Chapitre 1. Intégrales simples et multiples

1.1.Intégrale de Riemann

1.1.1) intégrale d'une fonction en escalier

Soit : $f(x) = e^x$, définie de $[0,1] \to \mathbb{R}$

Calculer l'aire $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)dx$?

Subdivision l'intervalle [0, 1] en n sous intervalles$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ pour tout $i \epsilon \{1,2, \dots \dots \dots, n\}$, on considère :

***les rectangles inférieurs** : de base$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ et de hauteur $f\left(\frac{i-1}{n}\right) = e^{\frac{i-1}{n}}$

Surfaces de chaque rectangle $= \frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}}$.

$$\mathcal{A} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}} = e - 1$$

***les rectangles supérieurs** : de base$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ et de hauteur $f\left(\frac{i}{n}\right) = e^{\frac{i}{n}}$

Surfaces de chaque rectangle $= \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} e^{\frac{i}{n}}$.

$$\mathcal{A} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} e^{\frac{i}{n}} = e - 1$$

On remplace les rectangles par des fonctions en escalier :

-si la limite des aires correspondant à la fonction en escalier en dessous de la courbe de la fonction égale la limite des aires correspondant à la fonction en escalier en dessus de la courbe dite, alors la fonction f est intégrable au sens de Riemann et cette limite est $\int_a^b f(x)dx$

1.1.2) Notion de fonction intégrable

Les fonctions continues sont intégrables

Définition :S est une subdivision de [a, b]

$S=(x_0,x_1,x_2, \dots\dots\dots, x_n)$ telle que : $a=x_0<x_1<x_2, \dots\dots\dots<, x_n=b$

f est définie de $[a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $(x_0,x_1,x_2, \dots\dots\dots, x_n)$ et des réels $c_1,c_2, \dots\dots\dots, c_n$ telle que pour tout $i \epsilon \{1,2, \dots \dots \dots, n\}$, on ait : $\forall\ x \epsilon\ ]x_{i-1}, x_i[,\ f(x_i) = c_i$

Autrement dit : l'intégrale d'une fonction en escalier :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\bowtie} \sum_{i=1}^{n} c_i\,(x_i - x_{i-1})$$

- f est définie de $[a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que:
$$\forall x \epsilon [a,b] \quad -M \leq f(x) \leq M$$

$* \; f \leq g \iff \forall x\epsilon[a,b] \quad f(x) \leq g(x)$

$* \; I^-(f) = \sup\left\{\int_a^b \phi(x)dx \quad ; \phi \text{ en escalier et } \phi \leq f\right\}$

$* \; I^+(f) = \inf\left\{\int_a^b \phi(x)dx \quad ; \phi \text{ en escalier et } \phi \geq f\right\}$

Proposition : $I^-(f) \leq I^+(f)$

a) Définition : une fonction bornée f : $[a,b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann si $I^-(f) = I^+(f)$, ce nombre s'appelle alors l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]= \int_a^b f(x)dx$.

Exemples :

Soit : $f(x) = x^2$, définie de $[0,1] \to \mathbb{R}$

Est elle intégrable ? que vaut $\int_0^1 f(x)dx$?

Subdivision régulière de $[0,1]$ suivante :

S=(0, 1/n, 2/n, ,i/n, , (n-1)/n , 1)

Sur [(i-1)/n, i/n] , on a $\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \leq x^2 \leq (\frac{i}{n})^2$

Fonction en escalier ϕ^- :définie par

$$\phi^-(x) = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \; si \; x\epsilon \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$$

Fonction en escalier ϕ^+ , définie par :

$$\phi^+(x) = \left(\frac{i}{n}\right)^2 \; si \; x\epsilon \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$$

$\phi^- \leq f \leq \phi^+$

$$\int_0^1 \phi^+(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^n}{n^2}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\int_0^1 \phi^+(x)dx = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$\int_0^1 \phi^-(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^2}(\frac{1}{n}) = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \int_0^1 \phi^-(x)dx < I^-(f) \leq I^+(f) = \int_0^1 \phi^+(x)dx = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$n \to \infty \Longrightarrow I^-(f) = \ I^+(f) = 1/3$

f intégrable et $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$

b) Proposition:

*1. Si f est définie de $[a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et si l'on change les valeurs de f en un nombre fini de points [a, b] , alors la fonction f est toujours intégrable et la valeur de $\int_a^b f(x)dx$ ne change pas

*2. Si f est définie de $[a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors la restriction de f à tout intervalle [à, b'] de $[a, b]$est encoreintégrable.

c)Théorème1 : si f : $[a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est intégrable.

f : $[a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision S=(x_0,x_1,x_2, ………, x_n) tel que : $f_{]xi-1, xi[}$ soit continue pour tout i$\epsilon\{1,2, \dots \dots \dots, n\}$.

d)Corollaire : les fonctions continues par morceaux sont intégrables.

