Partie B : Probabilités

Chapitre B2 : Introduction aux probabilités

3ème Séance

4.1. Définition d'une probabilité

- **Exemple 3 :**

Soit l'épreuve (expérience aléatoire) suivante : " On lance un dé et on note le point apparu ".
L'univers correspond est alors : $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Si l'on s'attache particulièrement à l'apparition du « point » 1, on s'aperçoit que ce « point » apparaît, sur un grand nombre d'expériences, aussi souvent que l'un quelconque des autres « points ». En moyenne, chacun apparaît environ **une fois sur six**.

D'où l'idée d'ériger cette constatation en une règle et une définition !

En l'absence de tout autre renseignement, le nombre $\frac{1}{6}$ sera attaché à l'apparition de chacun des possibles de l'univers $\mathcal{U}$.

On dit que $\frac{1}{6}$ est la **probabilité** de $\{1\}$, de $\{2\}$, de $\{3\}$, de $\{4\}$, de $\{5\}$ et de $\{6\}$.

Au fait, il s'agit du pourcentage de chances vu ci-haut (Paragraphe 3.2. Espace probabilisé) et que l'on voudrait associer à chacun de ces événements qu'ils ont de se réaliser lorsqu'on effectue l'expérience aléatoire. ($\frac{1}{6} \approx 0.167$ soit 16.7 % environ)

Soit alors l'événement, sous-ensemble de $\mathcal{U}$, $\{1, 3, 5\}$. Cela signifie que le « point » qui apparaît est impair. On constate, sur un grand nombre de jets, que cet événement semble se produire, en moyenne, **une fois sur deux**. La probabilité de cet événement serait donc égale à $\frac{1}{2}$.

Or, c'est la **somme** des probabilités des événements $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$.

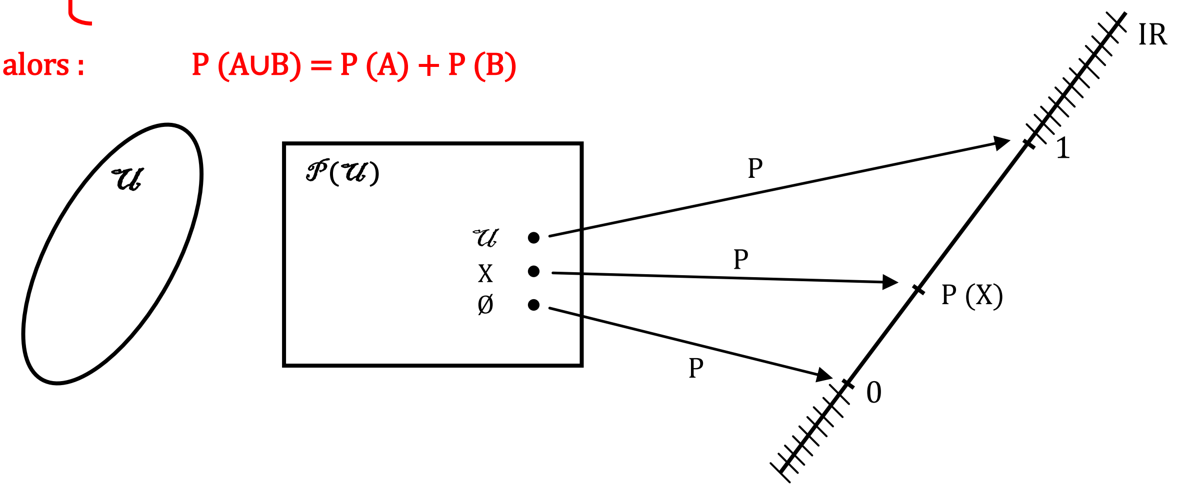
A noter, d'ailleurs, que la probabilité de $\mathcal{U}$ est alors 1 : $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1\right)$

- **Définition :**

On appelle probabilité, sur un univers fini $\mathcal{U}$, toute application P de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ (ensemble des parties de $\mathcal{U}$) vers $\mathbb{R}^+$ (ensemble des nombres réels positifs) telle que :

$$\begin{cases} P(\mathcal{U}) = 1 \\ \text{Quels que soient } A \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \text{ et } B \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \text{ tels que } A \cap B = \emptyset \end{cases}$$

alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



- **<u>Remarques</u> :**

Dans l'exemple 3, les trois conditions suivantes ont été trouvées intuitivement :

- Si [A est un événement] alors [$P(A) \geq 0$]. …………………. Condition 1
- $P(\mathcal{U}) = 1$. …………………. Condition 2
- Si [$A \cap B = \emptyset$] alors [$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$]. …………………. Condition 3

C'est-à-dire :

A et B sont deux événements incompatibles !

La condition 3 est connue sous le nom : **Axiome des probabilités totales.**

4.2. Propriétés fondamentales des probabilités

4.2.1. Événements contraires

<u>Théorème</u> :

La somme des probabilités de deux événements contraires est égale à 1.

Si [$\overline{A}$ est l'événement contraire de l'événement A] alors [$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$].

4.2.2. Extension de la formule des probabilités totales

Si A, B et C sont trois événements incompatibles deux à deux, alors :

$$P\,(A \cup B \cup C) = P\,(A \cup B) + P\,(C) = P\,(A) + P\,(B) + P\,(C)$$

Cette formule s'étend facilement à une réunion, en nombre fini quelconque, d'événements, à condition que les événements soient incompatibles deux à deux.

4.2.3. Probabilité d'une réunion

<u>Théorème</u> :

Quels que soient les événements A et B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- **<u>Remarque</u> :**

Si l'univers $\mathcal{U}$ est fini (ayant n éléments) et si chaque possible (ou événement élémentaire) a la même probabilité, on dit que les événements élémentaires sont **équiprobables** (en absence de tout renseignement, on pourra admettre qu'il en est ainsi dans certaines expériences : par exemple, le tirage au sort d'un numéro).

Dans ce cas, et dans ce cas seulement, si la réalisation d'un événement A résulte de la réunion de p possibles, alors la probabilité de A est :

$$P\,(A) = p \times \frac{1}{n} = \frac{p}{n}$$

C'est-à-dire :

$$P\,(A) = \frac{\text{Nombre des cas favorables}}{\text{Nombre total des cas possibles}}$$

Fin du chapitre B2