

Chapitre 4

Variables aléatoires réelles

4.1 Introduction

DANS de nombreux jeux, on fait intervenir le hasard en observant la somme des points marqués par deux dés. Considérons le jet d'un dé bleu et d'un dé rouge et notons S la somme des points obtenus. On modélise cette expérience en prenant l'équiprobabilité sur $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$. Un évènement élémentaire ω est ici un couple (b, r) où b désigne le résultat du dé bleu et r celui du rouge et $S(\omega) = b + r$. Il est commode de décrire la situation par un tableau à 36 cases en écrivant la valeur de $S(\omega)$ dans la case représentant $\omega = (b, r)$ à l'intersection de la ligne b et de la colonne r .

| | | | | | | |
|---|---|---|---|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

FIGURE 4.1 – Somme des points de deux dés

On a ainsi défini une application S de Ω dans l'ensemble des sommes de points possibles : $\llbracket 2, 12 \rrbracket$. On dit que S est une *variable aléatoire* sur Ω . En fait, l'observation qui nous intéresse dans cette expérience, ce n'est pas ω , mais seulement $S(\omega)$. Ce que l'on aimerait connaître, c'est la probabilité que la somme des points prenne une valeur donnée, soit $P(S = k)$ pour $k \in \llbracket 2, 12 \rrbracket$. Ici la notation « $P(S = k)$ » est un abus d'écriture commode pour désigner $P(\{\omega \in \Omega ; S(\omega) = k\})$. En utilisant l'équiprobabilité sur Ω et la figure 4.1, nous obtenons le tableau 4.1.

| | | | | | | | | | | | |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| k | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $P(S = k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

TABLE 4.1 – Probabilités des valeurs de la somme des points

Cela revient à considérer un nouvel ensemble d'évènements élémentaires :

$$\Omega' = S(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

et à le munir de la probabilité P_S définie par le tableau 4.1, plus précisément :

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega'), \quad P_S(B) := \sum_{k \in B} P(S = k) = P(S \in B). \quad (4.1)$$

Cette nouvelle probabilité P_S s'appelle *loi de la variable aléatoire S* . En d'autres termes, nous avons réalisé *via S* un *transfert* de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ sur l'espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'), P_S)$. Remarquons maintenant que l'on peut facilement agrandir l'ensemble d'arrivée de S en remplaçant Ω' par $\Omega'' = \mathbb{R}$. On peut munir \mathbb{R} au choix de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ou de la tribu

$$\mathcal{B} \text{ plus petite tribu contenant les intervalles.} \quad (4.2)$$

Il y a de bonnes raisons à cet agrandissement de l'ensemble d'arrivée, ne serait ce que pour pouvoir faire des opérations sur les variables aléatoires. Imaginons par exemple que l'on jette n fois la paire de dés et que l'on s'intéresse à la moyenne arithmétique M_n des sommes obtenues. Il ne serait guère commode de travailler avec un espace d'arrivée $\Omega'_n := M_n(\Omega'^n)$, surtout si l'on s'intéresse au comportement de M_n pour n tendant vers l'infini. Nous prendrons donc désormais comme ensemble d'arrivée \mathbb{R} pour les variables aléatoires X que nous étudierons, à partir du moment où $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$.

Si $X(\omega)$ est une grandeur physique (masse, température, pression, longueur, etc.) mesurée à partir du résultat ω d'une expérience, il n'est en général pas possible de la déterminer avec une précision absolue. Tout ce que l'on peut dire est que X appartient à un certain intervalle, dont la longueur dépend de la précision de l'instrument de mesure utilisé. Les quantités pertinentes pour identifier la *loi* de X sont alors les $P(X \in I)$ pour I intervalle de \mathbb{R} , plutôt que les $P(X = x)$ qui pourraient être nulles pour tout x réel. Nous définirons la loi de X en posant $P_X(B) = P(X \in B)$ pour $B \in \mathcal{B}$, *sous réserve que cela ait un sens*. Voyons cela de plus près.

Soit X une application $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $B \subset \mathbb{R}$, notons

$$\{X \in B\} := \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\} =: X^{-1}(B).$$

Cette écriture « X^{-1} » ne suppose aucunement la bijectivité de X . Il s'agit seulement d'une notation commode pour « l'ensemble des antécédents des éléments de B par l'application X ». On aimerait pouvoir transporter par X la probabilité P , mesure définie sur (Ω, \mathcal{F}) en une probabilité P_X , définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ en posant :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad P_X(B) := P(X^{-1}(B)) = P(X \in B).$$

Pour que cette écriture ait un sens, encore faut-il que $X^{-1}(B)$ soit un élément de la tribu \mathcal{F} sur laquelle est définie P . Nous supposons donc que X vérifie la condition :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{F}. \quad (4.3)$$

Nous réserverons le nom de *variable aléatoire* aux applications $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (4.3). En pratique, cette condition (4.3) sera toujours vérifiée.

4.2 Généralités

4.2.1 Variables aléatoires réelles

Définition 4.1 (variable aléatoire réelle). *Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{F}) , ou plus simplement variable aléatoire, toute application X :*

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \omega \mapsto X(\omega),$$

vérifiant :

$$\text{pour tout intervalle } I \text{ de } \mathbb{R}, \quad X^{-1}(I) \in \mathcal{F}.$$

Nous admettrons que cette condition implique (4.3) et que cela permet de définir une probabilité P_X sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ par

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B).$$

Remarque 4.2. Il importe de noter que la mesure de probabilité P sur (Ω, \mathcal{F}) ne joue *aucun rôle* dans la définition de la notion de variable aléatoire. C'est pour cela que nous parlons de « variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{F}) » plutôt que sur (Ω, \mathcal{F}, P) .

Définition 4.3 (variable aléatoire discrète). *On appelle variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{F}) , toute application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes.*

(i) *L'ensemble des images $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ est une partie au plus dénombrable de \mathbb{R} . On peut donc numéroter ses éléments par des indices entiers¹*

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots\}.$$

(ii) *X est une variable aléatoire réelle, ce qui équivaut ici à*

$$\forall x \in X(\Omega), \quad X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}. \quad (4.4)$$

Notons que si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, pour tout intervalle I , $I \cap X(\Omega)$ est aussi au plus dénombrable et c'est ce qui permet d'écrire $X^{-1}(I)$ comme union au plus dénombrable d'évènements $X^{-1}(\{x\})$ pour $x \in X(\Omega)$.

4.2.2 Loi d'une variable aléatoire

Nous admettrons la proposition suivante.

Proposition 4.4. *Soit X une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{F}) et P une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) . La fonction d'ensembles $P_X = P \circ X^{-1}$ définie sur \mathcal{B} par*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad P_X(B) := P(X^{-1}(B)) = P(X \in B) \quad (4.5)$$

est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Autrement dit, une variable aléatoire X permet de *transporter* la probabilité P définie sur (Ω, \mathcal{F}) en une probabilité P_X définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Définition 4.5 (loi d'une variable aléatoire). *Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{F}) . On appelle loi de X sous P , ou plus simplement loi de X , la probabilité P_X sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ définie par (4.5).*

Si μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, on dit que X « suit » la loi μ si $P_X = P \circ X^{-1} = \mu$, autrement dit, si la loi de X sous P est la mesure μ .

1. Pour tous les exemples classiques que nous rencontrerons, il est possible de les numéroter de manière croissante : $x_0 < x_1 < x_2 \dots$. Mais ce n'est pas toujours le cas, car $X(\Omega)$ peut être par exemple, l'ensemble des décimaux (ou des rationnels) de $[0, 1]$.

Remarque 4.6. Dans les problèmes usuels de probabilités, on travaille souvent avec un seul (Ω, \mathcal{F}, P) et on se contente alors de l'appellation *loi de X* . Il n'en va pas de même en statistique où l'on met généralement en concurrence *plusieurs* modèles $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta)$, où θ est un paramètre inconnu et où on se propose de choisir un de ces modèles au vu des valeurs $X(\omega)$ observées. C'est là que l'appellation *loi de X sous P_θ* s'impose. Pour donner un exemple simple, considérons le problème du sondage d'un échantillon de 500 personnes avant le second tour d'une élection présidentielle opposant le candidat A au candidat B . Ici θ est la proportion *inconnue* d'électeurs votant A dans la population totale. Si X est le nombre de personnes interrogées favorables à A , la loi de X sous P_θ est la loi binomiale² $\text{Bin}(500, \theta)$.

Une autre situation où il est naturel de considérer plusieurs lois pour une même variable aléatoire est celle du *conditionnement*. Rappelons que si (Ω, \mathcal{F}, P) est un espace probabilisé et $H \in \mathcal{F}$ un évènement tel que $P(H) > 0$, on peut définir sur \mathcal{F} une nouvelle probabilité $P_H = P(\cdot | H)$ par

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad P_H(A) := P(A | H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Définition 4.7 (loi conditionnelle). *Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé, $H \in \mathcal{F}$ tel que $P(H) > 0$, X une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{F}) . On appelle loi conditionnelle de X sachant H , la loi de X sous P_H . En la notant $P_{X|H}$, on a donc*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad P_{X|H}(B) = P_H(X^{-1}(B)) = P(X \in B | H).$$

Il importe de ne pas se laisser induire en erreur par la notation $P_{X|H}$, elle ne concerne pas une nouvelle variable aléatoire « $X | H$ » mais bien toujours *la même* variable aléatoire X . Ce qui a changé, c'est la probabilité dont on munit (Ω, \mathcal{F}) et sous laquelle on considère la loi de X .