Définition : f est de classe C^1 si f est continue, dérivable et f' continue

e) Théorème2 : si f : $[a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, alors f est intégrable

Démonstration :

* f : $[a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 ; il existe $M \geq 0$, tel que pour tout x$\epsilon[a, b]$ on ait $|f'(x)| \leq M$

Inégalité des accroissements finis : $\forall x, y \in [a, b] \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

Fixons ε> 0 et une subdivision S=(x_0,x_1,x_2, ………, x_n) telle que :$0<x_i-x_{i-1}\leq \varepsilon$

**on définie la fonction en escalier ϕ^-tel que :

Pour x ϵ [x_{i-1}, x_i[on a $c_i = \phi^-(x) = \inf_{t \in [xi-1,xi[} f(t)$

**on définie la fonction en escalier ϕ^+tel que :

Pour x $\in$ [x_{i-1}, x_i[on a $d_i = \phi^+(x) = \sup_{t\in]xi-1,xi]} f(t)$

$\phi^- \leq f \leq \phi^+$

$$\int_a^b \phi^-(x)dx \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \int_a^b \phi^+(x)dx$$

f est continue sur l'intervalle [x_{i-1}, x_i] , donc il existe a_i,b_i $\in$ [x_{i-1}, x_i] tel que f(a_i)=c_i et f(b_i)=d_i

$d_i - c_i = f(bi) - f(ai) \leq M(b_i - a_i) \leq M(x_i - x_{i-1}) \leq M\varepsilon$

$$\int_a^b \phi^+(x)dx - \int_a^b \phi^-(x)dx = \sum_{i=1}^n d_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M\varepsilon(x_i - x_{i-1})$$
$$\leq M\varepsilon(b-a)$$

$0 \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq M\varepsilon(b-a)$

$\varepsilon \to \infty \Longrightarrow I^-(f) = I^+(f) \Longrightarrow$ **f est intégrable**

1.2. intégrales impropres

1.2.1. Introduction :

Soit f est continue de [a, + ∞[dans ℝ

$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(t)dt$ existe-t-elle ? est elle finie ?

Intuition : si f tend assez vite vers 0 en +∞ , alors : $\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(t)dt$ existe et est finie.

Exemple 1 : Soient f(t)= 1/t^α et A>0 ; α∈ ℝ .On calcule : $\lim_{A\to\infty} \int_1^A f(t)dt =$

$$\begin{cases} \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} & \text{si} \quad \alpha < 1 \quad \to +\infty \\ \ln(A) & \text{si} \quad \alpha = 1 \quad \to +\infty \\ \frac{1}{A^{1-\alpha}(1-\alpha)} - \frac{1}{1-\alpha} & \text{si} \quad \alpha > 1 \quad \to \frac{1}{1-\alpha} \end{cases}$$

Exemple 2 : Soit f (t) $= \frac{\sin t}{|t|^{3/2}}$ est définie sur]- ∞, 0[∪]0, +∞[dans ℝ

Points incertains pour ce cas sont : -∞,+∞et 0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)dt$$

On a quatre types d'intervalles :]- ∞, a],]a, b] ;[a, b[; ou [a, +∞ [

1.2.2. Définition : une fonction continue sur [a, +∞ [; $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie.

Si c'est le cas on pose : $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt$

- * f est continue sur]a, b] → $\int_a^b f(t)dt$ converge si $\lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)dt$ existe et est finie

  Si c'est le cas, on pose : $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)dt$
- Lorsque l'intégrale ne converge pas, on dit quelle diverge.

1.2.3. Proposition : Relation de Chasles

Soit f : $[a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et soit a' $\epsilon[a, +\infty[$. Alors les intégrales impropres $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_{a'}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature. Si elles convergent, alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt + \int_{a'}^{+\infty} f(t)dt$$

1.2.4. Linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \int_a^{+\infty} \lambda f(t)dt + \int_a^{+\infty} \mu g(t)dt$$

Positivité de l'intégrale :

Si f ≤ g, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt$

1.2.5. Rappel : (Critère de Cauchy pour les limites de fonction)

Soit f : $[a, +\infty[\to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty}(f(x))$ existe et finie si et seulement si :

$\forall \mathcal{E} > 0;\ \exists M \geq a \quad u, v \geq M \Longrightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$

1.2.6. Théorème : (Critère de Cauchy)

Soit f : $[a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue. L'intégrale impropres $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si :

$\forall \mathcal{E} > 0;\ \exists M \geq a \quad u, v \geq M \Longrightarrow \left|\int_u^v f(t)dt\right| < \varepsilon$

Démonstration : Critère de Cauchy pour F(x)= $\int_a^x f(t)dt$; F(u)-F(v)= $\left|\int_u^v f(t)dt\right|$