M_1) \begin{cases} - \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \\ - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \end{cases} \quad 1.5$$

De la même façon, on détermine les forces s'exerçant sur les côtés de milieux M2 , M3 , et M4 , elles ont pour composantes :

$$\begin{aligned}
 (M_2) & \left\{ \begin{aligned} & \left(\tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \\ & \left(\sigma_y - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \end{aligned} \right. \\
 (M_3) & \left\{ \begin{aligned} & \left(\sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \\ & \left(\tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \end{aligned} \right. \\
 (M_4) & \left\{ \begin{aligned} & - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \\ & - \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Sur la partie du solide délimitée par le carré peuvent aussi s'exercer des forces de volume (la pesanteur par exemple), on suppose que par unité de surface ces forces ont pour composantes en M : (X(x,y), Y(x,y)). Toutes les forces appliquées à l'élément de solide ont une résultante nulle, on obtient suivant Ox :

$$\begin{aligned}
 & - \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy + \left(\tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \\
 & - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx + \left(\sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy + X dx dy = 0
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

En divisant par (dxdy), on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = X \tag{1.8}$$

Suivant Oy, on obtient de la même manière l'équation :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = Y \tag{1.9}$$

Les équations (1) et (2) régissent l'équilibre d'un corps solide dans le cas bidimensionnel. Dans le cas du milieu à trois dimensions, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= X \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= Y \\
 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= Z
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

Si les forces de volume se réduisent uniquement à la force de pesanteur en prenant l'axe vertical ascendant, on a donc :

$$X = Y = 0, Z = -\gamma$$

I.3 Notion de déformation

Un solide soumis à l'action de forces se déforme. On se propose de définir l'état de déformation autour d'un point M. Soit un solide (S) que nous étudions avant et après déformation. Soit l'élément linéaire MN choisi autour de M; après déformation cet élément se transforme en M'N' (figure 13). Par rapport au repère Oxyz les coordonnées de ces points sont les suivantes :

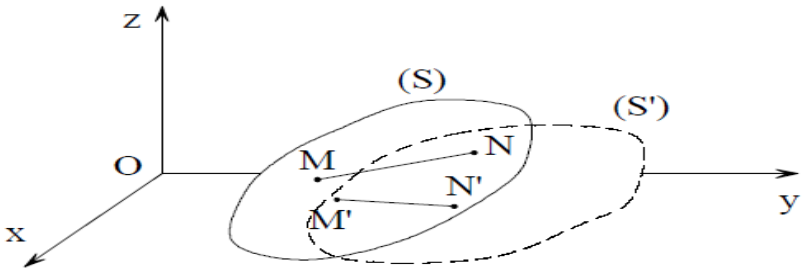
M(x, y, z) :

M' (x + w_x, y + w_y, z + w_z)

N(x + dx, y + dy, z + dz) :

N' (x + dx + w_x, y + dy + w_y, z + dz + w_z)

où w_x, w_y et w_z sont les composantes du déplacement du point M.



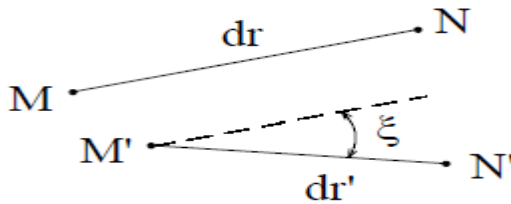


Figure 1.7. Déformation d'un solide (S)

En première approximation on écrit :

$$\begin{aligned}
 dw_x &= \frac{\partial w_x}{\partial x} dx + \frac{\partial w_x}{\partial y} dy + \frac{\partial w_x}{\partial z} dz \\
 dw_y &= \frac{\partial w_y}{\partial x} dx + \frac{\partial w_y}{\partial y} dy + \frac{\partial w_y}{\partial z} dz \\
 dw_z &= \frac{\partial w_z}{\partial x} dx + \frac{\partial w_z}{\partial y} dy + \frac{\partial w_z}{\partial z} dz
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

On n'étudie que les petites déformations. Pour l'élément MN elles sont de deux types:

- une déformation linéaire ϵ qui est la variation de sa longueur, on a:

$$MN = dr, M'N' = dr' \quad \text{d'où} \quad \epsilon = \frac{dr' - dr}{dr}$$

-une déformation angulaire (ou distorsion) qui est le changement de direction de MN, elle est définie à partir de l'angle :

$$\xi = (MN \hat{=} M'N')$$

Pour déterminer les déformations autour d'un point, il suffit de connaître les six valeurs suivantes qui sont les composantes du tenseur de déformation $\bar{\epsilon}$:

$$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \xi_{xy} = \xi_{yx}, \xi_{zx} = \xi_{xz}, \xi_{yz} = \xi_{zy}$$

On montre que ces quantités s'expriment en fonction des déplacements w_x, w_y et w_z , on a:

$$\epsilon_x = \frac{\partial w_x}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial w_y}{\partial y}, \epsilon_z = \frac{\partial w_z}{\partial z} \tag{1.12}$$

$$\xi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right), \xi_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right), \xi_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right)$$

La variation de volume d'un petit élément autour du point M est :

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

Comme pour les contraintes, il existe en tout point trois directions privilégiées pour lesquelles les déformations angulaires sont nulles ($\xi = 0$), ces directions sont appelées directions principales de déformation, elles coïncident avec les directions des contraintes principales. Les déformations principales sont notées : $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

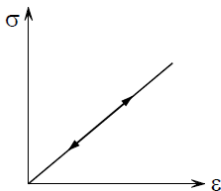
I.3 Relations contraintes-déformations.

La théorie des milieux continus montre que pour déterminer l'état de contrainte et de déformation dans un solide soumis à l'action de forces extérieures, il est nécessaire d'avoir des relations supplémentaires entre les contraintes et les déformations qui traduisent le comportement du matériau, c à d sa réponse lors d'un chargement; ces relations s'appellent lois de comportement.

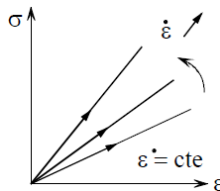
On présente trois lois de comportement élémentaires (figure 1.8) qui peuvent schématiser certains aspects relatifs au comportement des sols. Ces lois sont représentées dans le cas d'un chargement à un seul paramètre (cas uni axial ou unidimensionnel).

1.3.1 Application de l'élasticité

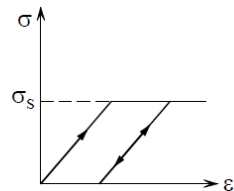
L'élasticité linéaire et isotrope dans un solide se traduit par la linéarité et la réversibilité des déformations, elle s'exprime par la loi de Hooke qui se traduit par les deux équations:



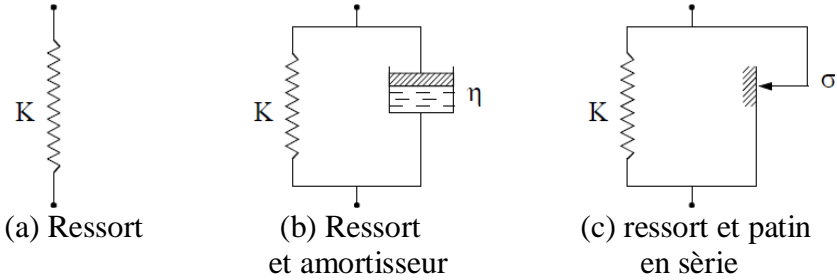
Elasticité linéaire



Viscoélasticité



Elastoplasticité parfaite



Modèles analogiques

Figure 1.8. Exemples de lois de comportement schématisées dans le cas d'une sollicitation unidimensionnelle

1.3.2 Introduction à la plasticité

Le comportement plastique d'un solide est caractérisé par l'apparition de déformations permanentes sans fissuration. Ce comportement peut être schématisé par un patin dans le cas de la plasticité parfaite (figure 14c). Les déformations permanentes n'apparaissent qu'au-delà d'un certain seuil en dessous duquel les déformations restent élastiques. La frontière du domaine élastique est définie par un critère de plasticité qui est généralement fonction des contraintes principales et de paramètres d'écroutissage A_i , il s'écrit sous la forme :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 0$$

Dans le diagramme de Mohr il est possible de représenter ce critère par une courbe intrinsèque, qui sépare la zone des contraintes possibles de la zone des contraintes impossibles (figure 15). Cette notion de courbe intrinsèque sera bien développée dans le chapitre résistance au cisaillement des sols.

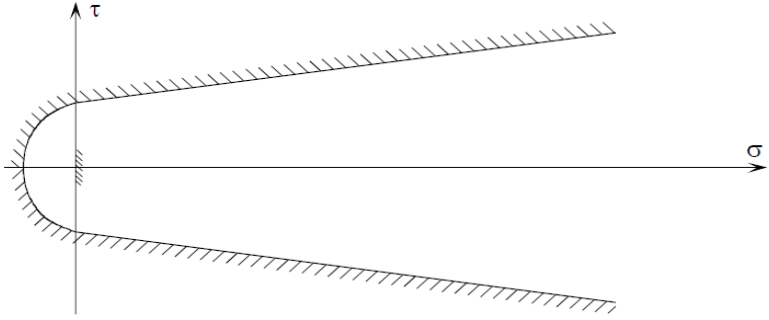


Figure 1.9. Courbe intrinsèque d'un sol

Chapitre II Les Modèles Elasto-Plastique

II-1 Introduction

Les modèles elasto-plastiques permettent de décrire un comportement non linéaire avec une déformation irréversible des matériaux. Le schéma des modèles élasto-plastiques intègre l'existence d'un palier d'écoulement sur la courbe contrainte déformation et de déformations irréversibles. Cette application permet de décrire de façon relativement satisfaisante les principaux aspects du comportement mécanique des sols saturés, en conservant néanmoins un domaine de réversibilité. Par ailleurs, ce schéma est bien adapté à une implantation dans les logiciels de calcul par éléments finis. [31]

Les notions fondamentales de la théorie de l'élasto-plasticité:

- la partition des déformations, qui décompose le tenseur des déformations totales en la somme du tenseur des déformations élastiques et du tenseur des déformations plastiques ;
- la surface de charge, qui définit le seuil de contrainte au delà duquel le comportement d'un matériau est irréversible ;
- le domaine d'élasticité, qui correspond à l'intérieur de la surface de charge et dans lesquelles déformations sont réversibles ;
- le choix des variables internes décrivant la mémorisation de l'histoire des états du matériau (écrouissage, déformations plastiques) ;
- l'écrouissage, qui permet de faire évoluer la surface de charge dans l'espace des contraintes en fonction de l'intensité des sollicitations. Dans ce cas, le domaine d'élasticité varie également ;
- la règle d'écoulement plastique, qui décrit la manière dont évoluent les déformations plastiques et les autres variables internes ; [31]

II-2 Partition des déformations

La plasticité se caractérise par la présence de déformations irréversibles au déchargement. Les déformations se décomposent en une partie élastique et une partie plastique. La partition des taux de déformations donne la relation suivante :

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad 2.1$$

II.3 Surface de charge et domaine d'élasticité

Le deuxième concept fondamental est celui de domaine d'élasticité. Le domaine initial d'élasticité définit l'ensemble des trajets de chargement le long desquels le comportement du matériau est continuellement élastique. Lorsque le trajet de chargement sort de ce domaine, un phénomène physique supplémentaire se superpose à celui de la déformation élastique. Ce phénomène, qui correspond à la déformation plastique, est irréversible.

