Partie B : Probabilités

Chapitre B2 : Introduction aux probabilités

2ème Séance

2.3.2. Événement " et " – Événement " ou "

Si A et B sont deux événements :

$A \cup B$ sera l'événement "A ou B",

$A \cap B$ sera l'événement "A et B".

Alors :

$A \cup B$ est réalisé	équivaut à	"A est réalisé **ou** B est réalisé".
$A \cup B$ est réalisé	équivaut à	"L'un au moins des deux événements est réalisé".
$A \cap B$ est réalisé	équivaut à	"A est réalisé **et** B est réalisé ».
$A \cap B$ est réalisé	équivaut à	"Les deux événements sont réalisés simultanément".

2.3.3. Événements incompatibles

Si ($A \cap B = \emptyset$) alors ($A \cap B$ est impossible).
On dit, dans ce cas, que les deux événements sont **incompatibles** : la réalisation de l'un exclut celle de l'autre.

2.3.4. Application

En examinant l'exemple 1 (voir séance 1 du chapitre B2) et en considérant les deux événements suivants :

"La majorité est ***pour***.", c'est-à-dire : $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
"Tout le monde n'est pas du même avis", soit : $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Alors :

L'événement contraire de A, c'est-à-dire "La majorité est ***contre***.", est :

$$\overline{A} = \mathcal{U} - A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

L'événement "La majorité est ***pour*** sans qu'il y ait unanimité", est $A \cap B$:

$$A \cap B = \{5, 6, 7, 8\}$$

L'événement "Il y a au moins une personne ***pour***", est $A \cup B$:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

2.3.5. Propriétés fondamentales

Les propriétés portées dans le tableau ci-dessous sont en liaison avec le langage ensembliste et permettent d'effectuer certains calculs d'événements.

A, B, C étant trois événements d'un univers $\mathcal{U}$:

$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{\mathcal{U}} = \emptyset$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$(A \cup B) \cap B = B$	$(A \cap B) \cup B = B$
$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	$A \cap \mathcal{U} = A$
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3. Espaces probabilisés

3.1. Espace probabilisable

Soit une expérience aléatoire*. On peut identifier un événement aléatoire A avec la partie $\mathcal{U}$ dont les éléments réalisent A. L'ensemble de tous les événements est l'ensemble de tous les sous-ensembles (parties) de $\mathcal{U}$: $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

Une classe $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ est **une tribu** si :

(i) $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$

(ii) Si $(A \in \mathcal{A})$ alors $(\overline{A} \in \mathcal{A})$

(iii) Si $((A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements de $\mathcal{A})$ alors $(\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A})$

Le couple $(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ s'appelle **espace probabilisable**.

Exemple 2 :

Au jet d'un dé à 6 faces, on associe $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Soit l'événement A : "Le numéro apparu est un multiple de 3".
On choisit $\mathcal{A} = \{ \emptyset, \{3,6\}, \{1, 2, 4, 5\}, \mathcal{U}\} = \{ \emptyset, A, \overline{A}, \mathcal{U}\}$. On aurait pu choisir aussi $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

* La théorie des probabilités est une théorie mathématique intervenant dans l'étude des phénomènes liés au hasard ; c'est-à-dire des phénomènes, si reproduits plusieurs fois, se déroulent différemment d'une expérience à l'autre et donnent un résultat imprévisible. On dit qu'une expérience est aléatoire si son résultat ne peut être prévu à priori.

3.2. Espace probabilisé

A chaque événement A, on voudrait associer un pourcentage de chances qu'il a de se réaliser lorsqu'on effectue une expérience aléatoire. Cette idée conduit à la définition d'une application P de $\mathscr{A}$ dans $[0\,,1]$:

$$\begin{aligned} P :\quad \mathscr{A} &\longrightarrow [0\,,1] \\ \mathcal{U} &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

L'application P satisfait aux deux axiomes suivants :

Axiome 1 : $P\,(\mathcal{U}) = 1$ .... (Visible sur la schématisation de P).

Axiome 2 : Pour toute famille $(A_i)_{\,i\geq 1}$ d'événements deux à deux incompatibles on a :

$$P\,(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Le triplet $(\mathcal{U}, \mathscr{A}, P)$ est appelé **espace probabilisé** ou **espace de probabilité**.

4. Axiomes des probabilités

Précédemment, nous avons montré que la traduction du langage des événements était aisée dans le langage ensembliste.
Mais cette description, bien que complète, d'un univers de possibles est insuffisante pour le but de pouvoir prendre une décision en toute connaissance.

Il s'agit maintenant de :

- Classer les possibles.
- Séparer le certain de l'incertain.
- Essayer d'ordonner les incertitudes : qui est mieux encore !

Ensuite :

- Il pourra être envisagé de choisir ses actes !

Apparemment, il est clair que pour classer les événements d'un même univers, le plus simple est d'associer à chacun d'eux un nombre !
En outre, on avait parlé dans le paragraphe précédent (3.2. Espace probabilisé) de l'association d'un certain pourcentage de chances quant à la réalisation d'un événement A lorsqu'on effectue une expérience aléatoire.

(i) Quel nombre ?

(ii) Comment est-il défini ?

(iii) A quelles relations doivent satisfaire les nombres choisis ?

Les axiomes ou principes des probabilités peuvent répondre à ces questions et à autant d'autres !