Remarque 4.8. Deux variables aléatoires peuvent *avoir même loi sans être égales*. Par exemple considérons le jet de deux dés, l'un bleu et l'autre rouge. Notons X le nombre de points indiqué par le dé bleu et Y celui du rouge. Les variables aléatoires X et Y sont définies sur le même espace probabilisé $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ muni de l'équiprobabilité. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ et :

$$\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{6}, \quad P(Y = k) = \frac{1}{6}.$$

Donc X et Y ont même loi : $P_X = P_Y$. Pour autant, on n'a pas l'égalité des variables aléatoires X et Y qui signifierait $X(\omega) = Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$ (égalité de deux applications). Autrement dit, en lançant deux dés on obtiendrait à *coup sûr* un double. En revanche nous pouvons considérer l'évènement $\{X = Y\}$ dont la réalisation n'est pas certaine et calculer sa probabilité :

$$P(X = Y) = P\left(\bigcup_{k=1}^6 \{(X, Y) = (k, k)\}\right) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

On en déduit : $P(X \neq Y) = 5/6$.

2. En fait c'est une loi hypergéométrique (tirages sans remise), mais en raison du théorème 4.26, on peut la remplacer en pratique par une binomiale.

4.2.3 Fonction de répartition

Définition 4.9 (f.d.r. d'une variable aléatoire). Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{F}) . On appelle fonction de répartition (f.d.r.) de X , la fonction F_X définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P_X(] - \infty, x]) = P(X \leq x).$$

La fonction F_X ne dépend que de la loi³ de X . Deux variables aléatoires de même loi ont même fonction de répartition. La proposition suivante donne les propriétés générales des fonctions de répartition des variables aléatoires réelles.

Proposition 4.10. La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle X est croissante sur \mathbb{R} , avec limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Elle est continue à droite et limitée à gauche en tout point de \mathbb{R} et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-). \quad (4.6)$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire caractérise sa loi, autrement dit : $F_X = F_Y$ si et seulement si les variables aléatoires X et Y ont même loi.

Rappelons ici que la notation $F(x-)$ désigne la limite à gauche de F au point x :

$$F(x-) = \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t < x}} F(t).$$

Nous admettrons cette proposition qui peut se démontrer en utilisant les propriétés générales d'une probabilité (prop. 3.4), sauf la partie « $F_X = F_Y \Rightarrow X$ et Y ont même loi » dont la difficulté dépasse le niveau de ce cours.

En combinant la définition de F_X et la propriété (4.6), on obtient les formules suivantes de calcul à l'aide de F_X des $P(X \in I)$ pour I intervalle de \mathbb{R} :

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a), \quad (4.7)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a-), \quad (4.8)$$

$$P(a \leq X < b) = F_X(b-) - F_X(a-), \quad (4.9)$$

$$P(a < X < b) = F_X(b-) - F_X(a), \quad (4.10)$$

$$P(X \leq a) = F_X(a), \quad (4.11)$$

$$P(X < a) = F_X(a-), \quad (4.12)$$

$$P(X > b) = 1 - F_X(b), \quad (4.13)$$

$$P(X \geq b) = 1 - F_X(b-). \quad (4.14)$$

Dans le cas particulier des variables aléatoires discrètes, on peut donner une formule explicite de calcul de la fonction de répartition.

Proposition 4.11 (f.d.r. d'une variable aléatoire discrète). Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{F}) . Fixons une numérotation de l'ensemble au plus dénombrable $X(\Omega)$ par les entiers : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots\}$ et notons $p_k := P(X = x_k)$. La fonction de répartition F_X vérifie alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} p_k \mathbf{1}_{[x_k, +\infty[}(x), \quad (4.15)$$

3. Il serait plus correct, mais plus long, de parler de f.d.r. de la loi de X ou même de f.d.r. de la loi de X sous P .

ce qui s'écrit aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leq x}} P(X = x_k). \quad (4.16)$$

De plus, si on peut numérotter les éléments de $X(\Omega)$ de manière croissante ($x_k < x_{k+1}$ pour tout k), la fonction F_X est constante sur chaque intervalle $[x_n, x_{n+1}[$ et vaut sur cet intervalle $F_X(x) = \sum_{k \leq n} p_k$.

Preuve. Soit x quelconque dans \mathbb{R} . En notant que l'évènement $\{X \in]-\infty, x]\}$ peut s'écrire ici comme l'union au plus dénombrable des $\{X = x_k\}$ pour $x_k \leq x$, on obtient

$$F_X(x) = P_X(] - \infty, x]) = \sum_{x_k \in]-\infty, x]} p_k = \sum_{x_k \in X(\Omega)} p_k \mathbf{1}_{[x_k, +\infty[}(x), \quad (4.17)$$

en notant que

$$\mathbf{1}_{[x_k, +\infty[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_k \leq x \\ 0 & \text{si } x_k > x \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_k \in]-\infty, x] \\ 0 & \text{si } x_k \notin]-\infty, x] \end{cases}.$$

Si la suite (x_k) est strictement croissante, le réel x appartient à un seul intervalle $[x_n, x_{n+1}[$. Pour $k \leq n$, on a alors $x_k \leq x_n \leq x$ et $\mathbf{1}_{[x_k, +\infty[}(x) = 1$, tandis que si $k > n$, $x_k \geq x_{n+1} > x$, donc $\mathbf{1}_{[x_k, +\infty[}(x) = 0$. On a donc $F_X(x) = \sum_{k \leq n} p_k$ et ceci étant valable pour tout $x \in [x_n, x_{n+1}[$, la fonction F_X est constante sur cet intervalle. \square

À titre d'exemple, la figure 4.2 donne la représentation graphique de F_S où S est la variable aléatoire somme des points de deux dés.

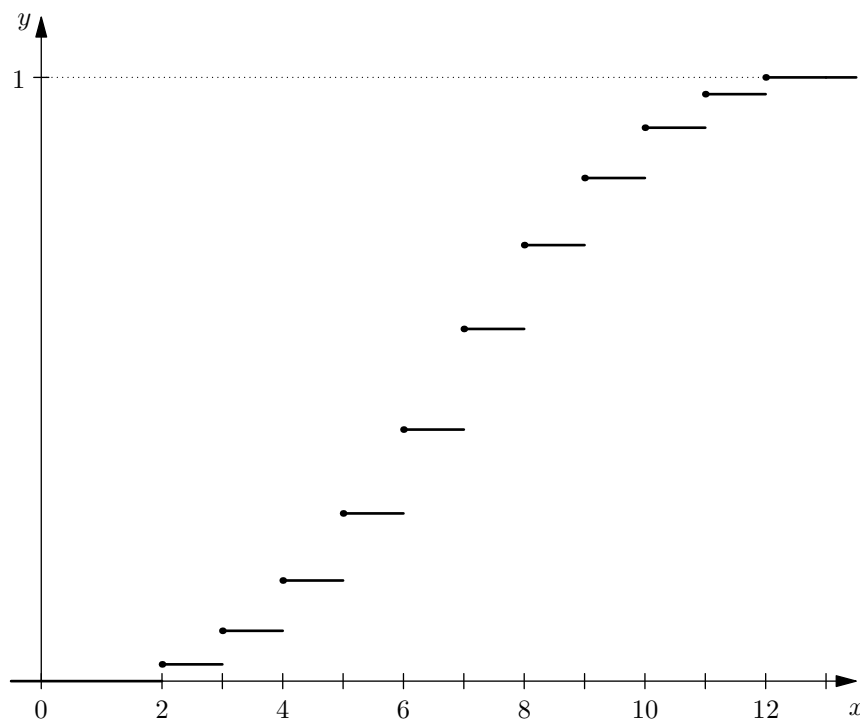


FIGURE 4.2 – f.d.r. de S somme des points de deux dés

Si l'on veut esquisser une classification sommaire des lois des variables aléatoires, on peut commencer par les partager entre les lois à f.d.r. continue sur \mathbb{R} et les lois à f.d.r. non

continue⁴ sur \mathbb{R} . On parle plus simplement de *lois continues* ou encore *lois diffuses* dans le premier cas et de lois non continues ou non diffuses dans le deuxième. Dans la famille des lois non continues, nous connaissons déjà la sous-famille des lois discrètes. Dans la famille des lois continues, une importante sous-famille est celle des *lois à densité* que nous allons examiner maintenant.

4.2.4 Lois à densité

La loi d'une variable aléatoire X est à densité f si pour tout intervalle de \mathbb{R} , la probabilité d'appartenance de X à cet intervalle peut s'écrire comme l'intégrale de f sur cet intervalle.

Définition 4.12 (densité de probabilité). *On appelle densité de probabilité sur \mathbb{R} toute fonction f vérifiant*

- a) f est définie et positive sur $\mathbb{R} \setminus K$, où K est une partie finie (éventuellement vide) de \mathbb{R} ;
- b) f est Riemann intégrable sur tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R} \setminus K$;
- c) l'intégrale généralisée de f sur $] -\infty, +\infty[$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

Si f est une fonction positive définie seulement sur un intervalle $]a, b[$ de \mathbb{R} et telle que $\int_a^b f(t) dt = 1$, on peut en faire une densité en la prolongeant à tout \mathbb{R} en posant $f(t) := 0$ pour $t \notin]a, b[$. Voici quatre exemples simples de densités :

$$\begin{aligned} f_1(t) &:= \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(t); & f_2(t) &:= \frac{1}{2\sqrt{t}} \mathbf{1}_{]0,1]}(t); \\ f_3(t) &:= e^{-t} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t); & f_4(t) &:= \frac{1}{\pi(1+t^2)}. \end{aligned}$$

Remarque 4.13 (usage des indicatrices dans les formules explicites). La définition de f_2 repose sur un *abus d'écriture* d'usage courant. En effet il y a en toute rigueur un problème pour calculer $f_2(t)$ lorsque $t \leq 0$, puisqu'alors il nous faut former le produit de l'expression $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ non définie (du moins en tant que nombre réel) par 0. La convention adoptée est que si la formule de calcul d'une fonction contient le produit d'une indicatrice par une expression non définie lorsque cette indicatrice est nulle, le produit vaut 0 dans ce cas. Ceci permet de considérer que la « définition » de f_2 comme ci-dessus est un raccourci d'écriture commode pour :

$$f_2(t) := \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}} & \text{si } t \in]0, 1], \\ 0 & \text{si } t \notin]0, 1]. \end{cases}$$

Définition 4.14. *Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{F}) . La loi de X sous P a pour densité f si :*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \geq a, \quad P(X \in]a, b]) = \int_a^b f(t) dt. \quad (4.18)$$

On dit aussi par abus de langage que X a pour densité f (lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur P).