Le domaine d'élasticité est donc défini par une fonction scalaire f du tenseur de contrainte σ_{ij} , appelée fonction de charge du matériau et telle que :

$f(\sigma_{ij}) < 0$ correspond à l'intérieur du domaine ;

$f(\sigma_{ij}) = 0$ correspond à la frontière du domaine

$f(\sigma_{ij}) > 0$ correspond à l'extérieur du domaine

II. 4 Modèles de comportement élasto-plastique

Dans le cadre de la plasticité, pour décrire le comportement monotone et cyclique des sols, il est possible de distinguer dans la littérature deux grandes classes de modèles :

- modèles à surface limite,
- modèles à multi-mécanismes plastiques.

La première classe de modèles est caractérisée par deux surfaces, une extérieure et une autre située à l'intérieur de la première. Il est ensuite nécessaire de poser une règle pour la définition du module d'érouissage reliée aux deux surfaces (Dafalias, 1987).

La seconde classe de modèles concerne le concept des surfaces de charge multiples et la théorie de l'érouissage cinématique introduits par Mroz (1967) pour les métaux et appliqués aux sols par Prévost (1977, 1978).

- Modèle de Mohr-Coulomb

Cette loi élastique parfaitement plastique est utilisée pour écrire de manière approchée le comportement des sols pulvérulents (sable), des sols cohérents (argiles et limons) et de certaines roches.

Dans l'espace des contraintes principales $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ la surface définie par la fonction de charge F est une pyramide de section

hexagonale ayant pour axe la droite d'équation ($\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3$) (figure I.3). L'équation de la surface de charge est la suivante :

$$F(\sigma'_{ij}) = |\sigma'_1 - \sigma'_3| - (\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin \varphi' - 2c' \cos \varphi' = 0 \quad 2.2$$

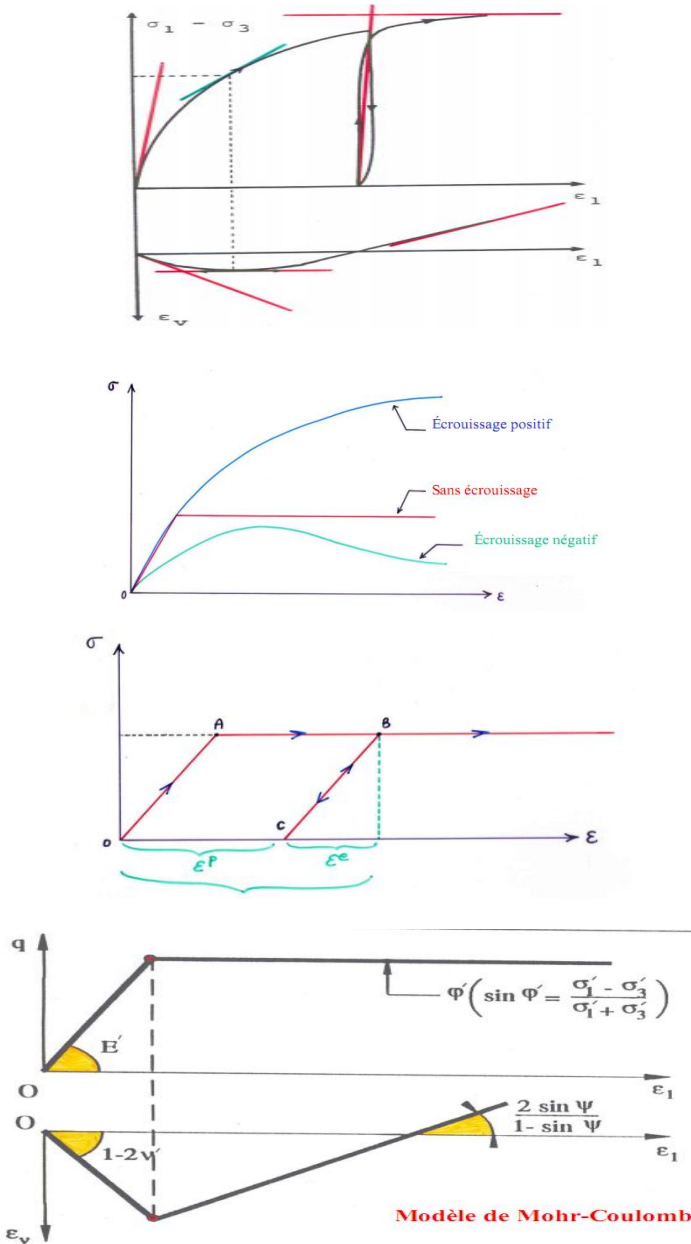


Figure 2.3 Caractéristiques de la loi élastique parfaitement plastique

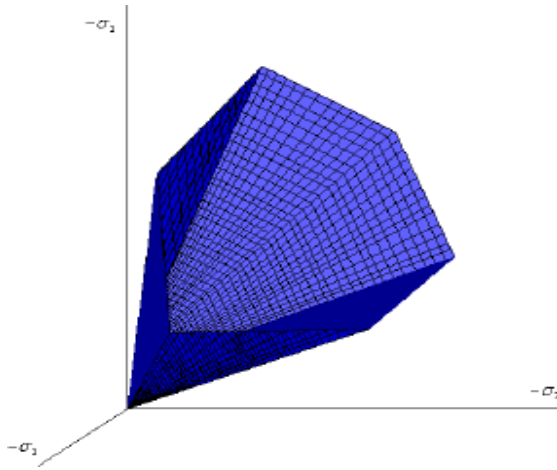
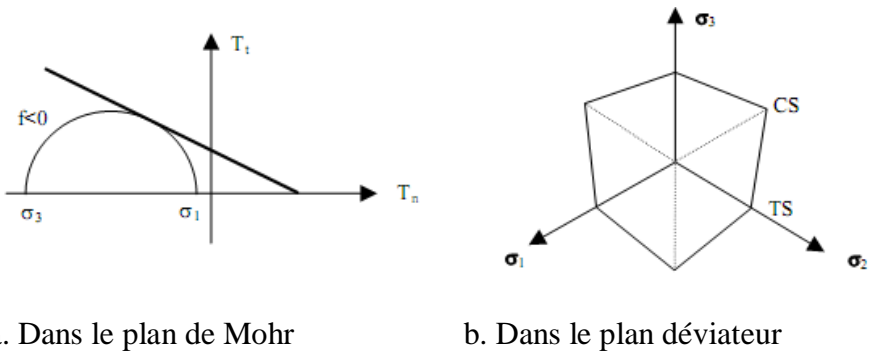


Figure 2.4 Critere de Mohr-Coulomb dans l'espace des contraintes principales



a. Dans le plan de Mohr

b. Dans le plan déviateur

Figure 2.5: Représentation du critère de Mohr-Coulomb

Les sols étant généralement des matériaux non standards, on introduit le potentiel plastique suivant :

$$G(\sigma'_{ij}) = |\sigma'_1 - \sigma'_3| - (\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin \psi \quad 2.3$$

La contrainte principale σ'_2 ne joue aucun rôle. Par ailleurs l'état caractéristique n'est pas bien décrit dans ce schéma puisque le minimum de déformation coïncide avec le maximum de contraintes.

φ' : Angle de frottement interne

C' : Cohésion entre les particules fines du sol

ψ : Angle de dilatance du sol représentant l'augmentation de volume du squelette du sol qui se produit pendant le cisaillement.

Détermination de l'angle de dilatance

Pour calculer l'angle de dilatance ψ on montre que le rapport de la variation volumique plastique de l'échantillon $d\varepsilon_v^p$ en fonction de la déformation verticale plastique $d\varepsilon_1^p$ est égale à :

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_1^p} = \frac{-2\sin\psi}{1 - \sin\psi} \quad 2.4$$

- Critère de plasticité de Tresca

Ce modèle est utilisé pour l'étude des sols fins (argile, limon) saturés, soumise à des sollicitations rapides non drainées afin de déterminer la cohésion non drainée à court terme C_u .

