Partie B : Probabilités

Chapitre B1 : Analyse combinatoire

1. Introduction

L'**analyse combinatoire**, appelée aussi **combinatoire**, a été découverte dans l'Antiquité et depuis a été développée par des mathématiciens successifs. Elle consiste en l'étude de combinaisons d'éléments d'ensembles finis ou d'objets. (Source : http://www.linternaute.fr/expression/langue-francaise/14951/analyse-combinatoire/)

Le domaine mathématique de la combinatoire a été étudié à des degrés divers dans de nombreuses sociétés anciennes. Son étude en Europe remonte aux travaux de Leonardo Fibonacci au 13ème siècle après JC, qui a introduit les idées arabes et indiennes sur le continent. (Source : https://fr.qaz.wiki/wiki/History_of_combinatorics)

Il s'agit de l'ensemble des techniques qui servent, en mathématiques, à dénombrer* certaines structures finies, ou à les énumérer**, enfin à démontrer leur existence pour certaines valeurs des paramètres dont elles dépendent. Ces structures sont très variées ; leur seul trait commun c'est d'être finies. En revanche, les problèmes qu'on se pose sur ces structures sont très divers, et les techniques mathématiques qu'on utilise pour résoudre ces problèmes, très différentes.
Dans les opérations élémentaires de dénombrement, on utilise un langage très proche du réel. On parle de choisir un objet de m façons différentes, on dit qu'il n'y a qu'un nombre n de possibilités. (Source : https://www.universalis.fr/encyclopedie/analyse-combinatoire/)

Dans ce chapitre, on présente des méthodes pratiques de dénombrement, il s'agit de calculer le nombre d'éléments de certains ensembles finis. Ces méthodes nécessitent la définition de manière théorique des notions d'ensemble fini et de son cardinal***, ainsi que celles des relations et applications. Elles sont d'une grande utilité dans certaines parties de la théorie des probabilités !

2. Arrangements

2.1. Arrangements avec répétition

2.1.1. Définition d'un arrangement avec répétition

Soit E un ensemble fini non vide (card $E \neq 0$) et soit p un entier naturel non nul ($p \neq 0$).
On appelle arrangement de p éléments de E avec répétition toute application de $K = \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ dans E.

$$K = \{1, 2, 3, \ldots, p\} \longrightarrow E$$

Un arrangement avec répétition est une application d'un ensemble fini dans un ensemble fini et vice versa.

(Source : J. Harari & D. Personnaz. Cours de mathématiques 1. Algèbre – BELIN. DIA)

---

* à compter.
** établir des listes exhaustives de structures considérées.
*** nombre d'éléments d'un ensemble fini.

2.1.2. Nombre des arrangements avec répétition

Soit K un ensemble fini de cardinal p et soit E un ensemble fini de cardinal n.
L'ensemble $\mathscr{A}$ (K, E) des applications de K dans E est fini et son cardinal est égal à $\mathbf{n^p}$.

Autrement dit, le **nombre des arrangements avec répétition** = $\mathbf{n^p}$.

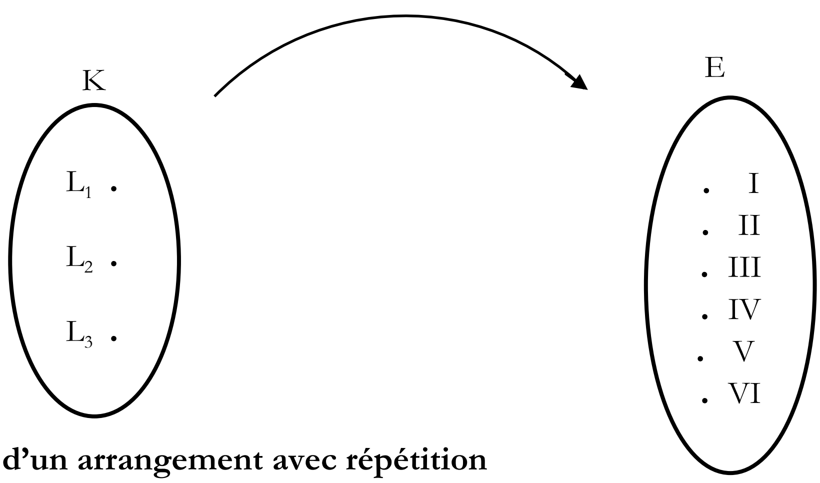
<u>Exemple 1</u> : (<u>Source</u> : J. Harari & D. Personnaz. Cours de mathématiques 1. Algèbre – BELIN. DIA)

On dispose de 6 cages numérotées de I à VI, chacune sans limite de capacité. Trois lions discernables s'y précipitent. De combien de façons peuvent-ils occuper les cages ?

