Partie B : Probabilités

Chapitre B3 : Conditionnement et indépendance

1. Exemple 1 :

(Source : Paul Vissio, 'Aujourd'hui les Mathématiques'. Bordas initiation)

On demande à 250 personnes : 50 cadres et 200 employés d'une entreprise, si elles sont favorables ou non à la journée continue. Le dépouillement des réponses montre que 30 cadres et 80 employés sont favorables, les autres personnes étant contre.

On interroge une personne au hasard : quelle est la probabilité que ce soit un cadre ou une personne favorable à la journée continue ?

Soit $\mathcal{U} = \{(CF), (CN), (EF), (EN)\}$ l'ensemble des possibles :

CF : **C**adre **F**avorable à la journée continue .
CN : **C**adre **N**on favorable à la journée continue.
EF : **E**mployé **F**avorable à la journée continue.
EN : **E**mployé **N**on favorable à la journée continue.

L'univers ayant 4 possibles, $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ contient $2^4 = 16$ événements.

Si A est l'événement : " C'est un cadre "
et B est l'événement : " C'est une personne favorable à la journée continue "
alors l'événement dont on cherche la probabilité est $A \cup B$.

Donc : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Or : $P(A) = \frac{50}{250} = 0.20$ .... (50 cadres pour 250 personnes) ;

$P(B) = \frac{110}{250} = 0.44$ .... (110 personnes sont favorables) ;

$P(A \cap B) = \frac{30}{250} = 0.12$ .... (30 cadres favorables).

Donc : $P(A \cup B) = 0.20 + 0.44 - 0.12 = 0.52$ soit 52 %.

2. Axiome des probabilités composées

(Source : Paul Vissio, 'Aujourd'hui les Mathématiques'. Bordas initiation)

Reprenons l'exemple 1, et cherchons la probabilité de l'événement : " La personne interrogée est favorable à la journée continue sachant que c'est un cadre ".

Puisqu'il y a 30 cadres favorables à la journée continue et que l'on interroge un cadre, alors la probabilité cherchée est : $\frac{30}{50} = 0.60$.

Remarquons que 0.60 est le quotient de $P(A \cap B) = 0.12$ par $P(A) = 0.20$.

Autrement dit, la **probabilité de B sachant A** (c'est-à-dire sachant que A est réalisé) est égale au **quotient** $\frac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

Ce résultat constaté sur cet exemple conduit à poser la définition et l'axiome suivants.

(Source : Paul Vissio, 'Aujourd'hui les Mathématiques'. Bordas initiation)

2.1. Définition

On appelle probabilité de l'événement B sachant A la probabilité de réalisation de B, sachant que l'événement A est réalisé.

On note $P\,(B/A)$ cette probabilité.

2.2. Axiome des probabilités composées

Si $P(B/A)$ alors $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

2.3. Indépendance en probabilité

2.3.1. Cas de deux événements

Il existe une circonstance particulière dans laquelle l'axiome des probabilités composées prend une forme particulièrement simple : celle dans laquelle l'information A s'est produit ne modifie en rien la probabilité de B.

Alors **B est indépendant de A**.

Dans ces conditions :

$$P(B) = P(B/A) = \frac{P\,(B \cap A)}{P\,(A)} \quad \text{équivaut à} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Il en résulte immédiatement l'indépendance de A par rapport à B.

En effet : $P(A) = \frac{P\,(A \cap B)}{P\,(B)} = P(A/B)$

On dira alors que **les deux événements sont indépendants**.

$$[\text{A et B sont indépendants}] \quad \text{équivaut à} \quad [P(A \cap B) = P(A) \times P(B)]$$

2.3.2. Cas de plus de deux événements

Dans le cas de plus de deux événements, on dit qu'**ils sont indépendants si l'intersection d'un nombre quelconque d'entre eux a une probabilité égale au produit des probabilités de chacun d'eux.**

Par exemple, trois événements A, B et C sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \qquad P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

et

$$P(C \cap A) = P(C) \times P(A) \qquad P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

3. Probabilités des antécédents : Formule de Bayes

3.1. Exemple 2

(Source : Paul Vissio, 'Aujourd'hui les Mathématiques'. Bordas initiation)

Soit une urne A contient 100 boules : 90 noires et 10 blanches. Une urne B contient 80 boules blanches et 20 noires. On prend une urne au hasard et on tire, de cette urne, une boule. On constate alors que la boule tirée est noire.

Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne A ?

Soit E l'événement : " La boule tirée est noire et elle provient de l'urne A ".
Calculons de deux façons la probabilité $P(E)$ de cet événement.

Première méthode	**Deuxième méthode**
On pose : $E = \alpha \cap \beta$ avec : α : " La boule est tirée de l'urne A " β : " La boule tirée de A est noire " On a : $P(E) = P(\alpha) \times P(\beta)$ (Axiome des probabilités composées) Or : $P(\alpha) = 1/2$ (Choix de l'urne A) $P(\beta) = 9/10$ (Choix de 1 boule noire dans A : $90/100$) $P(E) = 9/20$	On pose : $E = \alpha' \cap \beta'$ avec : α' : " La boule tirée est noire " β' : " La boule noire provient de l'urne A " $P(\beta')$ est la probabilité cherchée ! Or, $P(\alpha') = 110/200 = 11/20$ (tirer 1 boule noire de l'ensemble de toutes les boules) Par suite : $P(E) = 11/20 \times P(\beta')$ <u>Résultat</u> : La probabilité cherchée est telle que : $11/20\, P(\beta') = 9/20$ soit : $P(\beta') = 9/11$

(Source : Paul Vissio, 'Aujourd'hui les Mathématiques'. Bordas initiation)

3.2. Formule de Bayes

Cette formule généralise l'exemple précédent (Exemple 2).

Désignons par $c(A)$ et $c(B)$, respectivement, les probabilités de choisir, a priori, l'urne A ou l'urne B.

Désignons par $n(A)$ la probabilité d'extraire une boule noire de l'urne A et $n(B)$ la probabilité d'extraire, a priori, une boule noire de l'urne B.

Alors la probabilité $P(A/n)$ qu'une boule noire ait été extraite de l'urne A est :

$$P(A/n) = \frac{c(A).n(A)}{c(A).n(A) + c(B).n(B)}$$

En effet, soit E l'événement : " La boule est noire et elle provient de l'urne A ".

- Calculons $P(E)$.

Première méthode	**Deuxième méthode**
E résulte de la **conjonction** des deux événements : “ Choix de A ” et “ Choix, dans A, de 1 boule noire ”. Alors : $\mathbf{P(E) = c(A)\,.\,n(A)}$ (Axiome des probabilités composées)	E résulte du choix de 1 boule noire parmi toutes, puis du fait que la boule provient, précisément, de A. La première probabilité est notée $P(n)$; la deuxième est, justement, celle qui est cherchée et est notée : $P(A/n)$. On a : $P(E) = P(n)\,.\,P(A/n)$ (Axiome des probabilités composées) Or, $P(n)$ s’obtient à l’aide de l’axiome des probabilités totales : En effet, choisir une boule noire dans l’ensemble correspond à choisir 1 boule noire dans A (probabilité $c(A).\,n(A)$) **ou** à choisir 1 boule noire dans B (probabilité $c(B).\,n(B)$). Par suite : $P(n) = c(A).\,n(A) + c(B).\,n(B)$ Donc : $\mathbf{P(E) = [c(A).\,n(A) + c(B).\,n(B)] \times P(A/n)}$

$$\mathbf{P(A/n) = \frac{c(A).\,n(A)}{c(A).\,n(A) + c(B).\,n(B)}}$$

(Source : Paul Vissio, ‘Aujourd’hui les Mathématiques’. Bordas initiation)

Fin du chapitre B3