Le modèle se caractérise par une élasticité linéaire isotrope et un seuil de plasticité parfaite.

$$f = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k \quad 2.5$$

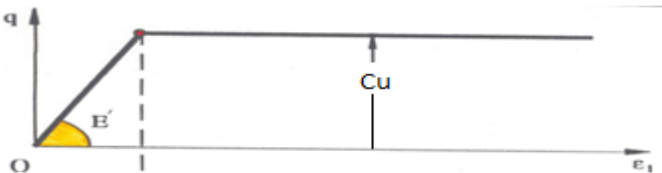


Figure 2.6 Comportement Elasto-plastique (Tresca)

- Critère de plasticité de Von Mises

Tout comme le critère de Tresca, lorsque l'angle de frottement est différent de zéro est que la cohésion est nulle la représentation dans l'espace des contraintes principales et sa projection sur un plan sont données sur la figure 2.7

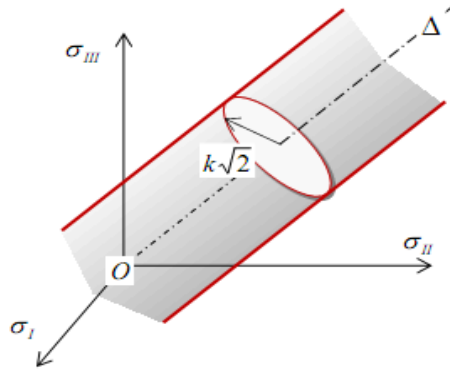


Figure 2.7 Représentation dans l'espace des contraintes principales Critère de Von-Mises

$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 6k^2 = 0 \quad 2.6$$

La représentation de ce critère dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et dont la section est un hexagone régulier. La projection de cette surface sur un plan est donnée dans la figure 2.6

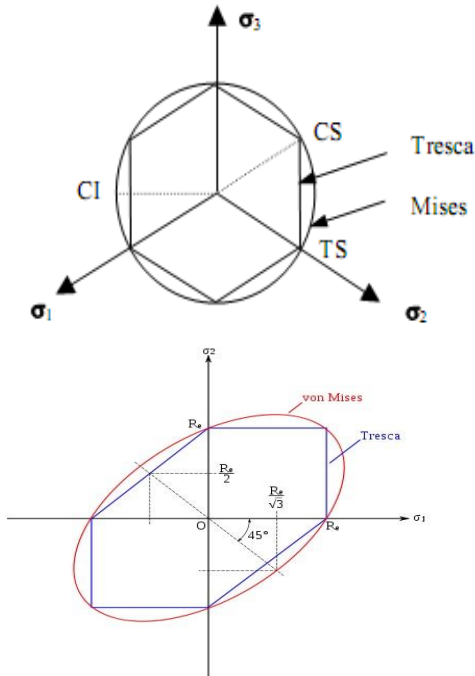


Figure 2.8 Représentation du critère de Tresca et Von-Mises
 Définition du plan déviateur

- Critère de Drucker-Prager

Drucker et Prager (1952) ont présenté un critère qui prend en compte le premier invariant du tenseur des contraintes (J_1) et le deuxième invariant du déviateur du tenseur des contraintes (J'_2). Sa fonction de charge est donnée par l'expression :

$$f(\sigma) = J_2'^{1/2} - k - \alpha J_1 = 0 \quad 2.7$$

Ou

α, k Sont des constantes,

La surface représentative du critère dans l'espace $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ est un cône dont le sommet se trouve

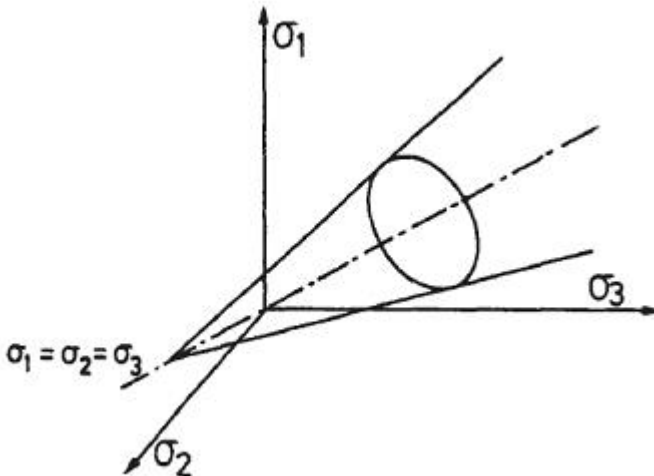
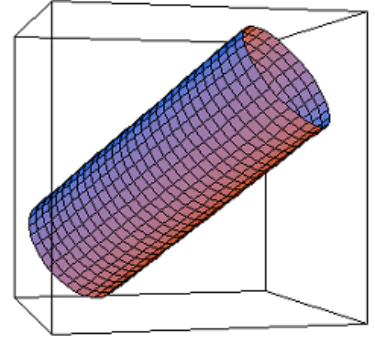
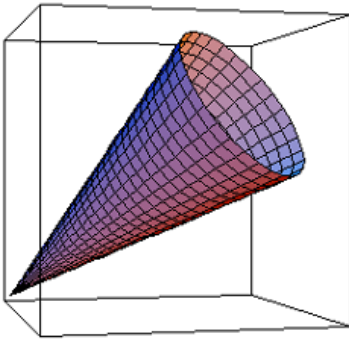


Figure 2.9 - Critère de Drucker et Prager dans l'espace

Si $\alpha = 0$, le critère Drucker-Prager est le critère de Von Mises et le cône devient un cylindre. La figure 2.10, donne une représentation en 3D, dans l'espace des contraintes, du critère de Drucker-Prager et du critère dégénéré de Von Mises.



(a) Critère de Drucker-Prager

(b) Critère de Von Mises

Figure 2.10 Visualisation en 3D des critères de Drucker-Prager et de Von Mises

Tableau 2.1 Paramètres du critère de Drucker-Prager en fonction de ceux du critère de Mohr-Coulomb

Type d'essai	α	K
Compression triaxiale ($\theta = 30^\circ$)	$\alpha = \frac{6 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$	$K = \frac{6 C \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$
Extension triaxiale ($\theta = -30^\circ$)	$\alpha = \frac{6 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$	$K = \frac{6 C \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$

- Relations contraintes-déformations en élasto-plasticité



Soit $(\sigma_{ij}, \varepsilon^p_{ij})$ un état de contraintes et de déformations plastiques correspondant à une étape de chargement donnée :

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon^p_{ij}) < 0 \text{ alors } d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon^e_{ij} ;$$

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0$$

Il y a chargement
 si et seulement si

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = dF(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$$

Il y a déchargement
 si et seulement si

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) < 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e$$

Pour quantifier le tenseur des déformations plastiques, il est nécessaire d'introduire des équations complémentaires. On postule l'existence d'un potentiel plastique G tel que :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad 2.8$$

$d\lambda$ est appelé multiplicateur de plasticité et est strictement positif. Si $G=F$, la règle d'écoulement est dite associée et non associée dans le cas contraire.

Un module d'écrouissage est également défini :

$$H d\lambda = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad 2.9$$

L'ensemble des relations précédentes permettent de calculer la relation de comportement entre un accroissement du tenseur de déformations et un accroissement du tenseur des contraintes. Le calcul utilise les relations suivantes dans le domaine plastique :

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= E_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^e & d\varepsilon_{ij}^e &= D_{ijkl} d\sigma_{kl} \\ dF &= \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p = 0 & H d\lambda &= \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \end{aligned}$$

Chapitre III : Lois élasto-plastiques avec écouissage

III.1 Introduction

On a vu que la loi élastique linéaire parfaitement plastique de Mohr-Coulomb est ouverte sur l'axe des compressions et ne permet pas de prendre en compte l'écrouissage des sols. Dans cette première approche on a séparé le comportement drainé et non drainé des argiles, ainsi que les problèmes de résistance et de déformation.

Les problèmes délicats de construction de remblais sur sols argileux mous ont amené les géotechniciens depuis une vingtaine d'années à adopter des concepts qui permettent d'intégrer une approche globale, de générer des déformations plastiques lors d'une compression isotrope, de tenir compte de l'écrouissage des sols argileux. Les concepts d'état critique et d'état limite développé à l'université de Cambridge (Roscoe K-H., Schofield A.N., et Wroth C-P., 1958) ont permis de développer les modèles de CAM-CLAY. Ils ne s'appliquent qu'à des argiles normalement consolidées ou faiblement surconsolidées, isotropes, mais tous les principes sont qualitativement applicables aux argiles naturelles, fortement surconsolidées et anisotropes.

III.2 Modèle Cam Clay et Fonction Limite

Roscoe et al. (1958) furent les premiers à établir, à l'Université de Cambridge (Royaume Uni), des relations générales de comportement des sols fondées sur la théorie de l'élastoplasticité avec écouissage.

Dans le plan $p - q$, la surface de la charge de Cam-Clay modifiée est une ellipse donnée par :

$$\frac{q^2}{p'^2} + M^2 \left(1 - \frac{p'_c}{p'} \right) = 0 \tag{3.1}$$
$$f = q^2 - M^2 - p'(p'_0 - p')$$

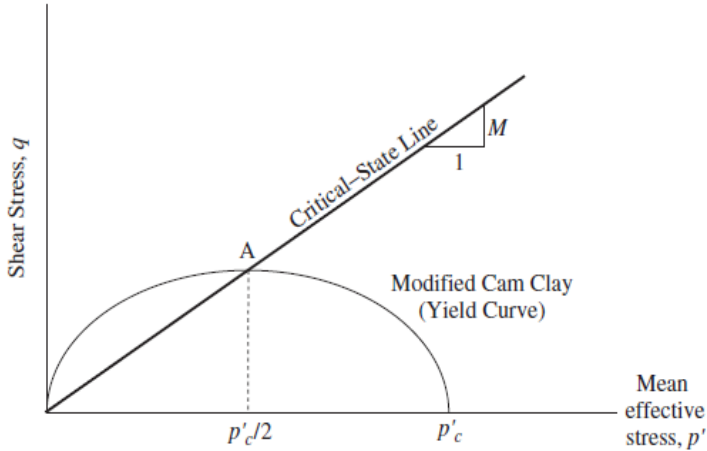


Figure 3.1 Surface de limite d'un modèle Cam Clay dans le plan q-p

La figure 3.1 montre une surface d'écouement elliptique correspondant à une pression de préconsolidation p'_c .

Le paramètre p'_c contrôle la taille de la surface d'écouement et est différent pour chaque ligne de déchargement-rechargement. Le paramètre p'_c est utilisé pour définir le comportement de durcissement du sol. Le comportement du sol est élastique jusqu'à ce que l'état de contrainte de l'échantillon de sol (p' , q) atteigne la surface d'écouement. Ensuite, le sol se comporte de manière plastique.

