Année Universitaire : 2020-2021

Département : S.CM.I

Module : Algèbre 1

Correction des exercices du chapitre 2

Ex1

1) $A \cap (B \cup C) = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in (B \cup C)\} = \{x \,/\, x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\}$
$= \{x \,/\, (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\} = \{x \,/\, x \in (A \cap B)\} \cup \{x \,/\, x \in (A \cap C)\}$
$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2) Soit $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$
$\Leftrightarrow [x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)]$
$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ex2 1)

a) $A \Delta E = (A \cap \bar{E}) \cup (E \cap \bar{A}) = (A \cap \emptyset) \cup (\bar{A}) = \emptyset \cup \bar{A} = \bar{A}$
b) $A \Delta \emptyset = (A \cap \bar{\emptyset}) \cup (\emptyset \cap \bar{A}) = (A \cap E) \cup (\emptyset) = A$
c) $A \Delta A = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{A}) = \emptyset$

2) Pour que l'opérateur Δ soit commutatif, il faut que : $A \Delta B = B \Delta A$

$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = B \Delta A$ car la réunion est commutative.

Ex3 1)

a) Soit $y \in f(A_1) \Rightarrow \exists\, x \in A_1$ tel que : $y=f(x)$
$x \in A_1 \Rightarrow x \in A_2$, car $A_1 \subset A_2$ par hypothèse
$x \in A_2 \Rightarrow f(x) \in f(A_2)$
$\Rightarrow y \in f(A_2)$, car $y=f(x)$
Donc, on a bien : $f(A_1) \subset f(A_2)$

b) Soit $y \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow \exists\, x \in (A_1 \cap A_2)$ tel que : $y=f(x)$
$\Rightarrow (x \in A_1 \wedge x \in A_2)$
$\Rightarrow [f(x) \in f(A_1) \wedge f(x) \in f(A_2)]$
$\Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, car $y=f(x)$
Donc, on a bien : $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

$f(A_1) \cap f(A_2) \not\subset f(A_1 \cap A_2)$. En effet, en considérant l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x)=x^2$

et les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : $A_1= [-1,0]$, $A_2= [0,1]$, on constate que :

$A_1 \cap A_2=\{0\}$, $f(A_1)=[0,1]$, $f(A_2)=[0,1]$ et $f(A_1 \cap A_2)=\{0\}$

Donc: $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 1] \not\subset f(A_1 \cap A_2) = \{0\}$

c) Soit $y \in f(A_1 \cup A_2) \Leftrightarrow \exists x \in (A_1 \cup A_2)$ tel que : $y=f(x)$

$\Leftrightarrow (x \in A_1 \vee x \in A_2)$

$\Leftrightarrow [f(x) \in f(A_1) \vee f(x) \in f(A_2)]$

$\Leftrightarrow [f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2)]$

$\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ car $y=f(x)$

2)

a) Soit $x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x) \in B_1$

$\Rightarrow f(x) \in B_2$ car $B_1 \subset B_2$ par hypothèse

$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_2)$

b) Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in (B_1 \cap B_2)$

$\Leftrightarrow [f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2]$

$\Leftrightarrow [x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2)]$

$\Leftrightarrow [x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)]$

c) Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow f(x) \in (B_1 \cup B_2)$

$\Leftrightarrow [f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2]$

$\Leftrightarrow [x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2)]$

$\Leftrightarrow [x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)]$

Ex4 1)

a) Démontrer que f est surjective équivaut à démontrer que : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in [-1,1] : y=f(x)$

Démontrer que f n'est pas surjective équivaut à démontrer que : $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in [-1,1], y \neq f(x)$

On remarque que : $\forall x \in [-1,1], f(x) \geq 0$. D'où pour $y=-3$, on a : $\forall x \in [-1,1], -3 \neq f(x)$. Donc f n'est pas surjective.

b) Démontrer que f est injective équivaut à démontrer que : $\forall x_1,x_2 \in [-1,1]$,$[f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1= x_2]$

Démontrer que f n'est pas injective équivaut à démontrer que : $\exists x_1,x_2 \in [-1,1] : f(x_1)=f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$

On remarque que pour, $x_1=-1$, $x_2=1$, on a : $f(-1)=f(1)=0$ et $-1 \neq 1$. Donc l'application f n'est pas injective.

c) L'application f est bijective si elle est à la fois surjective et injective.

