Partie B : Probabilités

Chapitre B2 : Introduction aux probabilités

1. Introduction

Les actes de la vie courante sont, aussi indépendants qu'on veuille les concevoir, tributaires de multiples événements. Comment alors prendre une décision en toute connaissance ?

Il est clair qu'un événement isolé ne sera pas d'un grand intérêt : s'il y a décision à prendre, c'est que plusieurs événements se présentent ensemble. D'où la nécessité de dresser l'inventaire exhaustif des événements possibles. (Source : Paul Vissio, 'Aujourd'hui les Mathématiques'. Bordas initiation)

Dans ce chapitre, on va constater la parfaite similitude entre le langage logique, le langage ensembliste et celui des événements. Il en résultera qu'à l'algèbre des parties d'un ensemble va correspondre l'algèbre des événements.

2. Algèbre des évènements

Avant de définir les termes propres à l'algèbre des événements, on considère l'exemple suivant :

Exemple 1 : (Source : Paul Vissio, 'Aujourd'hui les Mathématiques'. Bordas initiation)

9 personnes formant un comité décident de voter ***pour*** ou ***contre*** une certaine décision. Tout le monde prend part au vote et il n'y a ni abstention ni bulletin blanc. Il est possible de traduire alors, dans le langage ensembliste (celui des ensembles), des phrases telles que :

Phrase 1 : "4 personnes sont ***pour***."
Phrase 2 : "La majorité est ***pour***."
Phrase 3 : "2 personnes au moins sont ***contre***."

Comme il y a 10 possibilités différentes de vote, puisque le nombre de voix peut varier de 0 à 9, on considère l'ensemble :

$$\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Au vote, ou à ce qu'en probabilités on appelle aussi **épreuve**, on associera un élément **r** de $\mathcal{U}$, appelé la **réalité** ; par exemple 4, s'il y a eu effectivement 4 voix ***pour***.
Alors les trois phrases précédentes peuvent s'écrire à l'aide du symbolisme de la théorie des ensembles :

"4 personnes sont ***pour***."	$\equiv$	$(r = 4)$	$\equiv$	$r \in \{4\}$
"La majorité est ***pour***."	$\equiv$	$(r \geq 5)$	$\equiv$	$r \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$
"2 personnes au moins sont ***contre***."	$\equiv$	$(r \leq 7)$	$\equiv$	$r \in \mathcal{U} - \{8, 9\}$

A chacune de ces phrases correspond un sous-ensemble de $\mathcal{U}$.
Une telle phrase portant le nom d'événement dans le langage courant, il est normal, par analogie, d'appeler **événement** le sous-ensemble correspondant de $\mathcal{U}$.

2.1. Définitions

(Source : Paul Vissio, 'Aujourd'hui les Mathématiques'. Bordas initiation)

Soit $\mathcal{U}$ un ensemble, appelé **univers** (ou **ensemble total**, ou encore **référentiel**), et dont les éléments sont appelés les **possibles**.

<u>Définition 1</u> : On appelle **événement** tout sous-ensemble (partie) de $\mathcal{U}$, c'est-à-dire :

$$(\text{A est un événement}) \equiv (A \subset \mathcal{U}) \equiv (A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})^{*})$$

On peut voir clairement que, dans l'exemple 1, **4** est un possible et non un événement. Ce qui correspond à l'événement "4 personnes sont ***pour***.", c'est {4}, c'est-à-dire l'ensemble réduit au seul élément 4.

<u>Définition 2</u> : Parmi les éléments de $\mathcal{U}$, un, et un seul, porte le nom de **réalité**. On le désigne par **r**. L'univers $\mathcal{U}$ est associé à une certaine **épreuve** (ou **expérience**), le choix de **r** dépend du résultat de cette épreuve.

<u>Définition 3</u> : On dira alors qu'**un événement A est réalisé si r est l'un de ses éléments**, c'est-à-dire :

A est réalisé $\equiv$ $(r \in A)$

A n'est pas réalisé $\equiv$ $(r \notin A)$

2.2. Remarques importantes

Remarque 1 : Quel que soit le choix de **r** :

$r \in \mathcal{U}$, c'est-à-dire que $\mathcal{U}$ est toujours réalisé ; on dit que $\mathcal{U}$ est **le certain**.