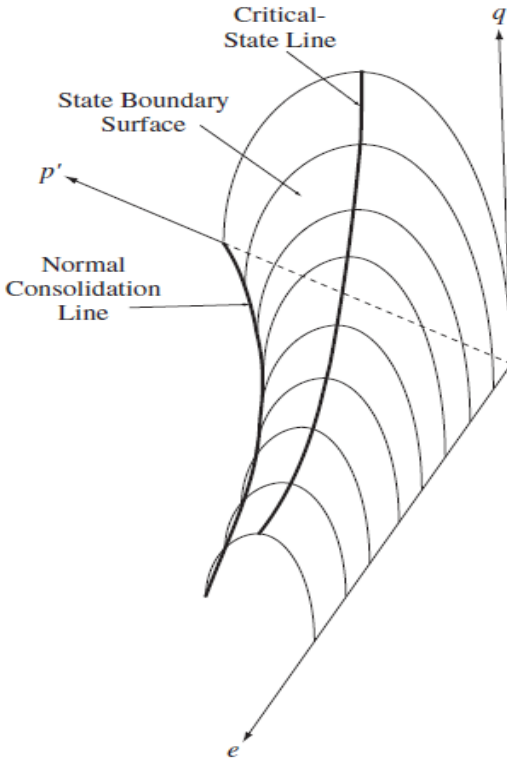


Figure 3.2 État de la surface limite du modèle Cam Clay.

Notez que la ligne d'état critique coupe la surface d'écoulement au point A, situé au sommet de l'ellipse (et qui présente donc le maximum de q). Notez également que la coordonnée p' du point d'intersection (point A) est $p_c/2$. La figure 3.2 présente la surface d'élasticité du modèle modifié de l'argile de Cam dans un espace tridimensionnel (e - p - q), appelé surface limite d'état. Notez que la taille de la surface d'écoulement diminue lorsque le taux de vide augmente.

III.3 Comportement de durcissement et de plastification.

Considérons une éprouvette de sol qui est consolidée de manière isotrope à une contrainte effective moyenne p_c et qui est ensuite légèrement déchargée à p'_c , comme le montre la figure 3.2a Ici, p'_c est la pression de préconsolidation et p'_0 est la pression actuelle. La taille de la surface d'écoulement initiale est déterminée par p_c , comme le montre la figure. Notez que le sol est légèrement surconsolidé de sorte que $OCR = p_c/p_0 < 2$.

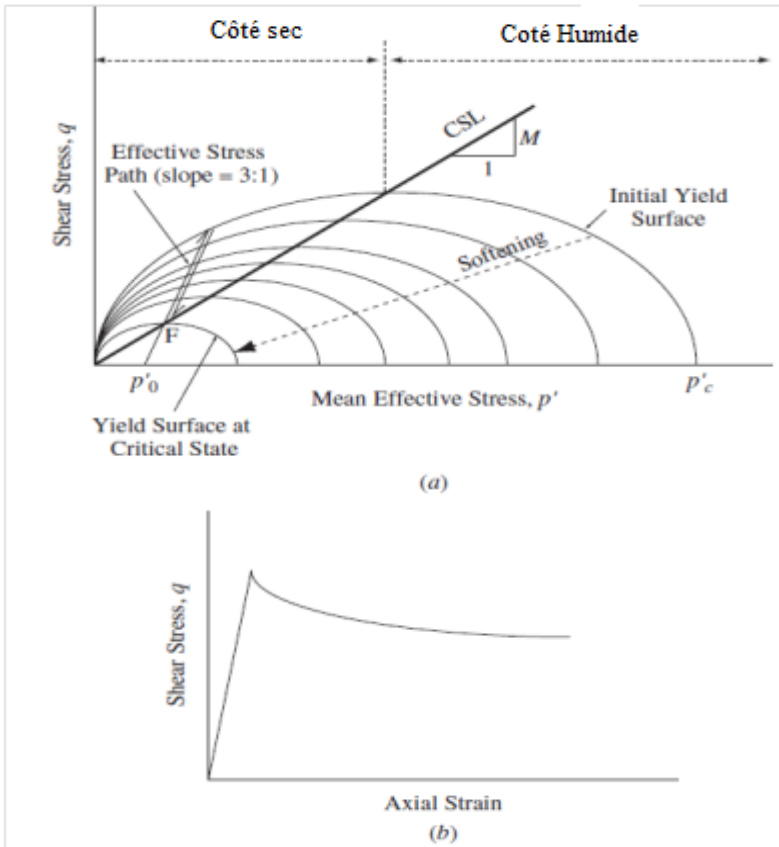


Figure 3.2 Comportement Cam Clay lors du radoucissement : (a) évolution d'une surface d'écoulement pendant le radoucissement ; (b) courbe contrainte-déformation avec radoucissement.

III.4 Comportement des argiles idéales reconstituées et saturées, dans le domaine normalement consolidé. Notion d'état critique

Les essais de consolidation isotope et les essais triaxiaux sur des argiles isotropes reconstituées au laboratoire introduisent les concepts d'état critique et d'état limite.

Lors d'un essai de compression hydrostatique, les sols présentent un indice des vides qui décroît logarithmiquement avec la pression hydrostatique exercée (figure 3.4). e_0 étant l'indice des vides initial sous chargement initial. Jusqu'à une

pression p_{cons}^0 appelée pression de consolidation, le comportement est réversible, la pente κ du diagramme (e , $\ln P$) est appelé coefficient élastique de gonflement. p_{cons}^0 correspond à la pression maximale qu'a subie le matériau au cours de son histoire. Au delà de cette préconsolidation, le diagramme présente une nouvelle pente λ (coefficient de compressibilité) plus marquée et l'apparition de déformations irréversibles. p_{cons}^1 correspond donc à un seuil élastoplastique évolutif.

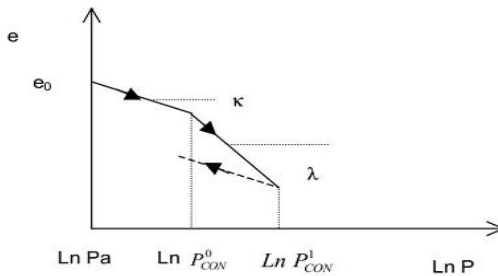


Fig.3.4 Courbes de compression isotrope

III.5. Présentation du modèle Cam-Clay modifié

Les modèles développés, connus sous le nom de « modèles Cam-Clay », sont destinés essentiellement à décrire le comportement des argiles reconstituées en laboratoire. Le modèle le plus utilisé est appelé « modèle Cam-Clay modifié », il est décrit brièvement ci-après. Dans le plan (e , $\ln p$), e indice des vides et p pressions moyenne, les résultats d'un essai de compression isotrope font apparaître des courbes qui peuvent être assimilées à des droites (figure 3.1) :

- une courbe de consolidation vierge, dite courbe λ , qui décrit le chargement au cours de l'essai ;
- une courbe de déchargement-rechargement, dite courbe k , qui schématise un cycle de déchargement-rechargement.

Les courbes λ et k sont définis par les équations suivantes :

Courbe λ :

$$e = e_1 - \lambda \ln \frac{p}{p_1} \quad 3.1$$

Courbe k :

$$e = e^p - \kappa \ln \frac{p}{p_1} \quad 3.2$$

$$\lambda = \frac{C_c}{\ln 10} = \frac{C_c}{2.3}$$

$$\kappa = \frac{C_s}{\ln 10} = \frac{C_s}{2.3}$$

Où e^1 et e^p correspondent aux valeurs obtenues pour une pression de référence p_1 (prise égale à 1kPa) e^1 , λ et k sont trois paramètres du modèle.

p et q représentent les parties sphériques et déviatorique du tenseur de contraintes, et pour le cas des conditions de l'essai triaxial ($\sigma'_2 = \sigma'_3$), cas pour lequel ont été formulés initialement les modèles Cam-Clay, on a :

$$p = (\sigma'_1 + 2\sigma'_3)/3 \quad q = (\sigma'_1 - \sigma'_3) \quad 3.3$$

En outre, P_1 représentent une contrainte moyenne de référence e est l'indice des vides

M, Γ, λ sont des constantes du matériau.

On appelle, dans le plan (e, p) , courbe (λ) ou courbe de consolidation vierge (figure 3.2) la courbe qu'on obtient pendant un essai de première compression isotrope, et dans le même plan, courbes k ou courbes déchargement-rechargement (figure 3.2) les courbes qui schématisent un cycle de déchargement-rechargement. Les équations de ces courbes sont :

$$\begin{array}{ll} \text{courbe } \lambda & e = e_\lambda - \lambda \ln(p/p_1) \\ \text{courbe } k & e = e_k - k \ln(p/p_1) \end{array} \quad 3.5$$

Où e_λ et e_k correspondent aux points des courbes obtenues pour une valeur de référence p_1 et k est une constante du sol.

Dans les coordonnées $(e, \ln p)$ figure. 2.1, ces courbes sont des droites.

III.6 Contraintes plastiques incrémentielles

Dans leur dérivation des formulations Cam Clay modifiée, Roscoe et Burland (1968) ont supposé que le travail effectué sur un spécimen de sol par une charge q , p est donné par :

$$\dot{W}^P = p \sqrt{(\dot{\epsilon}_v^P)^2 + M^2(\dot{\epsilon}_c^P)^2} \quad 3.6$$

Où

\dot{W}^P : Est l'incrément d'énergie dissipée et $\dot{\epsilon}_v^p$ et $\dot{\epsilon}_c^p$ représentent les incréments de déformations plastiques volumiques et de cisaillement' respectivement.

$$\dot{\epsilon}_v^P = \dot{\epsilon}_1 + 2 \dot{\epsilon}_3 \quad 3.7$$

$$\dot{\epsilon}_c^P = 2 \frac{(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3)}{3} \quad 3.8$$

$$\frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_c^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} \quad 3.9$$

Où $\eta = q/p$ est le rapport de contrainte. Notez que η est égal à M lorsque $q = q_f$ et $p = p_f$ (à la rupture). Dans le modèle de Cam Clay modifié, l'incrément de déformation plastique résultant d'un incrément de charge $d\eta = dq/dp$, illustré à la figure 3.2a, est normal à la surface d'élasticité, comme le montre la figure 3.2b. C'est ce qu'on appelle la règle de normalité. Ensuite, nous présentons les équations pour les incréments de déformation causés par un incrément de contrainte, $d\eta = dq/dp$. Ces équations nous permettent de calculer l'incrément de déformation volumétrique plastique $\dot{\epsilon}_v^p$, l'incrément de déformation volumétrique élastique $\dot{\epsilon}_v^e$, l'incrément de déformation en cisaillement plastique $\dot{\epsilon}_c^p$ et l'incrément de déformation en cisaillement élastique $\dot{\epsilon}_c^e$. Notez que l'incrément total de la déformation volumétrique est donné comme suit:

