Partie B : Probabilités

Chapitre B2 : Introduction aux probabilités 1ère Séance

1. Introduction

Les actes de la vie courante sont, aussi indépendants qu'on veuille les concevoir, tributaires de multiples événements. Comment alors prendre une décision en toute connaissance ?

Il est clair qu'un événement isolé ne sera pas d'un grand intérêt : s'il y a décision à prendre, c'est que plusieurs événements se présentent ensemble. D'où la nécessité de dresser l'inventaire exhaustif des événements possibles. (Paul Vissio, 'Aujourd'hui les Mathématiques')

Dans ce chapitre, on va constater la parfaite similitude entre le langage logique, le langage ensembliste et celui des événements. Il en résultera qu'à l'algèbre des parties d'un ensemble va correspondre l'algèbre des événements.

2. Algèbre des évènements

Avant de définir les termes propres à l'algèbre des événements, on considère l'exemple suivant :

Exemple 1 :

9 personnes formant un comité décident de voter ***pour*** ou ***contre*** une certaine décision. Tout le monde prend part au vote et il n'y a ni abstention ni bulletin blanc. Il est possible de traduire alors, dans le langage ensembliste (celui des ensembles), des phrases telles que :

Phrase 1 : "4 personnes sont ***pour***."
Phrase 2 : "La majorité est ***pour***."
Phrase 3 : "2 personnes au moins sont ***contre***."

Comme il y a 10 possibilités différentes de vote, puisque le nombre de voix peut varier de 0 à 9, on considère l'ensemble :

$$\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Au vote, ou à ce qu'en probabilités on appelle aussi **épreuve**, on associera un élément **r** de $\mathcal{U}$, appelé la **réalité** ; par exemple 4, s'il y a eu effectivement 4 voix ***pour***.
Alors les trois phrases précédentes peuvent s'écrire à l'aide du symbolisme de la théorie des ensembles :

"4 personnes sont ***pour***."	$\equiv$	$(r = 4)$	$\equiv$	$r \in \{4\}$
"La majorité est ***pour***."	$\equiv$	$(r \geq 5)$	$\equiv$	$r \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$
"2 personnes au moins sont ***contre***."	$\equiv$	$(r \leq 7)$	$\equiv$	$r \in \mathcal{U} - \{8, 9\}$

A chacune de ces phrases correspond un sous-ensemble de $\mathcal{U}$.
Une telle phrase portant le nom d'événement dans le langage courant, il est normal, par analogie, d'appeler **événement** le sous-ensemble correspondant de $\mathcal{U}$.

2.1. Définitions

Soit $\mathcal{U}$ un ensemble, appelé **univers** (ou **ensemble total**, ou encore **référentiel**), et dont les éléments sont appelés les **possibles**.

Définition 1 : On appelle **événement** tout sous-ensemble (partie) de $\mathcal{U}$, c'est-à-dire :

$$(A \text{ est un événement}) \equiv (A \subset \mathcal{U}) \equiv (A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})^{*})$$

On peut voir clairement que, dans l'exemple 1, **4** est un possible et non un événement. Ce qui correspond à l'événement "4 personnes sont ***pour***.", c'est {4}, c'est-à-dire l'ensemble réduit au seul élément 4.

Définition 2 : Parmi les éléments de $\mathcal{U}$, un, et un seul, porte le nom de **réalité**. On le désigne par **r**. L'univers $\mathcal{U}$ est associé à une certaine **épreuve** (ou **expérience**), le choix de **r** dépend du résultat de cette épreuve.

Définition 3 : On dira alors qu'**un événement A est réalisé si r est l'un de ses éléments**, c'est-à-dire :

A est réalisé $\equiv$ $(r \in A)$

A n'est pas réalisé $\equiv$ $(r \notin A)$

2.2. Remarques importantes

Remarque 1 : Quel que soit le choix de **r** :

$r \in \mathcal{U}$, c'est-à-dire que $\mathcal{U}$ est toujours réalisé ; on dit que $\mathcal{U}$ est **le certain**.

$r \notin \varnothing$, c'est-à-dire que $\mathcal{U}$ n'est jamais réalisé ; on dit que **Ø** est **l'impossible**.

Remarque 2 : Un **univers** est dit **fini** s'il n'a qu'un nombre fini de possibles.

Un **univers** est dit **dénombrable** s'il existe une bijection entre lui est l'ensemble IN des entiers naturels.

2.3. Opérations sur les événements

2.3.1. Événement contraire

Si A est un événement de l'univers $\mathcal{U}$, l'**événement contraire**, noté $\overline{A}$, est le complémentaire de A par rapport à $\mathcal{U}$, c'est-à-dire :

$$\overline{A} = \mathcal{U} - A$$

Dans ces conditions :

$(\overline{A}$ est réalisé$)$ équivaut à (A n'est pas réalisé)

* $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ est l'ensemble des parties de l'ensemble total $\mathcal{U}$.