$r \notin \varnothing$, c'est-à-dire que $\mathcal{U}$ n'est jamais réalisé ; on dit que **Ø** est **l'impossible**.

Remarque 2 : Un **univers** est dit **fini** s'il n'a qu'un nombre fini de possibles.

Un **univers** est dit **dénombrable** s'il existe une bijection entre lui est l'ensemble IN des entiers naturels.

2.3. Opérations sur les événements

(Source : Paul Vissio, 'Aujourd'hui les Mathématiques'. Bordas initiation)

2.3.1. Événement contraire

Si A est un événement de l'univers $\mathcal{U}$, l'**événement contraire**, noté $\bar{A}$, est le complémentaire de A par rapport à $\mathcal{U}$, c'est-à-dire :

$$\bar{A} = \mathcal{U} - A$$

Dans ces conditions :

$(\bar{A}$ est réalisé$)$ équivaut à (A n'est pas réalisé)

---

* $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ est l'ensemble des parties de l'ensemble total $\mathcal{U}$.

2.3.2. Événement “ et ” – Événement “ ou ”

Si A et B sont deux événements :

$A \cup B$ sera l'événement “A ou B”,

$A \cap B$ sera l'événement “A et B”.

Alors :

$A \cup B$ est réalisé	équivaut à	“A est réalisé **ou** B est réalisé”.
$A \cup B$ est réalisé	équivaut à	“L'un au moins des deux événements est réalisé”.
$A \cap B$ est réalisé	équivaut à	“A est réalisé **et** B est réalisé ».
$A \cap B$ est réalisé	équivaut à	“Les deux événements sont réalisés simultanément”.

2.3.3. Événements incompatibles

Si ($A \cap B = \emptyset$) alors ($A \cap B$ est impossible).
On dit, dans ce cas, que les deux événements sont **incompatibles** : la réalisation de l'un exclut celle de l'autre.

2.3.4. Application

En examinant l'exemple 1 et en considérant les deux événements suivants :

“La majorité est ***pour***.”, c'est-à-dire : $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

“Tout le monde n'est pas du même avis”, soit : $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Alors :

L'événement contraire de A, c'est-à-dire “La majorité est ***contre***.”, est :

$$\bar{A} = \mathcal{U} - A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

L'événement “La majorité est ***pour*** sans qu'il y ait unanimité”, est $A \cap B$:

$$A \cap B = \{5, 6, 7, 8\}$$

L'événement “Il y a au moins une personne ***pour***”, est $A \cup B$:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

2.3.5. Propriétés fondamentales

Les propriétés portées dans le tableau ci-dessous sont en liaison avec le langage ensembliste et permettent d'effectuer certains calculs d'événements.

A, B, C étant trois événements d'un univers $\mathcal{U}$:

$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{U} = \emptyset$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$(A \cup B) \cap B = B$	$(A \cap B) \cup B = B$
$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	$A \cap \mathcal{U} = A$
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(Source : Paul Vissio, 'Aujourd'hui les Mathématiques'. Bordas initiation)

3. Espaces probabilisés

(Source : K. Khaldi, 'Méthodes statistiques et probabilités'. Casbah Éditions)

3.1. Espace probabilisable

Soit une expérience aléatoire*. On peut identifier un événement aléatoire A avec la partie $\mathcal{U}$ dont les éléments réalisent A. L'ensemble de tous les événements est l'ensemble de tous les sous-ensembles (parties) de $\mathcal{U}$: $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

Une classe $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ est **une tribu** si :

(i) $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$

(ii) Si $(A \in \mathcal{A})$ alors $(\overline{A} \in \mathcal{A})$

(iii) Si $((A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements de $\mathcal{A})$ alors $(\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A})$

Le couple $(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ s'appelle **espace probabilisable**.

<u>Exemple 2</u> :

(Source : K. Khaldi, 'Méthodes statistiques et probabilités'. Casbah Éditions)

Au jet d'un dé à 6 faces, on associe $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Soit l'événement A : "Le numéro apparu est un multiple de 3".
On choisit $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{3, 6\}, \{1, 2, 4, 5\}, \mathcal{U}\} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \mathcal{U}\}$. On aurait pu choisir aussi $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

* La théorie des probabilités est une théorie mathématique intervenant dans l'étude des phénomènes liés au hasard ; c'est-à-dire des phénomènes, si reproduits plusieurs fois, se déroulent différemment d'une expérience à l'autre et donnent un résultat imprévisible. On dit qu'une expérience est aléatoire si son résultat ne peut être prévu à priori.