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_v^e + \dot{\epsilon}_v^p \quad 3.10$$

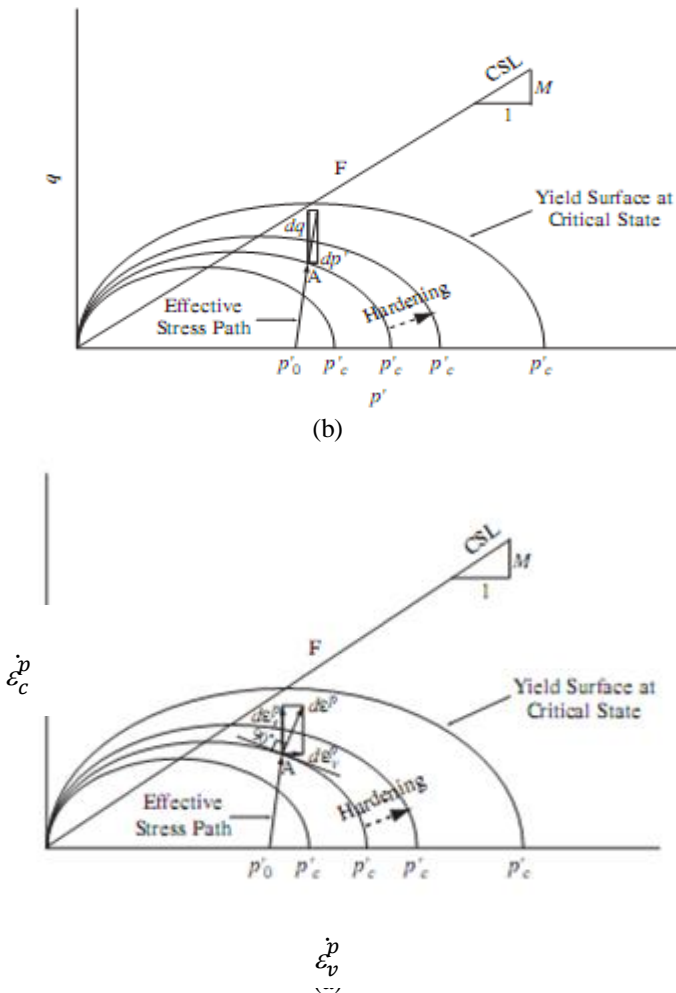


Figure 3.5 Détermination d'un incrément de déformation plastique : (a) incrément de charge ; (b) direction de l'incrément de déformation plastique (règle de normalité).

Et l'incrément total de la déformation de cisaillement est donné comme suit :

$$\dot{\epsilon}_c = \dot{\epsilon}_c^e + \dot{\epsilon}_c^p \quad 3.11$$

Pour simplifier, la théorie de l'état critique on admet qu'aucune énergie réversible n'est associée à la déformation par cisaillement (c'est-à-dire $\dot{\epsilon}_c^e$). Ainsi, (2.33) est réduit à des $\dot{\epsilon}_c^p$
 Il est important de noter que les équations suivantes sont données

sous des formes incrémentales et doivent donc être utilisées de manière incrémentale : La charge doit être appliquée par petits incréments et les incréments de déformation correspondants sont calculés. Les incréments de déformation sont accumulés pour nous donner la déformation totale.

Desai et Siriwardane (1984) ont présenté les équations suivantes pour les incréments de déformation volumétrique et de cisaillement :

Déformations volumétriques L'incrément de déformation volumétrique plastique :

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \left(\frac{dp'}{p'} + \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right) \quad 3.12$$

L'incrément de déformation volumétrique élastique :

$$\dot{\varepsilon}_v^e = \frac{\kappa}{1 + e} \frac{dp'}{p'} \quad 3.13$$

Ainsi, la déformation volumétrique totale s'accroît :

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{\lambda}{1 + e} \left[\frac{dp'}{p'} + \left(1 - \frac{\kappa}{\lambda} \right) \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right] \quad 3.14$$

Déformation de cisaillement :

$$\dot{\varepsilon}_c = \dot{\varepsilon}_c^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \left(\frac{dp'}{p'} + \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right) \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} \quad 3.15$$

Ou

$$\dot{\varepsilon}_c = \dot{\varepsilon}_c^p \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} \quad 3.16$$

- Calculs du comportement contrainte-déformation consolidé-drainé d'une argile normalement consolidée à l'aide du modèle Modifie Cam Clay.

En utilisant les équations (3.12) à (3.16), nous pouvons prédire le comportement contrainte-déformation d'une argile normalement consolidée (NC). La contrainte est appliquée en utilisant un

chemin de contrainte donné, et les déformations correspondantes sont calculées.

Le chemin de contrainte effectif dans un essai triaxial consolidé-drainé est une ligne droite avec une pente de 3 dans le plan p - q , comme décrit précédemment. Les équations (3.12) à (3.16) sont données sous forme incrémentale.

On calcule les déformations incrémentales causées par les incréments de contrainte. Les incréments sont ensuite additionnés pour calculer les déformations totales.

La figure 3.5a décrit le comportement d'une éprouvette de sol légèrement surconsolidée lors d'un essai CD. Initialement, l'état de contrainte de l'éprouvette est situé sur la L , comme l'indique le point 1 de la figure 3.5b.

L'éprouvette est soumise à une pression de confinement globale (consolidation isotrope). Amenant l'état de contrainte au point 2, qui correspond à la pression de préconsolidation p_c , comme le montre la figure 3.6a. L'échantillon est ensuite déchargé jusqu'au point 3, qui correspond à la pression actuelle p_0 . Nous pouvons maintenant commencer à cisailier l'éprouvette dans un état drainé en permettant à l'eau de sortir pendant le cisaillement. Cela signifie qu'il y aura des changements de volume dans l'échantillon du sol. Le chemin de la contrainte effective pendant le cisaillement drainé est une droite avec une pente = 3, émanant du point 3. Ainsi, l'équation de la trajectoire de la contrainte effective est donnée par l'équation 3.17

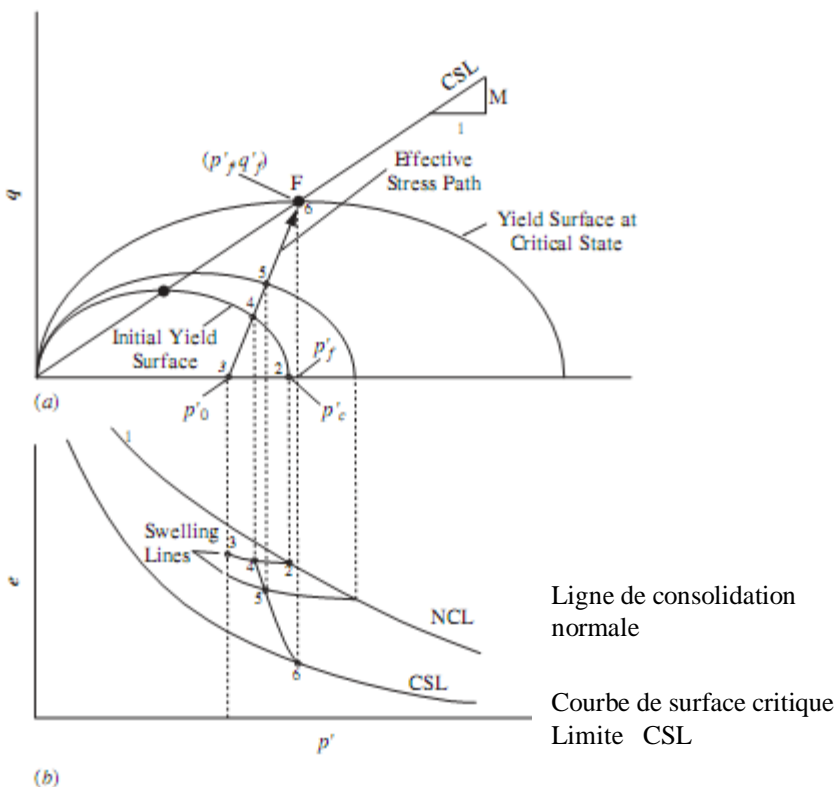


Figure 3.6 Comportement d'un essai triaxial drainé consolidé d'une argile légèrement surconsolidée.

$$q_f = 3(p'_f - p'_0) \quad 3.17$$

L'échantillon de sol ne subit que des déformations élastiques tant que l'état de contrainte effective se trouve dans la région élastique (c'est-à-dire dans la surface d'élasticité initiale). Lorsque la trajectoire de la contrainte effective touche le point 4, le sol commence à céder. La trajectoire de la contrainte effective maintiendra sa trajectoire vers la ligne d'état critique, pendant laquelle la surface d'écoulement s'agrandit (durcissement) jusqu'à ce que la trajectoire de contrainte effective touche la ligne d'état critique au point 6, où la rupture se produit.

Notez maintenant comment le point 1 se déplace le long de la NCL vers le point 2 pendant la consolidation isotrope. Lors du déchargement, le point 2 se déplace le long de la ligne de

gonflement jusqu'au point 3. Lorsque le cisaillement commence, le point 3 se déplace le long de la même ligne de gonflement jusqu'au point 4. Du point 3 au point 4, l'échantillon de sol ne subit que des déformations élastiques.

Lorsque le cisaillement se poursuit au-delà de la zone élastique, des déformations plastiques se produisent et la surface d'écoulement augmente. Pendant ce temps, le point 4 se déplace vers le point 5, situé sur une autre ligne de gonflement, qui correspond à la nouvelle surface d'écoulement qui passe par le point 5. Une charge supplémentaire entraîne une expansion de la surface d'écoulement et le point 5 se déplace vers le point 6, situé sur la ligne de l'état critique.

La procédure étape par étape suivante, adoptée de Desai et Siriwardane (1984), peut être programmée dans un tableur pour calculer le comportement contrainte-déformation. Une procédure similaire, utilisée par Budhu (2007), peut être utilisée pour les sols légèrement surconsolidés.

III.7 Procédure de calcul étape par étape pour un essai triaxial CD sur argiles NC.