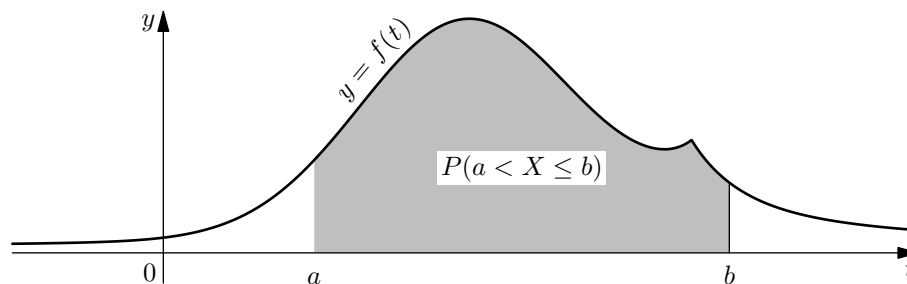


FIGURE 4.3 – $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$ pour X de densité f

Remarque 4.15. Il est clair d'après cette définition que si Y est une autre variable aléatoire ayant même loi que X (donc mêmes probabilités d'appartenance aux intervalles), elle a aussi la densité f . D'autre part, il n'y a pas unicité de la densité d'une variable aléatoire. Par exemple $g_1 = \mathbf{1}_{]0,1]}$ et $g_2 = \mathbf{1}_{]0,1[}$ sont deux densités de probabilité qui donnent les mêmes intégrales : $\int_a^b g_1(t) dt = \int_a^b g_2(t) dt$ pour toute paire de réels a et b . Ces deux fonctions peuvent chacune être prise comme densité de la loi uniforme sur $[0, 1]$.

L'exemple ci-dessus montre qu'il ne suffit pas de vérifier que deux variables aléatoires ont des densités qui diffèrent en un point pour en déduire qu'elles n'ont pas même loi. Nous admettrons le lemme suivant qui donne une condition suffisante pratique pour que deux variables à densité n'aient pas même loi.

Lemme 4.16. Soient X et Y deux variables aléatoires admettant respectivement pour densité les fonctions f et g . On suppose qu'il existe un réel t_0 tel que $f(t_0) \neq g(t_0)$ et que de plus, f et g sont toutes deux continues au point t_0 . Alors X et Y n'ont pas même loi.

Examinons maintenant les relations entre la densité d'une variable aléatoire, lorsqu'elle existe, et sa fonction de répartition, qui elle, existe toujours, .

Proposition 4.17. Si la variable aléatoire X a pour densité f , sa fonction de répartition F vérifie :

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$;
- b) F est continue sur \mathbb{R} ;
- c) si f est continue au point x_0 , alors F est dérivable en ce point et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Corollaire 4.18. Si la variable aléatoire X a pour densité f , les égalités suivantes sont vérifiées pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$:

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt,$$

$$P(X < a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt,$$

$$P(X > b) = P(X \geq b) = \int_b^{+\infty} f(t) dt.$$

Preuve de la proposition 4.17 et du corollaire 4.18.

4. On peut démontrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une f.d.r. quelconque est au plus dénombrable.

Preuve de a). Puisque X a pour densité f , on a pour tous réels $a < b$,

$$P(X \in]a, b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt. \quad (4.19)$$

Il suffit d'appliquer (4.19) avec $b = x$ fixé et $a = -n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ tel que $-n < x$. La suite d'évènements

$$A_n := \{X \in]-n, x]\}, \quad n > -x,$$

est croissante pour l'inclusion et a pour réunion $A = \{X \in]-\infty, x]\}$. Par continuité monotone séquentielle (cf. proposition 3.4), on a $P(A_n) \uparrow P(A)$, d'où

$$F(x) = P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X \in]-n, x]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

en notant que l'intégrale généralisée de la densité f converge en $-\infty$. \square

Preuve de b). Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque. On sait déjà que F est continue à droite en tout point comme toute fonction de répartition. Il suffit donc de montrer la continuité à gauche en x_0 . D'après le point b) de la définition 4.12, il existe $a < x_0$ tel que f soit définie et Riemann intégrable sur tout intervalle $[a, x] \subset [a, x_0[$. On a alors

$$\lim_{x \uparrow x_0} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt,$$

où la deuxième intégrale est soit une intégrale de Riemann ordinaire soit une intégrale généralisée convergente. Cette relation peut aussi s'écrire à l'aide de F :

$$\lim_{x \uparrow x_0} (F(x) - F(a)) = F(x_0) - F(a).$$

On en déduit par addition de $F(a)$ que $F(x)$ tend vers $F(x_0)$ quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures. \square

Preuve de c). Puisque f est continue en x_0 , elle est définie sur un voisinage de x_0 et donc sur un intervalle $]a, b[$ contenant x_0 . La continuité de f en x_0 peut alors s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset]a, b[; \quad \forall t \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \quad |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (4.20)$$

Pour tout h tel que $0 < |h| < \delta$, on a alors $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$ d'où

$$|F(x_0 + h) - F(x_0) - hf(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq |h|\varepsilon.$$

En divisant par h , puis en faisant tendre h vers 0, on voit que F a bien une dérivée en x_0 et que celle-ci vaut $f(x_0)$. \square

La proposition 4.17 est maintenant complètement démontrée. Pour vérifier le corollaire 4.18, il suffit de combiner les relations générales (4.7)–(4.14) avec (4.18) et les points a) et b) de la proposition 4.17. \square

Remarques 4.19.

1. D'après b) toute variable aléatoire à densité a une fonction de répartition continue. La réciproque est fautive : il existe des lois à fonction de répartition continue sans densité.

2. Par ailleurs si X a une densité, sa fonction de répartition n'est pas forcément dérivable en tout point. Par exemple la densité f_2 ci-dessus a pour fonction de répartition associée $F_2(x) = \sqrt{x}\mathbf{1}_{]0,1]}(x) + \mathbf{1}_{]1,+\infty[}(x)$ (cette écriture condensée signifie que $F_2(x)$ est nul sur \mathbb{R}^- , vaut \sqrt{x} entre 0 et 1 et reste constant égal à 1 sur $]1, +\infty[$). F_2 est dérivable en tout point sauf en 0 et en 1.

La proposition suivante donne une règle pratique permettant de trouver la densité (lorsqu'elle existe !) à partir de la fonction de répartition dans les cas les plus courants.

Proposition 4.20. *On suppose que la fonction de répartition F de X est C^1 par morceaux au sens suivant : F est continue sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R} privé (éventuellement) d'un ensemble fini de points $a_1 < \dots < a_n$. Sur chacun des intervalles ouverts $] -\infty, a_1[$, $]a_i, a_{i+1}[$ ($1 \leq i < n$), $]a_n, +\infty[$, la dérivée f de F est continue. Alors X a pour densité f .*

Preuve. Il est commode de poser $a_0 := -\infty$ et $a_{n+1} = +\infty$. Sur chacun des intervalles ouverts I découpés par les a_i , F est dérivable et sa dérivée f est continue. On sait alors que f a une infinité de primitives sur I et que si l'on fixe un α dans I , toute primitive H de f sur I est de la forme $H(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt + C$, avec C constante. Comme F est l'une des primitives de f sur I , en prenant $H = F$ et en faisant $x = \alpha$, on voit que la constante C vaut $F(\alpha)$. On a donc pour α et x quelconques dans I , $F(x) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$. Fixons α et prenons $x \geq \alpha$. Faisons tendre x vers la borne supérieure a_i de I . Comme F est continue (ou dans le cas $a_i = +\infty$, F a une limite 1), l'intégrale généralisée $\int_{\alpha}^{a_i} f(t) dt$ converge et vaut $F(a_i) - F(\alpha)$ (ou $1 - F(\alpha)$ quand $a_i = +\infty$). De même en faisant tendre α vers a_{i-1} on voit que l'intégrale généralisée $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t) dt$ converge et vaut $F(a_i) - F(a_{i-1})$ (ou $F(a_i)$ quand $a_{i-1} = -\infty$). Finalement soient a et $b > a$ quelconques dans \mathbb{R} . Si a et b sont dans le même intervalle I on a directement $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$. Sinon on note $(a_i)_{i_0 \leq i \leq i_1}$ l'ensemble de tous les a_i qui sont dans $[a, b]$ et on écrit

$$F(b) - F(a) = F(a_{i_0}) - F(a) + \sum_{i=i_0}^{i_1-1} (F(a_{i+1}) - F(a_i)) + F(b) - F(a_{i_1}) = \int_a^b f(t) dt,$$

en utilisant la relation de Chasles pour les intégrales généralisées. On a donc toujours $P(X \in]a, b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$, ce qui montre que X a pour densité f . \square

4.3 Lois discrètes classiques

Dans toute la suite du chapitre, on fixe un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) , on désigne par X une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{F}) et par P_X sa loi sous P . Cette clause sera implicite chaque fois que nous écrirons dans les définitions « La variable aléatoire X suit la loi ... si ... ». Pour X de loi discrète, nous utiliserons la notation :

$$X_P(\Omega) := \{x \in \mathbb{R}; P(X = x) > 0\}. \quad (4.21)$$

Bien sûr, $X_P(\Omega)$ est toujours inclus dans l'ensemble des valeurs « possibles » $X(\Omega)$ et dans la plupart des situations pratiques d'utilisation des variables aléatoires, ces deux ensembles sont égaux⁵.