On note par L_1, L_2, L_3 les trois lions.
Le résultat d'une occupation des cages est défini par une application f donc arrangement avec répétition :

f : K = {L_1, L_2, L_3} (card K = p = 3) → E = {I, II, III, IV, V, VI} (card E = n = 6)

Le nombre de possibilités d'occupation des cages est égale à $\mathbf{6^3 = 216}$



2.1.3. Autre définition d'un arrangement avec répétition

Un arrangement de p éléments avec répétition est un p-uplet dont les composantes sont prises d'un ensemble fini E de n éléments (nombre des composantes = p et card E = n).

<u>Exemple 2</u> :

Soit l'ensemble E tel que : E = {1, 9, ♠, ♪}.
On veut former des 3-uplets c'est-à-dire des triplets (x, y, z) à partir de l'ensemble E, c'est-à-dire les composantes x, y et z sont des éléments de l'ensemble E.

Puisque un triplet contient trois composantes alors, dans cet exemple : p = 3
On remarque que l'ensemble E est fini et il contient cinq éléments (card E = 4) et par conséquent : n = 4.

Alors :

Chaque triplet est un arrangement avec répétition de 3 éléments pris d'un ensemble fini de 4 éléments. Tous les triplets possibles peuvent être formés en construisant l'arbre de dénombrement ci-dessous (Pages 3 et 4).

Le nombre total de ces arrangements avec répétition que l'on puisse former ainsi n'est que le nombre possible de ces triplets. C'est-à-dire :

Nombre des arrangements avec répétition de 3 éléments pris d'un ensemble fini de 4 éléments **=** Nombre des triplets possibles formés à partir d'un ensemble fini de 4 éléments **=** $\mathbf{n^p = 4^3 = 64}$.

Arbre de dénombrement de l'exemple 2

1	1	1	(1, 1, 1)
		9	(1, 1, 9)
		♠	(1, 1, ♠)
		♪	(1, 1, ♪)
	9	1	(1, 9, 1)
		9	(1, 9, 9)
		♠	(1, 9, ♠)
		♪	(1, 9, ♪)
	♠	1	(1, ♠, 1)
		9	(1, ♠, 9)
		♠	(1, ♠, ♠)
		♪	(1, ♠, ♪)
	♪	1	(1, ♪, 1)
		9	(1, ♪, 9)
		♠	(1, ♪, ♠)
		♪	(1, ♪, ♪)
9	1	1	(9, 1, 1)
		9	(9, 1, 9)
		♠	(9, 1, ♠)
		♪	(9, 1, ♪)
	9	1	(9, 9, 1)
		9	(9, 9, 9)
		♠	(9, 9, ♠)
		♪	(9, 9, ♪)
	♠	1	(9, ♠, 1)
		9	(9, ♠, 9)
		♠	(9, ♠, ♠)
		♪	(9, ♠, ♪)
	♪	1	(9, ♪, 1)
		9	(9, ♪, 9)
		♠	(9, ♪, ♠)
		♪	(9, ♪, ♪)
♠	1	1	(♠, 1, 1)
		9	(♠, 1, 9)
		♠	(♠, 1, ♠)
		♪	(♠, 1, ♪)
	9	1	(♠, 9, 1)
		9	(♠, 9, 9)
		♠	(♠, 9, ♠)
		♪	(♠, 9, ♪)
	♠	1	(♠, ♠, 1)
		9	(♠,♠, 9)
		♠	(♠, ♠, ♠)
		♪	(♠,♠, ♪)
	♪	1	(♠, ♪, 1)
		9	(♠, ♪, 9)
		♠	(♠, ♪, ♠)
		♪	(♠, ♪, ♪)