Étape 1 :

Choisissez un chemin de contrainte pour une condition de chargement spécifique. Pour une argile normalement consolidée dans un essai triaxial consolidé-drainé, la trajectoire de contrainte effective (ESP) a une pente de 3 dans le plan p-q. Le chemin de contrainte commence à partir de $p = p_0 = \sigma_3$. Appliquons un petit incrément de contrainte effective moyenne p. Ensuite, faisons varier p de p_0 à p_f comme suit : $p = p_0, p_0 + \Delta p, p_0 + 2\Delta p, p_0 + 3\Delta p, \dots, p_f$, où p_f est la contrainte effective moyenne à la rupture. Le calcul présentée dans le tableau 3.1 est utilisée pour prédire le comportement triaxial consolidé-drainé d'une éprouvette d'argile normalement consolidée soumise à une pression de confinement $\sigma_3 = 206,7$ kPa. La colonne (1) du tableur est réservée à la variation de la contrainte moyenne effective de la contrainte moyenne effective. $p_0 = 206,7$ kPa et $\Delta p = 7,2$ kPa sont utilisés.

Puisque $q = 3p$ dans le chemin de contrainte effective d'un essai triaxial CD, q devrait varier comme suit : $q = 0, 3\Delta p', 6\Delta p', 9\Delta p', \dots, q_f$, où q_f est la contrainte de cisaillement à la rupture ($q_f = M \cdot p'_f$). Ceci est montré dans la colonne (2).

La contrainte effective moyenne à la rupture p_f et la contrainte de

cisaillement à la rupture q_f peuvent être calculées facilement si l'on se rend compte qu'elles se trouvent au point où le chemin de la contrainte effective coupe la ligne de l'état critique (Figure 3.20a). L'équation de la ligne d'état critique est $q_f = Mp'_f$, et l'équation du chemin de contrainte effective est $q_f = 3(p'_f - p'_0)$. En résolvant ces deux équations simultanément, on obtient :

$$p'_f = \frac{3p'_0}{3-M} \quad \text{and} \quad q_f = \frac{3Mp'_0}{3-M}$$

Dans le présent exemple, on utilise $M = 1$.

Étape 2 :

Calculer le rapport de contrainte $\eta = q/p$ pour chaque position [colonne (3)].

Étape 3 :

Calculer l'augmentation du rapport de contrainte $d\eta = \eta_i - \eta_{i-1}$, où i est la rangée actuelle et $i - 1$ est la rangée précédente [colonne (4)].

Étape 4 :

Calculer l'incrément de déformation volumétrique totale en utilisant (3.14) :

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{\lambda}{1+e} \left[\frac{dp'}{p'} + \left(1 - \frac{\kappa}{\lambda}\right) \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right]$$

Dans le présent exemple, on utilise $\kappa = 0,026$, $\lambda = 0,174$, et $e_0 = 0,889$.

Étape 5 :

Calculer la déformation volumétrique totale..

$$(\epsilon_v)_k = \sum_{i=1}^{i=k} (d\epsilon_v)_i$$

Où k est la ligne courante. Ceci est fait dans la colonne (6).

(1) p' (kPa)	(2) q (kPa)	(3) η	(4) $d\eta$	(5) $d\varepsilon_s$	(6) ε_s	(7) $d\varepsilon$	(8) e	(9) $d\varepsilon_i$	(10) ε_i	(11) ε_t
0	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.88900	0.0000	0.0000	0.0000
206.7	0.0	0.0000	0.0000	0.00322	0.00322	0.00609	0.88291	0.0000	0.0000	0.00107
213.9	21.7	0.10139	0.10139	0.00472	0.00794	0.00888	0.87403	0.00088	0.00088	0.00353
221.2	43.4	0.19615	0.09476	0.00583	0.01377	0.01093	0.86310	0.00224	0.00313	0.00772
228.4	65.1	0.28491	0.08876	0.00660	0.02038	0.01230	0.85079	0.00393	0.00706	0.01385
235.6	86.8	0.36822	0.08331	0.00708	0.02746	0.01311	0.83768	0.00588	0.01294	0.02209
242.9	108.5	0.44657	0.07835	0.00734	0.03480	0.01349	0.82420	0.00807	0.02101	0.03261
250.1	130.1	0.52039	0.07382	0.00742	0.04222	0.01354	0.81065	0.01056	0.03157	0.04564
257.3	151.8	0.59007	0.06967	0.00739	0.04961	0.01338	0.79727	0.01346	0.04503	0.06157
264.5	173.5	0.65593	0.06586	0.00727	0.05689	0.01307	0.78420	0.01701	0.06204	0.08100
271.8	195.2	0.71829	0.06236	0.00710	0.06399	0.01267	0.77153	0.02161	0.08365	0.10498
279.0	216.9	0.77742	0.05913	0.00690	0.07088	0.01221	0.75932	0.02806	0.11170	0.13533
286.2	238.6	0.83356	0.05614	0.00667	0.07755	0.01174	0.74758	0.03816	0.14986	0.17571
293.5	260.3	0.88694	0.05337	0.00644	0.08399	0.01125	0.73633	0.05091	0.20678	0.23477
300.7	282.0	0.93774	0.05081	0.00620	0.09019	0.01077	0.72557	0.06568	0.31246	0.34252
307.9	303.7	0.98617	0.04842	0.00597	0.09616	0.01030	0.71527	0.08718	0.89964	0.93169

Tableau2.1

Étape 6 :

Calculez la variation du taux de vide : $d\varepsilon = (1 + e)d\varepsilon_v$ [colonne (7)], où e est le taux de vide au début de l'incrément actuel, pris dans la colonne (8).

Pour la première ligne, utilisez $e = e_0$. Dans l'exemple de calcul, nous avons utilisé $e_0=0,889$.

Dans la colonne (8), calculez la variation de l'indice de vide actualisé $e_i = e_{i-1} - d\varepsilon$, où i est la ligne actuelle et $i - 1$ est la ligne précédente.

Étape 7 :

Calculer l'incrément total de déformation de cisaillement en utilisant (3.15) :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_c^p \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \left(\frac{dp'}{p'} + \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right) \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2}$$

Étape 8 :

Calcul des déformations de cisaillement total:

$$(\varepsilon_s)_k = \sum_{i=1}^{i=k} (d\varepsilon_s)_i$$

Où k est la ligne en cours. Ceci est fait dans la colonne (10).

Étape 9 :

Calculer la déformation axiale totale : $\varepsilon_1 = \varepsilon_v/3 + \varepsilon_c$ [colonne (11)].

Le comportement de la contrainte déviatrice en fonction de la déformation axiale prédite pour le sol peut être tracé en utilisant les données des colonnes (2) et (11). De même, la déformation volumétrique en fonction de la déformation axiale peut être tracée en utilisant les données des colonnes (6) et (11). La figure 2.21 montre le comportement prévu pour cette argile normalement consolidée lorsqu'elle est testée en compression triaxiale consolidée-drainée. Compression triaxiale consolidée-drainée avec une pression de confinement de 206,7 kPa. La figure montre également le comportement prédit pour le même sol lorsqu'il est soumis à des pressions de confinement de 68,9 et 137,8 kPa.

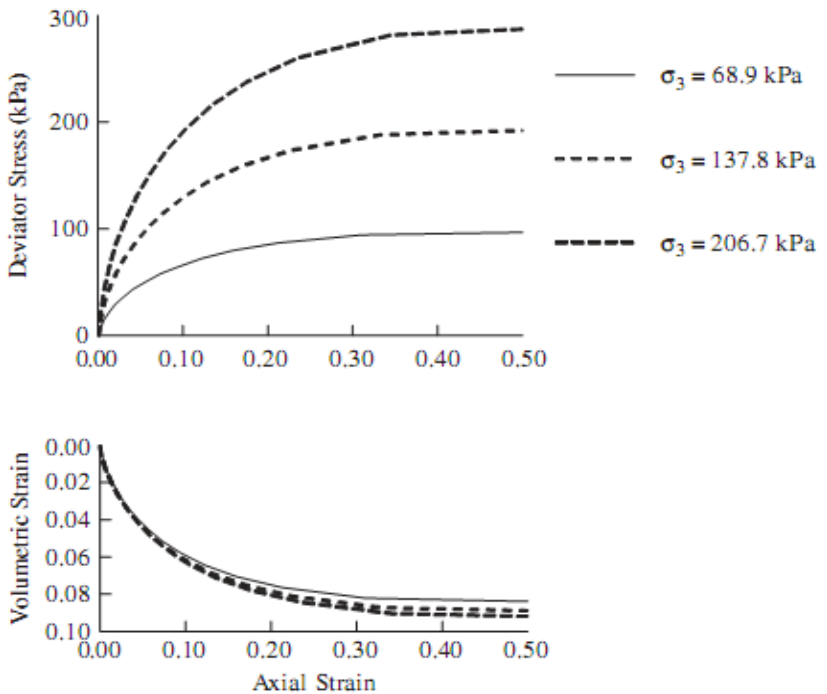


Figure 3.5 Prédiction du comportement triaxial CD de l'argile NC à l'aide d'un modèle Cam Clay.

III.8 Calculs du comportement en contrainte-déformation consolidé et non drainé d'une argile normalement consolidée à l'aide du modèle modifié de Cam Clay.

La figure 3.6a illustre le comportement d'une éprouvette de sol légèrement surconsolidée dans un essai CU. Initialement, l'état de contrainte de l'éprouvette est situé sur la NCL comme indiqué par

le point 1 dans la Figure 3.22b. L'éprouvette est soumise à une pression de confinement périphérique (consolidation isotrope) qui amène l'état de contrainte au point 2, qui correspond à la pression de préconsolidation p_c comme indiqué sur la Figure 3.6 L'éprouvette est ensuite déchargée au point 3, qui correspond à la pression actuelle p_0 .

Nous pouvons maintenant commencer à cisailier l'échantillon dans des conditions non drainée en empêchant l'eau de quitter l'échantillon. Cela signifie qu'il n'y aura pas de changement de volume.