5. Ce distinguo entre $X(\Omega)$ et $X_P(\Omega)$, à ignorer en première lecture, vient du fait que la loi d'une variable aléatoire réelle X , sous une certaine probabilité P , peut être discrète sans que X elle-même soit discrète au sens de la définition 4.3.

4.3.1 Lois de Bernoulli

Définition 4.21. La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in [0, 1]$) si $X_P(\Omega) = \{0, 1\}$ avec :

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p = q.$$

On notera $X \sim \text{Bern}(p)$.

Si A est un évènement de probabilité p , son indicatrice définie par :

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } A \text{ n'est pas réalisé} \end{cases}$$

est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . Réciproquement, si X est une v.a. de Bernoulli, on peut toujours écrire que $X = \mathbf{1}_A$ presque-sûrement, c'est-à-dire $P(X = \mathbf{1}_A) = 1$, en définissant $A = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = 1\}$.

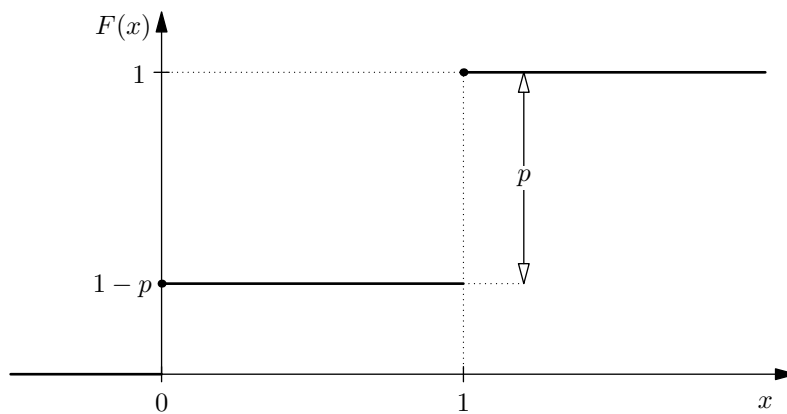


FIGURE 4.4 – F.d.r. de la loi $\text{Bern}(p)$

4.3.2 Loi uniforme sur un ensemble fini de réels

Définition 4.22. La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ si P_X est l'équiprobabilité sur cet ensemble. Notation : $X \sim \text{Unif}\{x_1, \dots, x_n\}$.

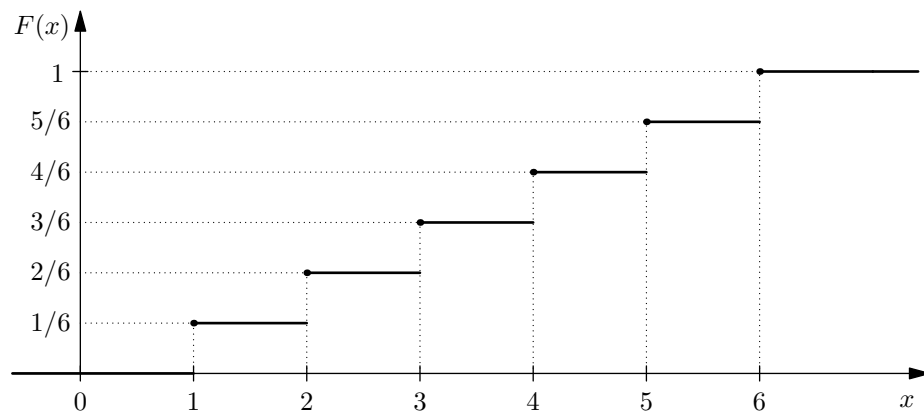
Autrement dit, $X_P(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = x_k) = \frac{1}{n}.$$

D'où

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad P_X(B) = \sum_{x_k \in B} \frac{1}{n} = \frac{\text{card}(B \cap \{x_1, \dots, x_n\})}{n}.$$

Par exemple, le nombre de points indiqué par un dé équilibré suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.

FIGURE 4.5 – F.d.r. de la loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$

4.3.3 Lois binomiales

Définition 4.23. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p , $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$, notation $X \sim \text{Bin}(n, p)$, si $X_P(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

La formule ci-dessus définit bien une loi de probabilité puisque les $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ sont positifs et :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1,$$

en appliquant la formule du binôme de Newton (d'où le nom de la loi). La loi binomiale $\text{Bin}(n, p)$ est la loi du nombre de succès obtenus en une suite de n épreuves répétées indépendantes avec pour chaque épreuve une probabilité de succès p . Ceci a été démontré dans l'exemple 3.41.

De même, soit A_1, \dots, A_n une famille d'évènements mutuellement indépendants tous de même probabilité p et notons X_i la variable de Bernoulli indicatrice de A_i :

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_i, \\ 0 & \text{si } \omega \in A_i^c. \end{cases}$$

Alors la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ suit la loi binomiale $\text{Bin}(n, p)$.

4.3.4 Lois hypergéométriques

Alors que la loi binomiale intervient dans les tirages avec remise, la loi hypergéométrique correspond aux tirages sans remise.

Exemple 4.24. Dans une production totale de N objets dont M sont défectueux, on prélève au hasard un échantillon de n objets (tirage sans remise). Soit X le nombre aléatoire d'objets défectueux dans l'échantillon. Quelle est sa loi ?

On peut prendre comme espace Ω l'ensemble de tous les échantillons possibles (toutes les parties à n éléments d'un ensemble de cardinal N) muni de l'équiprobabilité. Chaque échantillon a ainsi une probabilité $1/C_N^n$ d'être choisi. Les échantillons (évènements élémentaires) réalisant l'évènement $\{X = k\}$ sont ceux qui contiennent k objets défectueux et

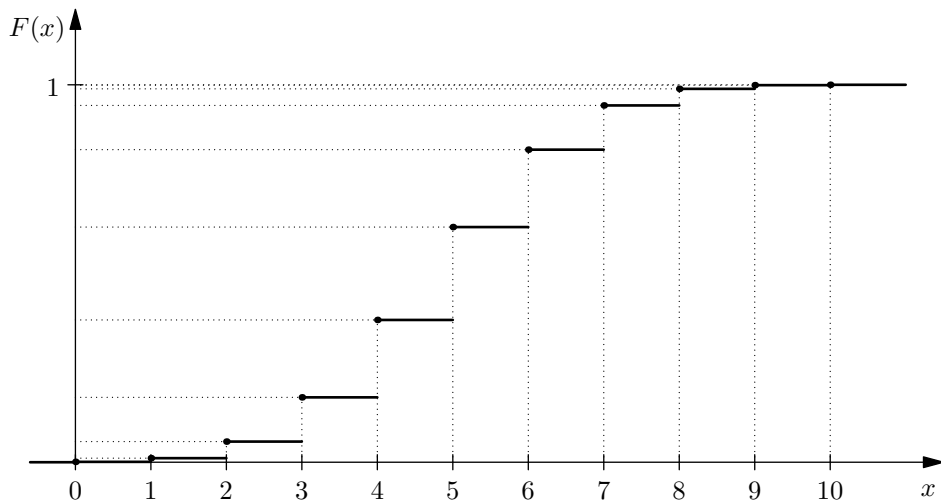


FIGURE 4.6 – F.d.r. de la loi Bin(10, 0.5)

$n - k$ objets non défectueux. Ceci n'est réalisable que si $0 \leq k \leq M$ et $0 \leq n - k \leq N - M$. Dénombrons ces échantillons. On les forme en choisissant k objets défectueux dans une sous-population de taille M et en complétant par $n - k$ objets non défectueux choisis dans une sous-population de taille $N - M$. Il y en a donc $C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}$. Finalement :

$$P(X = k) = \frac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad \text{si} \quad \begin{cases} 0 \leq k \leq M, \\ 0 \leq n - k \leq N - M. \end{cases} \quad (4.22)$$

Définition 4.25. La loi définie par (4.22) s'appelle loi hypergéométrique de paramètres N , M et n . Notation : $X \sim \text{Hypg}(N, M, n)$. Le paramètre N est l'effectif de la population totale, M celui de la sous-population à laquelle on s'intéresse et n la taille de l'échantillon observé.

Pour une taille d'échantillon n fixée, plus N et M sont grands, moins les tirages sans remise diffèrent des tirages avec remise. Plus précisément, la loi hypergéométrique converge vers la loi binomiale au sens suivant.