♪	1	1	(♪, 1, 1)
		9	(♪, 1, 9)
		♠	(♪, 1, ♠)
		♪	(♪, 1, ♪)
	9	1	(♪, 9, 1)
		9	(♪, 9, 9)
		♠	(♪, 9, ♠)
		♪	(♪, 9, ♪)
	♠	1	(♪, ♠, 1)
		9	(♪, ♠, 9)
		♠	(♪, ♠, ♠)
		♪	(♪, ♠, ♪)
	♪	1	(♪, ♪, 1)
		9	(♪, ♪, 9)
		♠	(♪, ♪, ♠)
		♪	(♪, ♪, ♪)

Remarques importantes :

- La finalité de tout problème d'analyse combinatoire est de trouver un nombre qui est le centre d'intérêt de l'étude. En effet, le but réel de l'exemple 2 n'était pas de trouver tous les triplets possibles et de les écrire mais, plutôt de trouver leur nombre ; d'où dénombrement !
- Dans un p-uplet, l'ordre de ses composantes est important, en effet dans l'exemple 2 par exemple, les triplets (♪, 1, 9) ; (♪, 9, 1) ; (1, ♪, 9) ; (1, 9, ♪) ; (9, ♪, 1) et (9, 1, ♪) sont différents malgré qu'ils soient formés des mêmes composantes !
- Dans un p-uplet, une composante peut figurer plus d'une fois, comme par exemple dans le cas des deux triplets (♠, 9, ♠) et (♠, ♠, ♠) où la composante ♠ a été prise 2 et 3 fois, respectivement !

<u>Alors, pour un arrangement avec répétition</u> :

(i) Il faut prendre en considération l'ordre car il est important.

(ii) La répétition est possible.

2.2. Arrangements sans répétition

2.2.1. Définition d'un arrangement sans répétition

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

On appelle arrangement de p élément de E sans répétition, toute application injective de l'ensemble K = {1, 2, 3, …, p} dans E. On note par $\mathbf{A_n^p}$ le nombre de ces arrangements.

2.2.2. Nombre des arrangements sans répétition

Soit K un ensemble fini de cardinal p et soit E un ensemble fini de cardinal n.

L'ensemble $\mathcal{I}$(K, E) des injections de K dans E est fini et on a :

(i) Si (p > n) alors (card $\mathcal{I}$(K, E) = 0).

(ii) Si (0 < p ≤ n) alors [card $\mathcal{I}$(K, E) = n(n-1)(n-2) … (n-p+1)].

Donc : $A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$

On peut remarquer facilement que ce produit comporte p facteurs.

2.2.3. Autre définition d'un arrangement sans répétition

Un arrangement de p éléments sans répétition est un p-uplet dont les composantes sont prises d'un ensemble fini E de n éléments (nombre des composantes = p et card E = n) et qui sont différentes deux à deux.

Exemple 3 :

On va reprendre l'exemple 2 mais, cette fois-ci, on va former des triplets (x, y, z) à partir de l'ensemble E avec la condition x, y et z sont différents deux à deux (x ≠ y ; x ≠ z et y ≠ z).

Alors :

Chaque triplet est un arrangement sans répétition de 3 éléments pris d'un ensemble fini de 4 éléments.

Tous les triplets possibles peuvent être obtenus en construisant l'arbre de dénombrement qui n'est, en réalité, que celui de l'exemple 2 mais sans les triplets qui ne vérifient pas la condition de la définition (ci-haut), ces triplets doivent être supprimés !

Dans l'arbre de dénombrement de l'exemple 2, les triplés à supprimer sont mis en jaune.

Le nombre total de ces arrangements sans répétition que l'on puisse former ainsi n'est que le nombre possible de ces triplets. C'est-à-dire :

Nombre des arrangements sans répétition de 3 éléments pris d'un ensemble fini de 4 éléments =
Nombre des triplets possibles formés à partir d'un ensemble fini de 4 éléments = $\mathbf{A_4^3} = 4\times3\times2 = 24$.

Alors, pour un arrangement sans répétition :

(iii) Il faut prendre en considération l'ordre car il est important.

(iv) La répétition n'est pas possible car elle n'est pas permise.

(Source : J. Harari & D. Personnaz. Cours de mathématiques 1. Algèbre – BELIN. DIA)

3. Permutations

3.1. Définition d'une permutation

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n (n ≠ 0).
On appelle permutation de l'ensemble E toute bijection de E sur E.