3.2. Espace probabilisé

(Source : K. Khaldi, 'Méthodes statistiques et probabilités'. Casbah Éditions)

A chaque événement A, on voudrait associer un pourcentage de chances qu'il a de se réaliser lorsqu'on effectue une expérience aléatoire. Cette idée conduit à la définition d'une application P de $\mathscr{A}$ dans $[0\,,1]$:

$$\begin{aligned} P :\quad \mathscr{A} &\longrightarrow [0\,,1] \\ \mathscr{U} &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

L'application P satisfait aux deux axiomes suivants :

Axiome 1 : $P\,(\mathscr{U}) = 1$ .... (Visible sur la schématisation de P).

Axiome 2 : Pour toute famille $(A_i)_{\,i\geq 1}$ d'événements deux à deux incompatibles on a :

$$P\,(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Le triplet $(\mathscr{U}, \mathscr{A}, P)$ est appelé **espace probabilisé** ou **espace de probabilité**.

4. Théorèmes généraux des probabilités

Précédemment, nous avons montré que la traduction du langage des événements était aisée dans le langage ensembliste.
Mais cette description, bien que complète, d'un univers de possibles est insuffisante pour le but de pouvoir prendre une décision en toute connaissance.

Il s'agit maintenant de :

- Classer les possibles.
- Séparer le certain de l'incertain.
- Essayer d'ordonner les incertitudes : qui est mieux encore !

Ensuite :

- Il pourra être envisagé de choisir ses actes !

Apparemment, il est clair que pour classer les événements d'un même univers, le plus simple est d'associer à chacun d'eux un nombre !
En outre, on avait parlé dans le paragraphe précédent (3.2. Espace probabilisé) de l'association d'un certain pourcentage de chances quant à la réalisation d'un événement A lorsqu'on effectue une expérience aléatoire.

(i) Quel nombre ?

(ii) Comment est-il défini ?

(iii) A quelles relations doivent satisfaire les nombres choisis ?

Les axiomes ou principes des probabilités peuvent répondre à ces questions et à autant d'autres !

4.1. Définition d'une probabilité

Exemple 3 : (Source : Paul Vissio, 'Aujourd'hui les Mathématiques'. Bordas initiation)

Soit l'épreuve (expérience aléatoire) suivante : " On lance un dé et on note le point apparu ".
L'univers correspond est alors : $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Si l'on s'attache particulièrement à l'apparition du « point » 1, on s'aperçoit que ce « point » apparaît, sur un grand nombre d'expériences, aussi souvent que l'un quelconque des autres « points ». En moyenne, chacun apparaît environ **une fois sur six**.

D'où l'idée d'ériger cette constatation en une règle et une définition !

En l'absence de tout autre renseignement, le nombre $\frac{1}{6}$ sera attaché à l'apparition de chacun des possibles de l'univers $\mathcal{U}$.

On dit que $\frac{1}{6}$ est la **probabilité** de $\{1\}$, de $\{2\}$, de $\{3\}$, de $\{4\}$, de $\{5\}$ et de $\{6\}$.

Au fait, il s'agit du pourcentage de chances vu ci-haut (Paragraphe 3.2. Espace probabilisé) et que l'on voudrait associer à chacun de ces événements qu'ils ont de se réaliser lorsqu'on effectue l'expérience aléatoire. ($\frac{1}{6} \approx 0.167$ soit 16.7 % environ)

Soit alors l'événement, sous-ensemble de $\mathcal{U}$, $\{1, 3, 5\}$. Cela signifie que le « point » qui apparaît est impair. On constate, sur un grand nombre de jets, que cet événement semble se produire, en moyenne, **une fois sur deux**. La probabilité de cet événement serait donc égale à $\frac{1}{2}$.

Or, c'est la **somme** des probabilités des événements $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$.