Théorème 4.26 (convergence de l'hypergéométrique vers la binomiale). On suppose que quand N tend vers $+\infty$, $M = M(N)$ tend vers $+\infty$ en vérifiant la condition :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{M}{N} = p \quad \text{avec} \quad 0 < p < 1. \quad (4.23)$$

Alors, n restant fixé, la loi hypergéométrique $\text{Hypg}(N, M, n)$ converge vers la loi binomiale $\text{Bin}(n, p)$, ce qui signifie que si $(X_N)_{N \geq 1}$ est une suite de v.a. avec $X_N \sim \text{Hypg}(N, M, n)$ et Y est une v.a. de loi binomiale $\text{Bin}(n, p)$, alors :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} P(X_N = k) = P(Y = k), \quad (4.24)$$

autrement dit :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \quad (4.25)$$

Preuve. Notons d'abord que comme p est *strictement* positif, l'hypothèse (4.23) implique que M tend vers $+\infty$ avec N ; il en va de même pour $N - M$ puisque $p < 1$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \frac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} &= \frac{M!}{k!(M-k)!} \times \frac{(N-M)!}{(n-k)!((N-M)-(n-k))!} \times \frac{n!(N-n)!}{N!} \\ &= C_n^k \frac{M!}{(M-k)!} \times \frac{(N-M)!}{((N-M)-(n-k))!} \times \frac{(N-n)!}{N!}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Comme k est *fixé* et M tend vers $+\infty$, la première fraction dans (4.26) est le produit de k facteurs $M, (M-1), \dots, (M-k+1)$ tous équivalents⁶ à M d'où :

$$\frac{M!}{(M-k)!} \sim M^k, \quad N \rightarrow +\infty. \quad (4.27)$$

Par le même argument avec $n-k$ et $N-M$ au lieu de k et M :

$$\frac{(N-M)!}{((N-M)-(n-k))!} \sim (N-M)^{n-k}, \quad N \rightarrow +\infty. \quad (4.28)$$

Enfin :

$$\frac{(N-n)!}{N!} \sim \frac{1}{N^n}, \quad N \rightarrow +\infty. \quad (4.29)$$

En reportant ces équivalents dans (4.26), on voit que lorsque N tend vers $+\infty$:

$$P(X_N = k) \sim C_n^k \frac{M^k (N-M)^{n-k}}{N^n} = C_n^k \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k}, \quad (4.30)$$

d'où : $\lim_{N \rightarrow +\infty} P(X_N = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. □

4.3.5 Lois géométriques

Exemple 4.27 (un problème de temps d'attente).

Considérons une suite infinie d'épreuves répétées indépendantes avec même probabilité de succès $p \in]0, 1[$. Soit X le numéro (aléatoire) de la première épreuve où l'on obtient un succès. Si l'on n'obtient jamais de succès, on conviendra que $X = +\infty$. Calculer $P(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire les valeurs de $P(X \in \mathbb{N}^*)$ et $P(X = +\infty)$.

En notant $R_i = \{\text{succès à la } i\text{-ème épreuve}\}$, on a :

$$\begin{aligned} \{X = k\} &= \{\text{échec aux } (k-1) \text{ premières et succès à la } k\text{-ième}\} \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} R_i^c \right) \cap R_k. \end{aligned}$$

D'où par indépendance des épreuves :

$$P(X = k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} P(R_i^c) \right) \times P(R_k) = (1-p)^{k-1} p.$$

6. Rappelons que deux suites (u_N) et (v_N) sont dites équivalentes lorsque $u_N = v_N(1 + \varepsilon_N)$ avec ε_N tendant vers 0 quand N tend vers $+\infty$ (notation : $u_N \sim v_N$).

Posons $q = 1 - p$ et notons que $q \in]0, 1[$. La décomposition de l'évènement $\{X \in \mathbb{N}^*\}$ en la réunion disjointe des $\{X = k\}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) nous donne par σ -additivité :

$$\begin{aligned} P(X \in \mathbb{N}^*) &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} P(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} q^{k-1} p \\ &= p \sum_{l \in \mathbb{N}} q^l \quad (l = k - 1) \\ &= p \frac{1}{1 - q} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi avec probabilité 1, le premier succès a lieu au bout d'un nombre *fini* d'épreuves⁷. Remarquons qu'on aurait pu arriver au même résultat en montrant que $P(X = +\infty) = 0$ par la méthode utilisée à l'exemple 3.41 c) en échangeant les rôles de succès et échec. En toute rigueur, X n'est pas une variable aléatoire discrète au sens de la définition 4.3 puisque $X(\Omega)$ est une partie dénombrable de $\overline{\mathbb{R}}$ au lieu de \mathbb{R} . Néanmoins $X' := X \mathbf{1}_{\{X < +\infty\}}$ est une variable aléatoire discrète et ce qui précède montre que X' a même loi⁸ que X . Cette loi est celle du temps d'attente du premier succès dans une suite d'épreuves répétées indépendantes, on l'appelle *loi géométrique de paramètre p* .

Définition 4.28. Une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, si $X_P(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

Notation : $X \sim \text{Geom}(p)$.

Lorsque X suit une loi géométrique, les probabilités $P(X > n)$ ont une expression particulièrement simple en fonction de $q = 1 - p$. Calculons les de deux façons.

Première méthode. On calcule le reste d'une série géométrique :

$$\begin{aligned} P(X > n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-1} p = \sum_{l=n}^{+\infty} q^l p \\ &= pq^n \sum_{l=n}^{+\infty} q^{l-n} = pq^n \sum_{j=0}^{+\infty} q^j \\ &= \frac{pq^n}{1 - q} = q^n. \end{aligned}$$

Deuxième méthode. On se place dans la situation de l'exemple 4.27. L'évènement $\{X > n\}$ se réalise si et seulement si les n premières épreuves donnent un échec, d'où $\{X > n\} = \bigcap_{i=1}^n R_i^c$. En utilisant l'indépendance des R_i on en déduit :

$$P(X > n) = \prod_{i=1}^n P(R_i^c) = q^n.$$

4.3.6 Lois de Poisson

Définition 4.29. On dit que la variable aléatoire discrète X suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha > 0$ si $X_P(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \frac{e^{-\alpha} \alpha^k}{k!}.$$

7. Mais pas *borné* par un nombre fixé choisi avant le début des épreuves...

8. Pour être tout à fait rigoureux, il faudrait avoir défini les v.a. à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et leurs lois, ce qui nous aurait fait sortir du cadre de ce cours.

Notation : $X \sim \text{Pois}(\alpha)$.

On sait que la fonction exponentielle a un développement en série entière avec rayon de convergence infini. En particulier :

$$\forall \alpha > 0, \quad e^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!}.$$

On a donc bien :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = e^{-\alpha} e^\alpha = 1.$$

Une des raisons de l'importance de cette loi est le théorème de convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson.

Théorème 4.30. *Si $(p_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels de $[0, 1]$ vérifiant*

$$np_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha \in]0, +\infty[, \quad (4.31)$$

alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{e^{-\alpha} \alpha^k}{k!}.$$

Preuve. L'hypothèse (4.31) peut s'écrire sous la forme plus maniable : $np_n = \alpha u_n$ avec u_n tendant vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi $p_n = \alpha u_n / n$ et

$$C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^k u_n^k \left(1 - \frac{\alpha u_n}{n}\right)^{n-k}. \quad (4.32)$$

Pour obtenir la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$, k restant fixé, on remarque successivement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} = 1, \quad (4.33)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^k = 1, \quad (4.34)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\alpha u_n}{n}\right)^{n-k} = e^{-\alpha}. \quad (4.35)$$

Pour justifier (4.35), on écrit :

$$\left(1 - \frac{\alpha u_n}{n}\right)^{n-k} = \exp\left[(n-k) \ln\left(1 - \frac{\alpha u_n}{n}\right)\right], \quad (4.36)$$

puis comme $\alpha u_n / n$ tend vers 0 :

$$(n-k) \ln\left(1 - \frac{\alpha u_n}{n}\right) \sim n\left(-\frac{\alpha u_n}{n}\right) \sim -\alpha, \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Par continuité de la fonction exponentielle, la limite du second membre de (4.36) est donc bien $e^{-\alpha}$, ce qui prouve (4.35). On obtient alors la conclusion du théorème en passant à la limite dans (4.32). \square

Le théorème 4.30 sert de justification théorique à la règle pratique suivante : lorsque n est « grand » et np « petit », on peut remplacer la loi $\text{Bin}(n, p)$ par la loi $\text{Pois}(\alpha)$ où $\alpha = np$. En général on considère que n de l'ordre de quelques centaines et np de l'ordre de quelques unités donnent une bonne approximation. Sous cette forme, cette règle relève plus de la cuisine que des mathématiques. Il est possible par des techniques élémentaires de contrôler l'erreur commise en utilisant cette approximation. Nous nous contenterons ici d'un exemple classique et d'une comparaison graphique pour illustrer la qualité de cette approximation.

Exemple 4.31. Le président d'un bureau de vote est né un 1^{er} avril. Il décide de noter le nombre X de personnes ayant leur anniversaire le même jour que lui parmi les 500 premiers électeurs qui se présentent.

La situation peut être assimilée à une suite d'épreuves répétées indépendantes et X est une variable aléatoire binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 1/365$ (en négligeant la question des années bissextiles sinon on prendrait $p = 4/(3 \times 365 + 366)$, ce qui ne changerait pas grand chose numériquement). Ainsi :

$$P(X = k) = C_{500}^k \left(\frac{1}{365}\right)^k \left(\frac{364}{365}\right)^{500-k}.$$

La règle énoncée ci-dessus nous conduit à approximer la loi de X par une loi de Poisson de paramètre :

$$\alpha = np = 500 \times \frac{1}{365}.$$

Voici une comparaison numérique pour les petites valeurs de k :

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $P(X = k)$ | 0,2537 | 0,3484 | 0,2388 | 0,1089 | 0,0372 | 0,0101 |
| $\frac{e^{-\alpha} \alpha^k}{k!}$ | 0,2541 | 0,3481 | 0,2385 | 0,1089 | 0,0373 | 0,0102 |

Remarquons que la probabilité d'observer plus de 5 anniversaires un 1^{er} avril, calculée par la loi exacte de X ou par son approximation poissonnienne, est inférieure à 0,003.