Comme, elle n'est ni surjective, ni injective, elle n'est donc pas bijective.

2)

a) g est surjective si et seulement si : $\forall$ y $\in[-3, +\infty[$, $\exists$ x $\in \mathbb{R}$: y=g(x). On remarque que l'étude de la surjection conduit à la résolution de l'équation y=g(x) d'inconnue x.

Soit y $\geq$-3 : g(x)=y. Résolvons cette équation, d'inconnue x.

g(x)=y $\Leftrightarrow$ $x^2+4x+1 = y$

$\Leftrightarrow$ $x^2+4x+(1- y)=0$. Il s'agit d'une équation du second degré d'inconnue x. Résolvons là.

$\Delta = b^2-4ac=4^2-4(1)(1-y)=16-4+4y=12+4y=4(3+y) \geq 0$ car y $\geq$-3.

Deux cas sont envisageables, $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$

- Si $\Delta > 0$ i.e.y+3> 0, l'équation a deux solutions distinctes :
  $x_1=\frac{-4+\sqrt{4(3+y)}}{2} = -2+\sqrt{3+y}$, $x_2=\frac{-2-\sqrt{4(3+y)}}{2} = -2-\sqrt{3+y}$
- Si $\Delta = 0$ i.e. y+ 3=0 $\Rightarrow$ y=-3, l'équation a une solution double : $x_0=\frac{-4}{2} = -2$
  Dans tous les cas, on a obtenu :
  $\forall$ y $\in[-3, +\infty[$, $\exists$ x $\in \mathbb{R}$: y=g(x). L'application g est donc surjective.

b) L'application g n'est pas injective, car pour $x_1=0$ et $x_2=-4$, on a : g(0)=g(-4)=1 et 0$\neq$-4

c) L'application g n'est pas bijective car g n'est pas injective.

3)

a) h est surjective si et seulement si : $\forall$ y $\in[1, +\infty[$, $\exists$ x $\in[0, +\infty[$: y=h(x)

Soit y$\geq$1 ; h(x)=y. Résolvons cette équation, d'inconnue x.

h(x)=y $\Leftrightarrow$ $3x^2+4x+1 = y$

$\Leftrightarrow$ $3x^2+4x+(1-y)=0$. Il s'agit d'une équation du second degré. Résolvons là.

$\Delta = b^2-4ac=16-12(1-y)=4+12y=4(1+3y)$

On a : y$\geq$1 $\Rightarrow$3y$\geq$3

$\Rightarrow$ 1+3y$\geq$4

$\Rightarrow$ 4(1+3y) $\geq$16>0. Donc Δ >0. L'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{4(1+3y)}}{6} = \frac{-2-\sqrt{1+3y}}{3}$, $x_2 = \frac{-4+\sqrt{4(1+3y)}}{6} = \frac{-2+\sqrt{1+3y}}{3}$

On remarque que : $x_1 < 0$ (refusé) et $x_2 \in [0, +\infty[$ (accepté) car pour $y \geq 1$, $1+3y \geq 4$ et

$\sqrt{1+3y} \geq 2$, ce qui donne : $\sqrt{1+3y} - 2 \geq 0$

En résumé :

$\forall\, y \in [1, +\infty[$, $\exists\, x = x_2 = \frac{-2+\sqrt{1+3y}}{3} \in [0, +\infty[$ tel que : $y = h(x)$.

Donc, l'application h est surjective.

b) h est injective si et seulement si : $\forall\, x_1, x_2 \in [0, +\infty[$; $x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$

Soient $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2$

$$\Rightarrow 3x_1^2 \neq 3x_2^2$$

$$\Rightarrow 3x_1^2 + 4x_1 + 1 \neq 3x_2^2 + 4x_2 + 1$$

$$\Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$$

Donc, l'application h est injective.

c) Comme l'application h est surjective et injective, elle est donc bijective.

Elle admet donc une application réciproque, notée h^{-1}

$h^{-1} : [1, +\infty[\ \rightarrow [0, +\infty[$ définie par l'équivalence suivante :

$\forall\, y \in [1, +\infty[$ et $\forall\, x \in [0, +\infty[$: $h^{-1}(y) = x \Leftrightarrow h(x) = y$

Donc :

$h^{-1} : [1, +\infty[\ \rightarrow [0, +\infty[$

$\quad y \quad \mapsto h^{-1}(y) = \frac{-2+\sqrt{1+3y}}{3}$