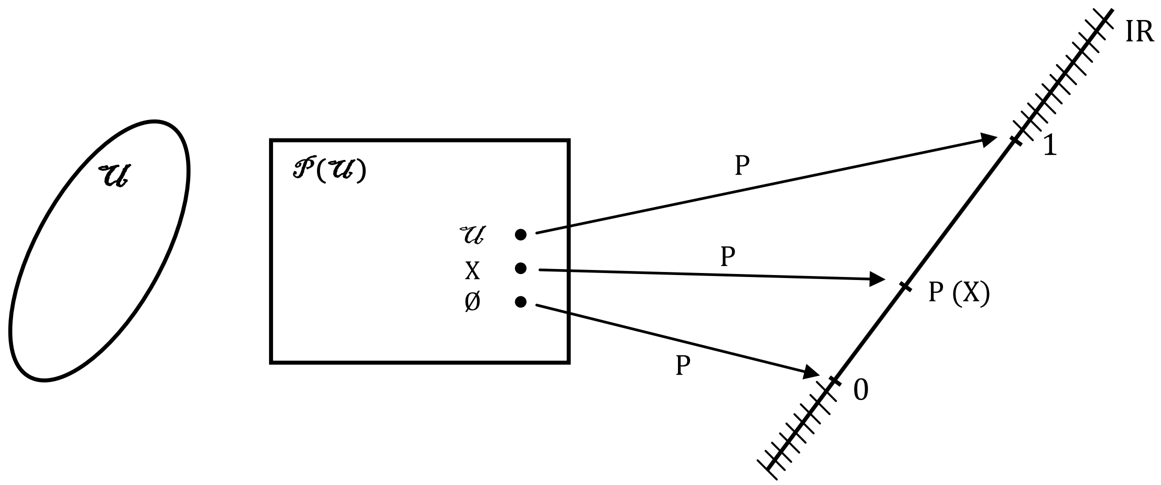
A noter, d'ailleurs, que la probabilité de $\mathcal{U}$ est alors 1 : $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1\right)$

- **Définition :**

On appelle probabilité, sur un univers fini $\mathcal{U}$, toute application P de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ (ensemble des parties de $\mathcal{U}$) vers IR^+ (ensemble des nombres réels positifs) telle que :

$$\begin{cases} P(\mathcal{U}) = 1 \\ \text{Quels que soient } A \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \text{ et } B \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \text{ tels que } A \cap B = \emptyset \end{cases}$$

alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



(Source : Paul Vissio, 'Aujourd'hui les Mathématiques'. Bordas initiation)

- **Remarques :**

Dans l'exemple 3, les trois conditions suivantes ont été trouvées intuitivement :

- Si [A est un événement] alors $[P(A) \geq 0]$. …………………. Condition 1
- $P(\mathcal{U}) = 1$. …………………. Condition 2
- Si $[A \cap B = \emptyset]$ alors $[P(A\cup B) = P(A) + P(B)]$. …………………. Condition 3

C'est-à-dire :

A et B sont deux événements incompatibles !

La condition 3 est connue sous le nom : **Axiome des probabilités totales.**

4.2. Propriétés fondamentales des probabilités

4.2.1. Événements contraires

Théorème :

La somme des probabilités de deux événements contraires est égale à 1.

Si [$\overline{A}$ est l'événement contraire de l'événement A] alors $[P(\overline{A}) = 1 - P(A)]$.

4.2.2. Extension de la formule des probabilités totales

Si A, B et C sont trois événements incompatibles deux à deux, alors :

$$P(A\cup B\cup C) = P(A\cup B) + P(C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Cette formule s'étend facilement à une réunion, en nombre fini quelconque, d'événements, à condition que les événements soient incompatibles deux à deux.

4.2.3. Probabilité d'une réunion

Théorème :

Quels que soient les événements A et B : $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

- **Remarque :**

Si l'univers $\mathcal{U}$ est fini (ayant n éléments) et si chaque possible (ou événement élémentaire) a la même probabilité, on dit que les événements élémentaires sont **équiprobables** (en absence de tout renseignement, on pourra admettre qu'il en est ainsi dans certaines expériences : par exemple, le tirage au sort d'un numéro).

Dans ce cas, et dans ce cas seulement, si la réalisation d'un événement A résulte de la réunion de p possibles, alors la probabilité de A est :

$$P\,(A) = p \times \frac{1}{n} = \frac{p}{n}$$

C'est-à-dire :

$$P\,(A) = \frac{\text{Nombre des cas favorables}}{\text{Nombre total des cas possibles}}$$

(Source : Paul Vissio, 'Aujourd'hui les Mathématiques'. Bordas initiation)

Fin du chapitre B2