Comparaison graphique :

Les *diagrammes en bâtons* ci-dessous représentent la loi binomiale $\text{Bin}(n, p)$ et la loi de Poisson approximante $\text{Pois}(\alpha)$ avec $\alpha = np$. Les segments verticaux (les bâtons) du diagramme représentant la loi d'une variable discrète X (à valeurs dans \mathbb{N}) ont une hauteur égale à $P(X = k)$ avec une extrémité inférieure au point d'abscisse k de l'axe horizontal. Pour la lisibilité, on a légèrement décalé vers la gauche les bâtons de la loi de Poisson et vers la droite ceux de la loi binomiale. Bien que le diagramme en bâtons de la loi binomiale $\text{Bin}(n, p)$ soit constitué théoriquement de $n + 1$ bâtons (et que celui de la loi de Poisson en ait une infinité), seul un petit nombre de bâtons est visible sur les graphiques, les autres correspondant à des probabilités trop petites⁹. On constate que pour $n = 200$ (figure 4.10), la différence entre les deux diagrammes n'est pratiquement plus discernable visuellement.

9. En fait, on s'est contenté d'afficher les probabilités correspondant à k inférieur ou égal à la partie entière supérieure de $2\alpha + 4$. On peut vérifier que la somme des probabilités ainsi négligées est inférieure à 1%, pour chacune des deux lois.

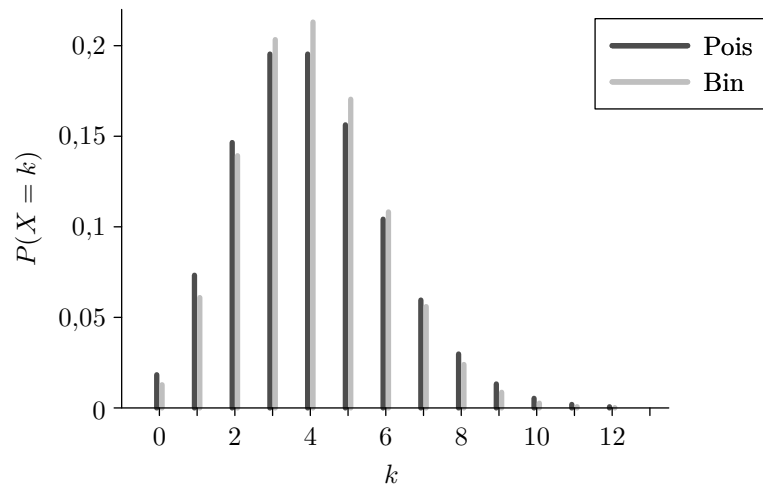


FIGURE 4.7 – Lois Bin(25; 0,16) et Pois(4)

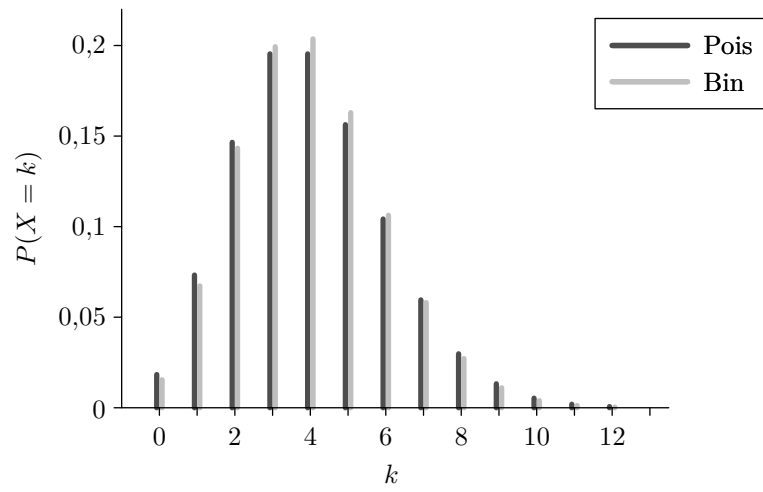


FIGURE 4.8 – Lois Bin(50; 0,08) et Pois(4)

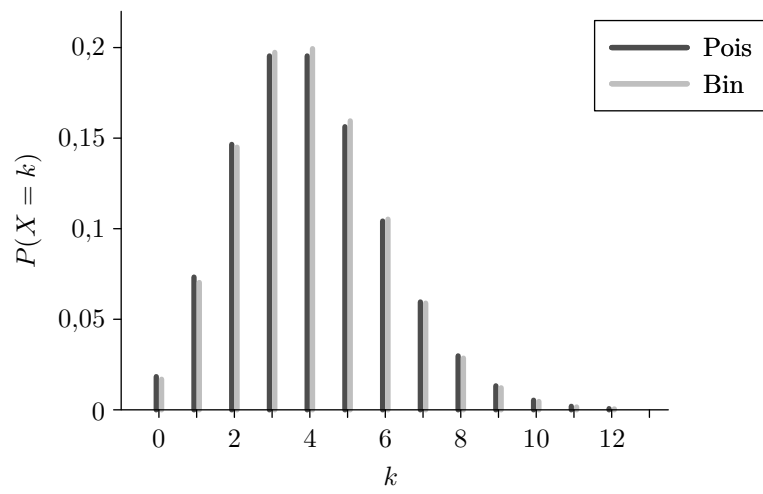


FIGURE 4.9 – Lois Bin(100; 0,04) et Pois(4)

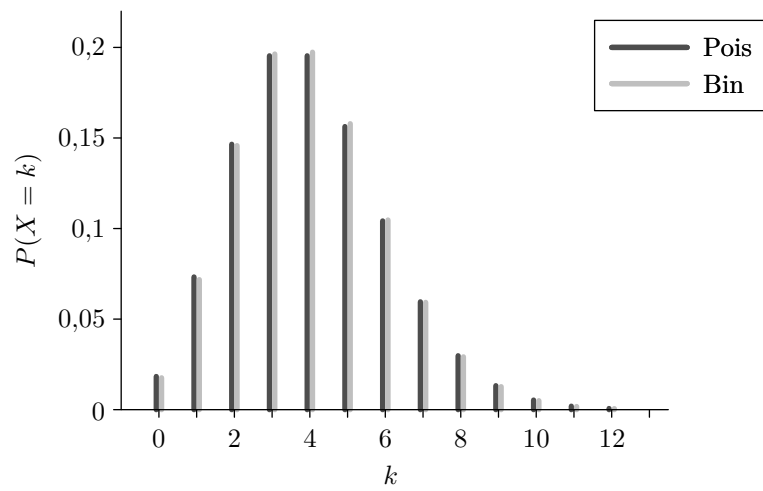


FIGURE 4.10 – Lois Bin(200; 0,02) et Pois(4)

Le théorème suivant, que nous admettrons, permet de saisir l'importance de la loi de Poisson, en justifiant au passage le bien fondé de l'hypothèse (4.31) du théorème de convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson.

Théorème 4.32. *Soit un phénomène donnant lieu à des observations aléatoires vérifiant les hypothèses suivantes.*

- (a) *Les observations dans des intervalles de temps disjoints sont indépendantes*
- (b) *Pour tout réel t tel que $0 \leq t < t+T \leq 1$ la loi du nombre (aléatoire) d'observations dans l'intervalle $[t, t+T[$ ne dépend que de la durée T de cet intervalle.*
- (c) *En notant p_n la probabilité d'avoir exactement une observation dans un intervalle de temps de durée $1/n$ et r_n celle d'en avoir au moins une, $\varepsilon_n = (r_n - p_n)/p_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.*

Alors le nombre aléatoire d'observations dans l'intervalle $[0, 1[$ suit la loi de Poisson de paramètre α défini par $\alpha = -\ln(1 - r_1)$.

Remarque 4.33. L'examen attentif de la démonstration du théorème ci-dessus montre que la structure d'ordre de l'intervalle $[0, 1[$ n'y joue aucun rôle. L'important est la possibilité de réaliser une partition de $[0, 1[$ en intervalles de même longueur tendant vers 0. Par conséquent en remplaçant la longueur par l'aire ou le volume, il est possible d'obtenir une version spatiale en dimension 2 ou 3 du théorème 4.32. Ceci permet de comprendre pourquoi la loi de Poisson fournit une bonne modélisation par exemple du nombre d'erreurs typographiques dans une page imprimée, du nombre d'impacts de météorites sur un territoire donné, du nombre d'accidents sur une portion d'autoroute pendant une période donnée, du nombre de raisins dans une portion de cake, du nombre d'étoiles dans une région de l'univers, ...

4.4 Lois à densité classiques

4.4.1 Lois uniformes

Définition 4.34. *La variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) si*

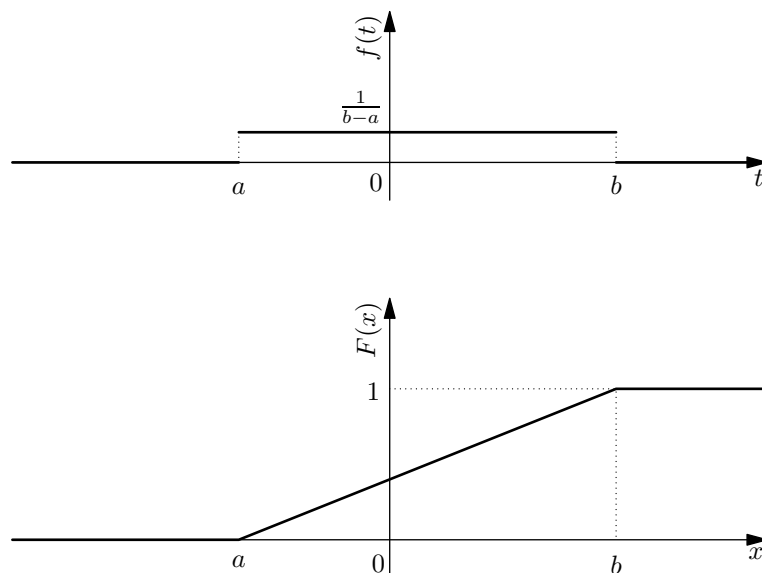
$$\text{pour tout } I \text{ intervalle de } \mathbb{R}, \quad P(X \in I) = P_X(I) = \frac{\ell([a, b] \cap I)}{\ell([a, b])}, \quad (4.37)$$

où ℓ désigne la longueur (en particulier $\ell([a, b]) = b - a$). Notation : $X \sim \text{Unif}[a, b]$.