La trajectoire de la contrainte totale pendant le cisaillement non drainé est une ligne droite, avec une pente = 3, émanant du point 3. Ainsi, l'équation de la trajectoire de la contrainte totale est donnée comme suit :

$$q = 3(p - p'_0) \quad 3.17$$

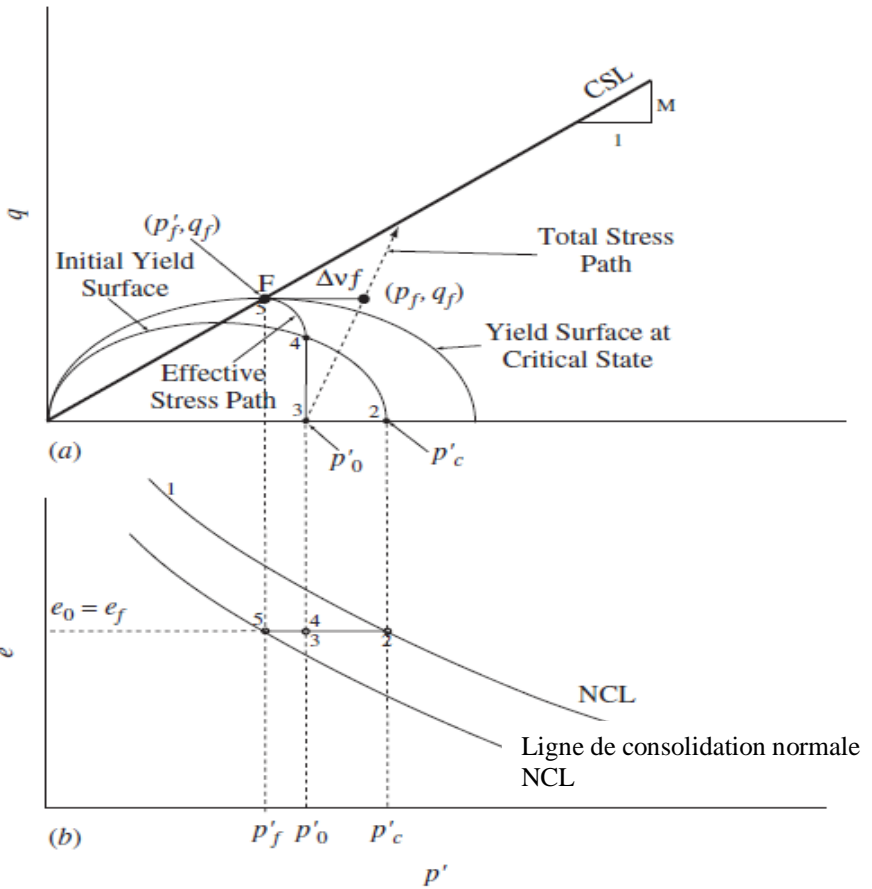


Figure 3.6 Comportement d'un essai triaxial non drainé consolidé d'une argile légèrement surconsolidée.

La trajectoire de la contrainte effective pendant un cisaillement non drainé est une ligne verticale (ligne 3-4 sur la figure 3.6a) dans la région élastique à l'intérieur de la surface d'élasticité initiale. Si la ligne n'était pas verticale, il y aurait des déformations volumétriques résultant de changements dans la contrainte effective moyenne, ce qui n'est pas admissible dans une condition non drainée. Au point 4, le sol commence à céder. La trajectoire de la contrainte effective tourne vers la gauche en direction de la ligne d'état critique. Pendant ce temps, la surface d'écoulement augmente (durcissement) jusqu'à ce que le chemin de contrainte effective touche la ligne d'état critique au point 5, où la rupture se produit. Notez comment les points 2, 3, 4 et 5 se déplacent le long d'une ligne horizontale, de droite à gauche, dans le plan (e - p'), comme le montre la figure 3.6b. Si la ligne 2-5 n'était pas horizontale dans le

plan (e-p'), il y aurait une modification du taux de vide, ce qui n'est pas admissible dans cette condition non drainée.

Le point 5 de la figure 3.6 décrit l'état de contrainte à la rupture. En référence à la figure 3.6b, le point 5 a un indice de vide e_f (sur la ligne d'état critique) qui est identique à l'indice de vide initial e_0 au point 3. L'équation de la ligne d'état critique, (3.21), dans le plan e-ln p', est donnée comme suit :

$$e_f = e_\Gamma - \lambda \ln p'$$

Au point 5, cette équation devient :

$$e_f = e_0 = e_\Gamma - \lambda \ln p'_f$$

En réarrangeant cette équation, on obtient :

$$p'_f = \exp\left(\frac{e_\Gamma - e_0}{\lambda}\right) \quad 3.18$$

Où p'_f est la contrainte effective moyenne à la rupture. Mais :

$$q_f = Mp'_f$$

Par conséquent,

$$q_f = M \exp\left(\frac{e_\Gamma - e_0}{\lambda}\right) \quad 3.19$$

Où q_f est la contrainte de cisaillement à la rupture. Dans la figure 2.6a, la distance horizontale entre la courbe de contrainte totale et la courbe de contrainte effective est la surpression d'eau interstitielle. À la rupture (point 5), nous pouvons écrire :

$$\Delta u_f = p_f - p'_f$$

En appliquant (3.7), l'équation du chemin de contrainte totale, aux conditions de contrainte à la rupture (c'est-à-dire à $p = p_f$ et $q = q_f$), on obtient :

$$q_f = 3(p_f - p'_0)$$

Or

$$p_f = p'_0 + \frac{q_f}{3} = p'_0 + \frac{Mp'_f}{3}$$

Mais

$$\Delta u_f = p_f - p'_f = p_0 + \frac{M}{3}p'_f - p'_f = p_0 + \left(\frac{M}{3} - 1\right)p'_f$$

En substituant (3.18) dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\Delta u_f = p_0 + \left(\frac{M}{3} - 1 \right) \exp \left(\frac{e_\Gamma - e_0}{\lambda} \right) \quad 3.20$$

En utilisant (3.12) à (3.13), nous prédisons le comportement contrainte-déformation d'une argile normalement consolidée (NC) dans un essai triaxial CU. Ces équations sont données sous une forme incrémentale. Ainsi, des incréments de contrainte seront appliqués conformément au chemin de contrainte effective CU, et les incréments de déformation résultants seront calculés. Les incréments de déformation sont ensuite additionnés pour calculer la déformation totale.

La procédure étape par étape suivante, adoptée de Budhu (2007), peut être programmée dans un tableau pour calculer le comportement contrainte-déformation. Il est à noter que la procédure de Budhu peut être utilisée pour le cas plus général d'un sol légèrement surconsolidé.

3.8.2 Procédure de calcul pas à pas pour un essai triaxial CU sur des argiles NC

Étape 1 :

Calculer la contrainte effective moyenne à la rupture en utilisant (3.18) :

$$p'_f = \exp \left(\frac{e_\Gamma - e_0}{\lambda} \right)$$

Choisissez ensuite un petit incrément de contrainte effective moyenne, $\Delta p'$ de telle sorte que $\Delta p' = (p'_0 - p'_f / N)$ où N est un nombre entier. Dans l'exemple de calcul du tableau 2.2, nous avons utilisé N = 14. Vous pouvez utiliser une valeur plus grande de N pour une meilleure précision. Dans la première colonne, on calcule :

$p' = p'_0, p'_0 - \Delta p', p'_0 - 2\Delta p', p'_0 - 3\Delta p' \dots \dots p'_f$. La méthode est utilisée pour prédire le comportement triaxial consolidé et non drainé d'un échantillon d'argile normalement consolidé et soumis à une pression de confinement $\sigma'_3 = 206.7 \text{kPa}$ La colonne (1) montre la variation de la contrainte effective moyenne. La contrainte

effective moyenne initiale $p'_0 = 206.7kPa$ est utilisé tout au long avec $\Delta p' = 7kPa$.

Étape 2 :

Actualiser la surface de charge limite pour chaque incrément de charge. La figure 3.23 montre deux surfaces limites consécutives correspondant à deux points consécutifs (points 1 et 2) le long de la courbe de contrainte effective d'un essai triaxial CU.

Le point 1 correspond à une contrainte effective moyenne p'_1 situé sur la surface limite avec un axe principal $(p'_c)_1$ Le point 2 correspond à une contrainte effective moyenne p'_2 situé sur une surface limite avec un axe principal $(p'_c)_2$.

A l'aide de la figure 3.23, on peut montrer que :

$$(p'_c)_2 = (p'_c)_1 \left(\frac{p'_1}{p'_2} \right)^{\kappa/(\lambda-\kappa)}$$

Dans la colonne (2) du tableau 2.2, calculer la surface limite actualisée pour chaque incrément de charge en utilisant l'équation générale suivante :

$$(p'_c)_i = (p'_c)_{i-1} \left(\frac{p'_{i-1}}{p'_i} \right)^{\kappa/(\lambda-\kappa)}$$

où $(p'_c)_i$ est la pression de préconsolidation dans l'incrément actuel, $(p'_c)_{i-1}$ la pression de préconsolidation dans l'incrément précédent, p'_i la contrainte effective moyenne dans l'incrément actuel, et p'_{i-1} la contrainte effective moyenne dans l'incrément précédent. L'incrément précédent. Comme le sol est normalement consolidé, utiliser $p'_c = p'_0$ dans la première ligne.