3.2. Nombre des permutations

L'ensemble B (E, E) des bijections de E sur E est fini et son cardinal est égal à :

$$\mathbf{n\times(n-1)\times(n-2)\dots\times2\times1.}$$

On note ce nombre par **n !** (factorielle n).

On étend à IN le domaine de l'application factorielle en posant : **0 ! = 1**

3.3. Autre définition d'une permutation

Une permutation de E est un arrangement sans répétition dans le cas où n = p.

En effet lorsque n = p, une injection de K dans E est une bijection de K dans E. Il y en a autant que de bijections de E dans E.

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \frac{n\,!}{(n-p)\,!}$$

Dans le cas où n = p, on retrouve :

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n\,!$$

(Source : J. Harari & D. Personnaz. Cours de mathématiques 1. Algèbre – BELIN. DIA)

4. Combinaisons

4.1. Combinaisons sans répétition

4.1.1. Définition d'une combinaison sans répétition

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
On appelle combinaison sans répétition de p éléments de E toute partie (sous ensemble) à p éléments de E.
On note $\mathscr{P}_p(E)$ l'ensemble de ces parties.

4.1.2. Nombre des combinaisons sans répétition

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Le cardinal de l'ensemble $\mathscr{P}_p(E)$ c'est-à-dire le nombre des parties à p éléments de E, ou encore le nombre des combinaisons sans répétition de p éléments de E est :

$$\mathbf{card}\ \mathscr{P}_p(\mathbf{E}) = \mathbf{C_n^p} = \frac{\mathbf{n\,(n-1)\,(n-2)\dots(n-p+1)}}{\mathbf{p\,!}} = \frac{\mathbf{n\,!}}{\mathbf{(n-p)\,!\,p\,!}}$$

Alors, pour une combinaison sans répétition :

(v) Il ne faut pas prendre en considération l'ordre car il n'est pas important.

(vi) La répétition n'est pas possible car elle n'est pas permise.

(Source : J. Harari & D. Personnaz. Cours de mathématiques 1. Algèbre – BELIN. DIA)

Exemple 4 :

On considère une section de 75 étudiants dans la quelle on veut former un comité de 5 étudiants. Quel est le nombre de comités que l'on puisse former ?

On remarque ici que l'ensemble E est représenté par la section des 75 étudiants, c'est-à-dire n = 75 et que le comité à former est une partie (sous ensemble) de l'ensemble total E.

Alors calculer le nombre possible de comités revient à calculer le nombre des parties à p = 5 éléments de l'ensemble E dont le cardinal = n = 75.

Soit :

$$\mathbf{C_{75}^{5} = \frac{75 \times 74 \times 73 \dots \times 71}{5\,!} = \frac{75\,!}{(75-5)\,!\;5\,!} = 17259390}$$

4.2. Combinaisons avec répétition

4.2.1. Définition d'une combinaison avec répétition

Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle combinaison avec répétition d'ordre p de E, p éléments non ordonnés de E, pris avec remise dans E.

Ces p éléments ne forment pas un ensemble car ils peuvent être répétés, alors que dans un ensemble un élément ne peut figurer qu'une seule fois, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de répétition !

Ces p éléments ne forment pas non plus un p-uplet car ils ne sont pas ordonnés, alors que dans un p-uplet l'ordre est important !

Exemple 5 :

Soit l'ensemble E tel que : E = {R, F, D, A} et soit p = 9.
A fin d'obtenir une combinaison avec répétition d'ordre 9 de E, on peut choisir 3 fois R, 4 fois F, 1 fois D et 1 fois A : $\lceil$R, R, R, F, F, F, F, D, A$\rfloor$

De même :
$\lceil$R, R, F, F, D, D, A, A, A$\rfloor$; $\lceil$R, R, R, R, R, F, F, D, A$\rfloor$ et $\lceil$R, R, F, F, D, D, D, A, A$\rfloor$ sont également, des combinaisons avec répétition d'ordre 9 de E.

4.2.2. Nombre des combinaisons avec répétition

Le nombre de combinaisons avec répétition d'ordre p d'un ensemble E de cardinal n, noté Γ_n^p, est égal à C_{n+p-1}^p.

$$\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$$

(Source : J. Harari & D. Personnaz. Cours de mathématiques 1. Algèbre – BELIN. DIA)

Fin du chapitre B1