Calculons la fonction de répartition F en prenant $I =]-\infty, x]$ pour x quelconque dans (4.37).

$$F(x) = P_X(]-\infty, x]) = \frac{\ell([a, b] \cap]-\infty, x])}{\ell([a, b])} = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < a; \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b; \\ 1 & \text{si } b \leq x < +\infty. \end{cases}$$

La fonction de répartition F est affine par morceaux, donc aussi C^1 par morceaux au sens de la proposition 4.20, avec dérivabilité sur $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ (figure 4.11). La loi a donc une densité f qui s'obtient par dérivation de F , ce qui nous donne $f(t) = 0$ si $t < a$, $f(t) = \frac{1}{b-a}$ si $a < t < b$ et $f(t) = 0$ si $t > b$. On complète la définition de f en la prolongeant en a et

FIGURE 4.11 – Densité et f.d.r. de la loi Unif $[a, b]$

b , par exemple en posant $f(a) = f(b) = \frac{1}{b-a}$. La loi uniforme sur $[a, b]$ admet donc pour densité

$$f = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}.$$

Dans les calculs faisant intervenir la loi uniforme sur $[a, b]$, il est vivement conseillé d'utiliser chaque fois que c'est possible la formule (4.37) de préférence aux calculs d'intégrales de f .

Remarque 4.35. Comme $\ell(\{a\}) = \ell(\{b\}) = 0$, la loi uniforme sur $[a, b]$ est aussi la loi uniforme sur $]a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b[$.

Une des raisons de l'importance de la loi uniforme sur $[0, 1]$ est le théorème suivant.

Théorème 4.36. Si X est une variable aléatoire réelle de fonction de répartition continue strictement croissante F et si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, alors la variable aléatoire $Y := F^{-1}(U)$ a même loi que X .

Rappelons qu'avoir même loi que X ne signifie aucunement être égale à X . Ce théorème permet de réduire la simulation informatique de la loi de X à celle de U . Nous verrons ultérieurement que ce résultat s'étend à toutes les fonctions de répartition, sans hypothèse de continuité ni de croissance stricte, *via* une redéfinition de F^{-1} .

Preuve. Comme F est continue strictement croissante, c'est une *bijection* de \mathbb{R} sur son image $]0, 1[$ (en raison de la stricte monotonie de F , les bornes 0 et 1 ne sont pas atteintes). Par conséquent $F^{-1} :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et vérifie :

$$\forall u \in]0, 1[, \forall x \in \mathbb{R}, \quad F^{-1}(u) \leq x \text{ si et seulement si } u \leq F(x).$$

Comme $P(0 < U < 1) = 1$, on en déduit que les événements $\{F^{-1}(U) \leq x\}$ et $\{U \leq F(x)\}$ ont même probabilité. Pour obtenir la fonction de répartition de Y , on remarque alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(Y \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = \frac{\ell([0, F(x)])}{\ell([0, 1])} = F(x).$$

Ainsi Y a pour fonction de répartition F , donc a même loi que X . □

4.4.2 Lois exponentielles

Définition 4.37. Soit a un réel strictement positif. La variable aléatoire réelle X suit la loi exponentielle de paramètre a si elle admet pour densité

$$f(t) = ae^{-at}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t).$$

Notation : $X \sim \text{Exp}(a)$.

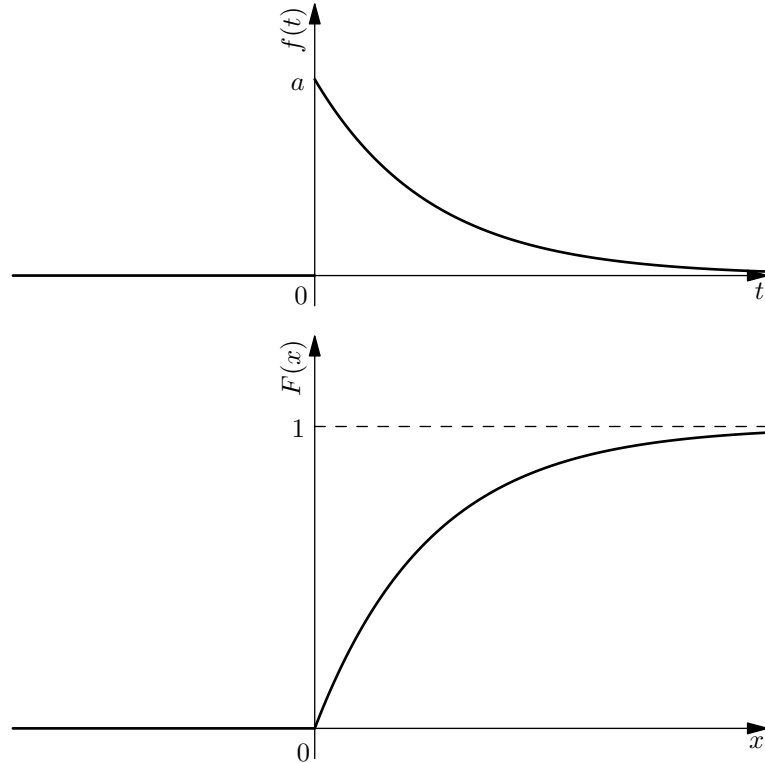


FIGURE 4.12 – Densité et f.d.r. de la loi $\text{Exp}(a)$

En pratique, plutôt que de travailler avec la fonction de répartition d'une loi exponentielle, il est plus commode d'utiliser la *fonction de survie* G :

$$G(x) = P(X > x) = 1 - F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-ax} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Les lois exponentielles sont souvent choisies pour modéliser des temps d'attente : temps d'attente à partir de maintenant du prochain tremblement de terre, du prochain faux numéro sur une ligne téléphonique, de la prochaine désintégration d'un atome de radium, etc.

La raison de ce choix est la propriété *d'absence de mémoire* en temps continu qui caractérise la famille des lois exponentielles.

Théorème 4.38 (absence de mémoire).

i) Si la variable aléatoire X suit une loi exponentielle, elle vérifie la propriété d'absence de mémoire :

$$\forall s \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad P(X > t + s \mid X > t) = P(X > s). \quad (4.38)$$

ii) Réciproquement si une variable aléatoire X vérifie (4.38), elle suit une loi exponentielle.

Comme la fonction de survie caractérise la loi, (4.38) signifie que la loi de $(X - t)$ conditionnelle à $\{X > t\}$ est la même que la loi de X .

En préliminaire à la preuve du théorème¹⁰, remarquons que la probabilité conditionnelle dans (4.38) s'exprime commodément à l'aide de la fonction de survie G , définie par $G(x) := P(X > x)$. En effet, s étant positif, l'inégalité $t + s \geq t$ entraîne l'inclusion $\{X > t + s\} \subset \{X > t\}$ et l'égalité d'événements : $\{X > t + s\} \cap \{X > t\} = \{X > t + s\}$. On en déduit

$$P(X > t + s \mid X > t) = \frac{P(X > t + s)}{P(X > t)} = \frac{G(t + s)}{G(t)}. \quad (4.39)$$

Preuve de i). Si X suit la loi exponentielle de paramètre a , $G(x) = e^{-ax}$ pour tout x positif et (4.39) se traduit alors par :

$$P(X > t + s \mid X > t) = \frac{e^{-a(t+s)}}{e^{-at}} = e^{-as} = P(X > s).$$

Ainsi X de loi $\text{Exp}(a)$ vérifie la propriété d'absence de mémoire (4.38). \square

Preuve de ii). Soit X une variable aléatoire dont la loi vérifie (4.38) et G sa fonction de survie. Comme $G = 1 - F$ (où F désigne la fonction de répartition de X), G est décroissante et continue à droite et tend vers 0 en $+\infty$. De plus l'écriture de (4.38) suppose implicitement que $G(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ car sinon $P(\cdot \mid X > t)$ ne serait pas définie. Grâce à (4.39), on voit que la propriété d'absence de mémoire (4.38) équivaut à

$$\forall s \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{G(t + s)}{G(t)} = G(s).$$

La fonction de survie G doit donc être une solution décroissante, continue à droite, tendant vers 0 en $+\infty$ et telle que $0 < G(t) \leq 1$ de l'équation fonctionnelle¹¹ :

$$\forall s \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad G(t + s) = G(t)G(s). \quad (4.40)$$

En faisant $s = t = 0$ dans (4.40), on obtient $G(0) = G(0)^2$ et comme $G(0) > 0$, on a

$$G(0) = 1. \quad (4.41)$$

En faisant $s = t$ dans (4.40), on obtient $G(2t) = G(t)^2$, puis de proche en proche

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 0, \quad G(nt) = G(t)^n.$$

En particulier pour $t = 1/d$, $d \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall d \in \mathbb{N}^*, \quad G\left(\frac{n}{d}\right) = G\left(\frac{1}{d}\right)^n. \quad (4.42)$$

Lorsque $n = d$, (4.42) donne $G(1) = G(1/d)^d$ d'où

$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad G\left(\frac{1}{d}\right) = G(1)^{1/d}. \quad (4.43)$$

10. Seule la preuve du point i) est exigible des étudiants de ce cours.

11. Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est ... une fonction! Les équations différentielles sont des exemples bien connus d'équations fonctionnelles.