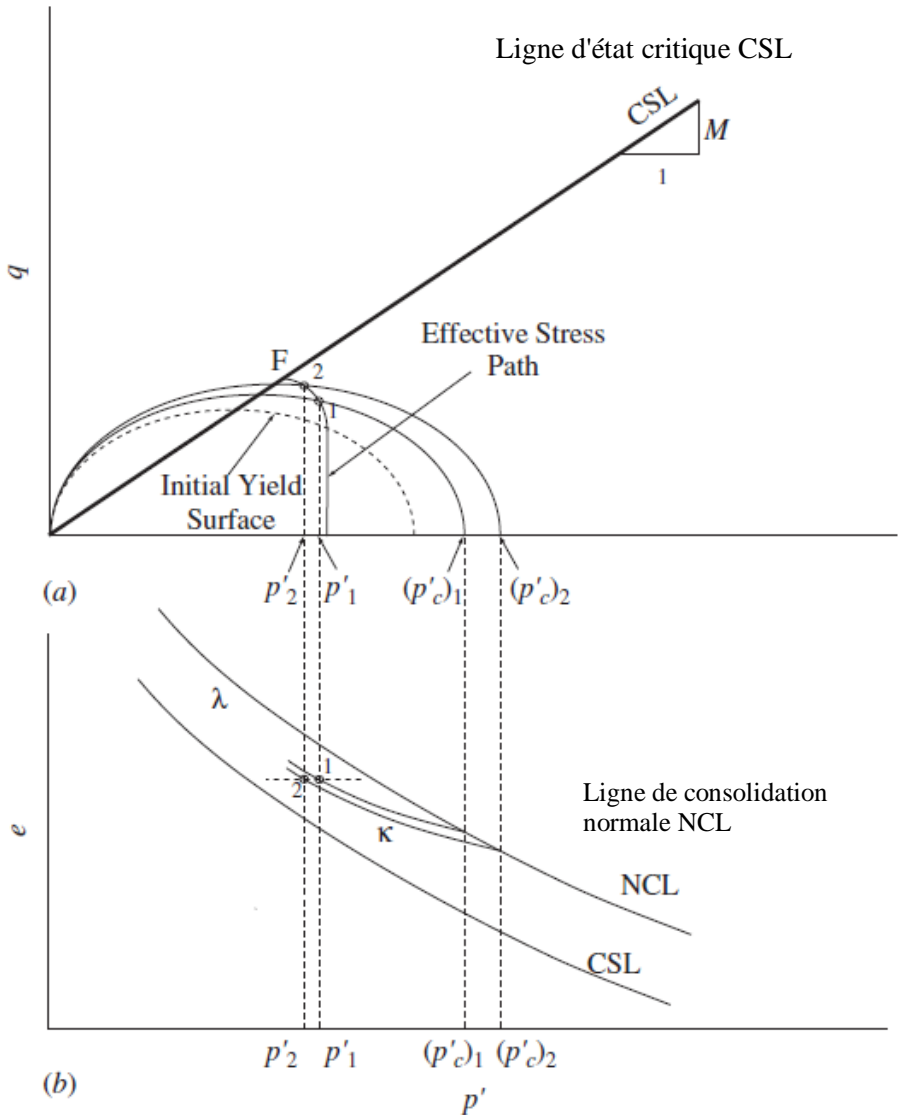


Figure 3.7 Évolution de la surface limite Cam Clay dans des conditions de contraintes triaxiales CU.

Étape 3 :

Dans la colonne (3), calculer q pour chaque incrément en utilisant

$$q = Mp' \sqrt{\frac{p'_c}{p'} - 1}$$

Cette équation est obtenue à partir de l'équation de la surface d'écoulement, Equation (3.1).

Étape 4 :

Calculer l'incrément de déformation volumétrique élastique en utilisant Equation Eq3.14: colonne 4

$$\varepsilon_v^e = \frac{\kappa}{1+e} \frac{dp'}{p'}$$

Notez que e dans cette équation est constant ($= e_0$) en raison de la condition non drainée.

Notez également dans le tableau 3.2 que les incréments de déformation volumétrique élastique calculés sont tous négatifs car le changement de la contrainte effective moyenne est négatif dans des conditions triaxiales non drainées.

Étape 5 :

Calculer l'incrément de déformation volumétrique plastique colonne 5:

$$\varepsilon_v^p = \frac{-\kappa}{1+e} \frac{dp'}{p'}$$

Là encore, cela est dû à l'état non drainé (pas de changement de volume), dans lequel :

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^p = 0 \rightarrow \varepsilon_v^e = -\varepsilon_v^p$$

Étape 6 :

Calculer l'incrément de déformation plastique de cisaillement en utilisant (3.16) colonne 6.

$$\dot{\varepsilon}_c = \dot{\varepsilon}_c^p = \varepsilon_v^p \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2}$$

Étape 7 :

Calculer l'incrément de déformation élastique de cisaillement en utilisant

$$\dot{\varepsilon}_c^e = \frac{\Delta q}{3G} (\text{colonne7})$$

Où G est le module de cisaillement.

Dans le présent exemple, on utilise $e_0 = 0,889$, $\kappa = 0,026$, et $\nu = 0$.

Étape 8 :

Calculer l'incrément de déformation de cisaillement en utilisant :

$$\dot{\varepsilon}_c = \dot{\varepsilon}_c^e + \dot{\varepsilon}_c^p (\text{colonne8})$$

Étape 9 :

Calcul de la déformation totale en cisaillement :

$$(\dot{\varepsilon}_c)_k = \sum_{i=1}^{i=k} (\dot{\varepsilon}_c)_i$$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
p' (kPa)	p'_c (kPa)	q (kPa)	de'_q	$de'_{\sigma'}$	$de'_{\sigma'}$	$de'_{\sigma'}$	$d\varepsilon_3$	$\varepsilon_3 = \Sigma d\varepsilon_3$	ε_1	p (kPa)	Δu (kPa)
206.70	206.70	0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	206.70	0.00
199.70	207.95	40.47	-0.00047	0.00047	0.00020	0.00195	0.00215	0.00215	0.00215	220.19	20.49
192.70	209.26	56.31	-0.00049	0.00049	0.00032	0.00076	0.00108	0.00323	0.00323	225.47	32.77
185.70	210.63	67.81	-0.00051	0.00051	0.00043	0.00055	0.00099	0.00421	0.00421	229.30	43.60
178.70	212.05	76.95	-0.00053	0.00053	0.00056	0.00044	0.00100	0.00521	0.00521	232.35	53.65
171.70	213.55	84.49	-0.00055	0.00055	0.00072	0.00036	0.00108	0.00630	0.00630	234.86	63.16
164.70	215.11	90.82	-0.00057	0.00057	0.00092	0.00030	0.00122	0.00752	0.00752	236.97	72.27
157.70	216.76	96.19	-0.00060	0.00060	0.00117	0.00026	0.00143	0.00895	0.00895	238.76	81.06
150.70	218.50	100.75	-0.00062	0.00062	0.00153	0.00022	0.00175	0.01070	0.01070	240.28	89.58
143.70	220.33	104.59	-0.00065	0.00065	0.00206	0.00018	0.00224	0.01294	0.01294	241.56	97.86
136.70	222.27	107.80	-0.00069	0.00069	0.00292	0.00015	0.00307	0.01601	0.01601	242.63	105.93
129.70	224.34	110.42	-0.00072	0.00072	0.00459	0.00013	0.00471	0.02072	0.02072	243.51	113.81
122.70	226.53	112.50	-0.00076	0.00076	0.00917	0.00010	0.00927	0.02999	0.02999	244.20	121.50
115.70	228.88	114.06	-0.00081	0.00081	0.07374	0.00007	0.07381	0.10380	0.10380	244.72	129.02

Étape 10 :

Calculer la déformation axiale ε_1 [colonne (10)]. Dans des conditions non drainées, nous avons :

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3 = 0 \rightarrow \varepsilon_1 = -2\varepsilon_3$$

Mais

$$\varepsilon_c = 2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) / 3$$

Par conséquent, $\varepsilon_1 = \varepsilon_c$.

Etape 11 :

Calculer la contrainte moyenne totale actuelle en utilisant l'équation du chemin de contrainte totale,

$$q = 3(p - p'_0) \longrightarrow p = p'_0 + q/3 \quad (\text{colonne 11})$$

Etape 12 :

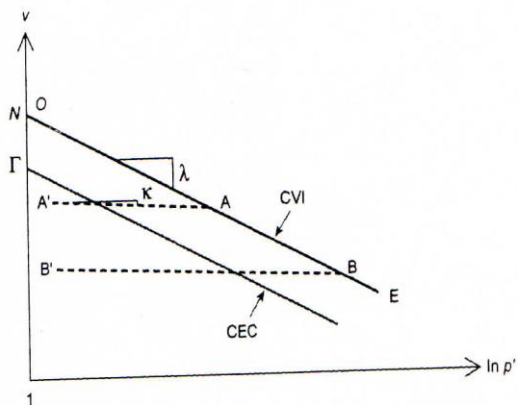
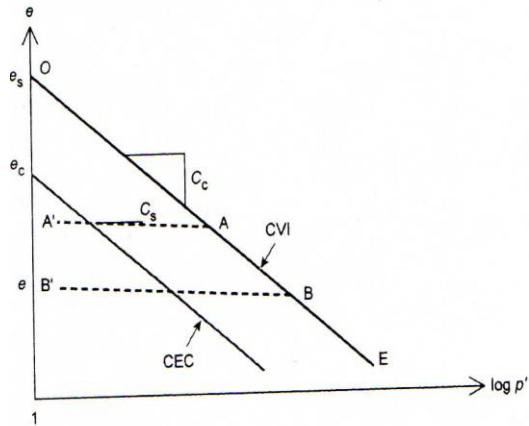
Calculer l'augmentation de la pression d'eau interstitielle :

$$\Delta u = p - p' \quad (\text{colonne 12}).$$

III.8 Application

Le comportement d'une argile normalement consolidée sous une 400 MPa est décrit par la loi de Cam Clay modifiée avec les paramètres suivants

$$\lambda=0.27, k=0.02, \Gamma =2.95, N=3.2, M=0.95, G=6\text{MPa}$$



Courbe de compression isotrope vierge
 et état critique

L'échantillon est soumis ensuite en condition drainée à un
 incrément de contraintes :

$$d\sigma_3 = 1 \text{ kPa}, d\sigma_1 = 4 \text{ kPa}.$$

Solution :

Partant du point que $p' = p'_0 = 400 \text{ kPa}$ $q = 0$

On vérifie d'abord si c'est un chargement ou un déchargement
 avec l'équation Eq3.1

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial p'} dp' + \frac{\partial f}{\partial q} dq = M^2(2p' - p'_0) dp' + 2q dq \\ &= M^2(2.400 - 400).2 + 0 > 0 \end{aligned}$$

Avec

$$dp' = \frac{1}{3}(d\sigma'_1 + 2d\sigma'_3) = 2 \text{ kPa}$$

Et

$$dq = (d\sigma_1 - d\sigma_3) = 3kPa$$

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{1}{1+e} \left[\frac{dp'}{p'} + \left(1 - \frac{\kappa}{\lambda}\right) \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right]$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_c^p = \frac{\lambda - \kappa}{1+e} \left(\frac{dp'}{p'} + \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right) \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2}$$

N=e=3.2, $\lambda=0.27$, $\kappa=0.02$, $M=0.95$, $p'=400kPa$, $dp'=2kPa$,
 $dq=3kPa$, $\eta=p'/q$, $d\eta=dp/dq$

Application numérique :

$$\dot{\varepsilon}_v = 790.10^{-6}$$

$$\varepsilon_c^p = 0$$