Nous connaissons maintenant G sur l'ensemble des rationnels positifs puisque (4.41), (4.42) et (4.43) nous donnent

$$\forall r \in \mathbb{Q}^+, \quad G(r) = G(1)^r. \quad (4.44)$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+$, x est limite d'une suite décroissante (r_n) de rationnels positifs. Comme G est continue à droite, $G(r_n)$ converge vers $G(x)$. D'autre part l'application $y \mapsto G(1)^y$ est continue sur \mathbb{R} . Ainsi en appliquant (4.44) à r_n et en faisant tendre n vers l'infini on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad G(x) = G(1)^x. \quad (4.45)$$

A priori la constante $G(1)$ est dans $]0, 1]$. On peut écarter la valeur $G(1) = 1$ car sinon d'après (4.45), la limite en $+\infty$ de G serait 1 alors qu'elle vaut 0.

Finalement, puisque $0 < G(1) < 1$, on peut poser $G(1) = e^{-a}$ pour un réel $a > 0$ (cela revient à prendre $a = -\ln G(1)$). On peut alors réécrire (4.45) sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad G(x) = e^{-ax}.$$

La fonction de survie G est donc la même que celle de la loi exponentielle de paramètre a , donc X suit cette loi (puisque la fonction de survie caractérise la loi au même titre que la fonction de répartition). \square

4.4.3 Lois gaussiennes

Ces lois jouent un rôle capital dans l'étude des lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes. Par exemple (théorème de de Moivre Laplace) si S_n suit la loi $\text{Bin}(n, p)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(S_n - np \leq x\sqrt{np(1-p)})$ converge quand n tend vers l'infini vers $\Phi(x)$, où Φ est la f.d.r. de la loi gaussienne $\mathfrak{N}(0, 1)$.

Définition 4.39. On dit que la variable aléatoire X suit la loi gaussienne ou normale $\mathfrak{N}(m, \sigma)$ si elle a pour densité la fonction :

$$f_{m,\sigma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad t \longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

La loi $\mathfrak{N}(0, 1)$ est appelée loi normale standard.

Tous les calculs de probabilités concernant une variable aléatoire de loi $\mathfrak{N}(m, \sigma)$ peuvent se ramener à des calculs sur une variable de loi normale standard.

Proposition 4.40. Si la variable aléatoire X suit la loi $\mathfrak{N}(m, \sigma)$, $Y := (X - m)/\sigma$ suit la loi $\mathfrak{N}(0, 1)$. Autrement dit, toute v.a. gaussienne X de loi $\mathfrak{N}(m, \sigma)$ peut s'écrire $X = \sigma Y + m$ avec Y de loi $\mathfrak{N}(0, 1)$.

Preuve. On calcule $P(a < Y \leq b)$ pour a et b réels quelconques ($a < b$).

$$\begin{aligned} P\left(a < \frac{X - m}{\sigma} \leq b\right) &= P(\sigma a + m < X \leq \sigma b + m) \\ &= \int_{\sigma a + m}^{\sigma b + m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right) dx. \end{aligned}$$

Il suffit alors de faire le changement de variable $y = (x - m)/\sigma$ pour obtenir

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b > a, \quad P(a < Y \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

Donc Y a bien pour densité $f_{0,1}$. \square

Remarque 4.41. En adaptant le calcul fait dans la preuve de la proposition 4.40, on voit facilement que la famille des lois gaussiennes est *stable par transformations affines* : si X a pour loi $\mathfrak{N}(m, \sigma)$, alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, la v.a. $\alpha X + \beta$ est encore gaussienne, de loi $\mathfrak{N}(\alpha m + \beta, |\alpha|\sigma)$.

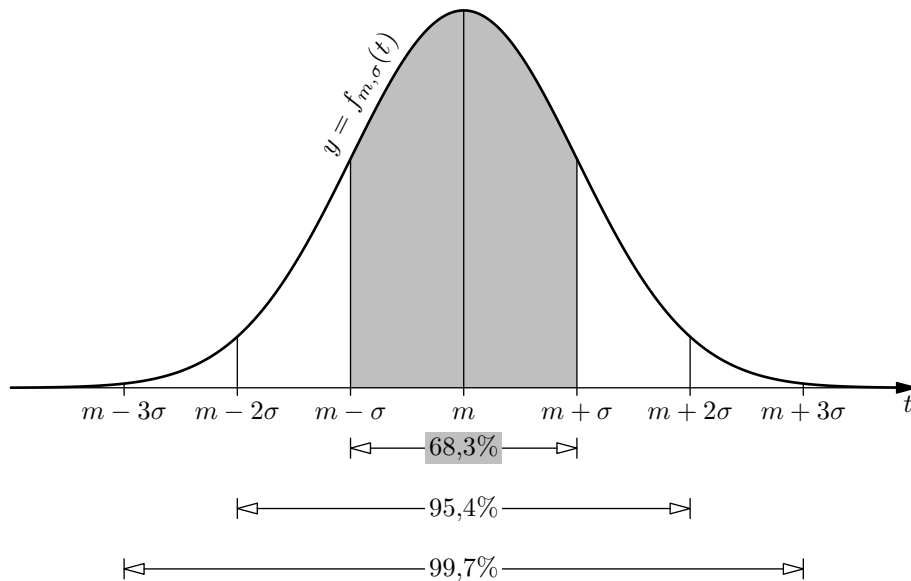


FIGURE 4.13 – Concentration de la loi $\mathfrak{N}(m, \sigma)$ autour de m

La figure 4.13 illustre la signification du paramètre de position m et du paramètre de dispersion σ pour la loi gaussienne $\mathfrak{N}(m, \sigma)$.

Cette concentration de pratiquement toute la probabilité dans l'intervalle $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$ permet l'utilisation des lois gaussiennes pour modéliser des grandeurs aléatoires qui *a priori* prennent leurs valeurs seulement dans un intervalle borné de \mathbb{R} : taille, poids, température, ..., même si théoriquement une variable gaussienne peut prendre toute valeur entre $-\infty$ et $+\infty$.

Il n'existe pas d'expression d'une primitive de la densité gaussienne $f_{m, \sigma}$ à l'aide des fonctions usuelles. Les valeurs de la fonction de répartition Φ de $\mathfrak{N}(0, 1)$ sont tabulées, cf. page 99. D'après la proposition 4.40, ceci suffit pour calculer numériquement n'importe quelle f.d.r. de loi gaussienne.

4.4.4 Lois de Cauchy

Définition 4.42. La variable aléatoire X suit la loi de Cauchy (ou loi de Cauchy de paramètres 0 et 1) si elle admet pour densité :

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1 + t^2)}.$$

Notation : $X \sim \text{Cau}(0, 1)$.

Cette loi est *symétrique*, ce qui signifie que X et $-X$ ont même loi, ceci résultant ici de la parité de f . La fonction de répartition F est donnée par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{\pi(1 + t^2)} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right),$$

où $\arctan x$ est l'unique réel $y \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $\tan y = x$.

Si $Y = a + bX$, avec X de loi $\text{Cau}(0, 1)$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, on dit encore que Y suit une loi de Cauchy, de paramètres (a, b) , notation $Y \sim \text{Cau}(a, b)$. La densité est alors

$$f_{a,b}(t) = \frac{1}{\pi b} \frac{1}{1 + \left(\frac{t-a}{b}\right)^2}.$$

4.4.5 Tables de la loi normale

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale standard $\mathfrak{N}(0, 1)$:

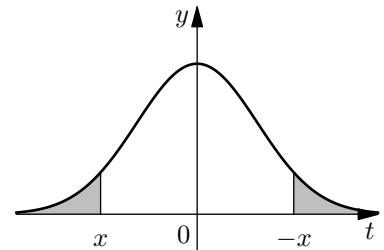
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

La table de la page 99 donne des valeurs approchées à 10^{-4} près de $\Phi(x)$ pour $x = \frac{k}{100}$, $k \in \llbracket 0, 299 \rrbracket$. Pour lire la valeur de $\Phi(x)$, on repère dans la première colonne la ligne qui comporte le chiffre des unités et celui des dixièmes de x . À l'intersection de cette ligne et de la colonne dont l'entête est le chiffre des centièmes de x , on lit la valeur de $\Phi(x)$. Par exemple pour $\Phi(1,37)$, on lit à l'intersection de la ligne commençant par 1,3 et de la colonne commençant par 0,07 la valeur $\Phi(1,37) \simeq 0,9147$.

La table donne les valeurs de $\Phi(x)$ pour x positif. Lorsque x est négatif, on utilise la relation

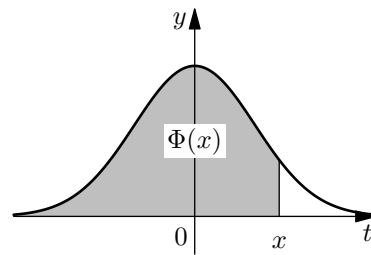
$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

qui résulte de la parité de la densité gaussienne $\mathfrak{N}(0, 1)$, voir ci-contre. Exemple : pour $x = -1,8$, on trouve : $\Phi(x) = 1 - \Phi(1,8) \simeq 1 - 0,9641 = 0,0359$.



Pour les « très grandes valeurs de x », disons $|x| > 4$, on peut utiliser l'encadrement suivant de la « queue » de la loi normale.

$$\forall x > 0, \quad \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Table des valeurs de Φ , f.d.r. de la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$ 

| x | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |

Table pour les grandes valeurs de x

| x | 3,0 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 | 3,8 | 4,0 |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|
| $\Phi(x)$ | 0,99865 | 0,99904 | 0,99931 | 0,99952 | 0,99966 | 0,99976 | 0,999841 | 0,999928 | 0,999968 |

