Année universitaire : 2020-2021

Département : S.CM.I

Module : Algèbre 1

Correction des exercices du chapitre 1 d'Algèbre 1

Ex1 La proposition vraie est notée par « 1 » et la proposition fausse par « 0 ».

1)

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

2)

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

3)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

4)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

5)

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1

Ex2 1)

- La proposition a) est fausse car la proposition « 248 est multiple de 6 » est fausse, puisque 248 n'est pas un multiple de 6.
- La proposition b) est vraie car la proposition « 3 divise 48 » est vraie.
- La proposition c) est vraie.
- La proposition d) est vraie car y est fourni après chaque x. Il dépend de x et peut donc varier quand x varie. Pour un x donné, on peut prendre par exemple $y=x+1$ de sorte que : $y=x-(x+1)=-1<0$
- La proposition e) est fausse car x est fourni une fois pour toutes avant les y, et est donc constant quand y varie. Par exemple, pour $x=1$, on a : $1<y$. De ce fait, $\forall\, y \in \mathbb{R}, y>1$ est fausse.
- La proposition f) est fausse. Par exemple, pour $x=-4$, $y=-6$; on a : $x-y=-4+6=2>0$
- La proposition g) est vraie. Par exemple, pour $x=-2$, $y=1$; on a : $x-y= -2-1=-3<0$

2)

- La négation de a) est : 248 n'est pas un multiple de 6 ou 3 ne divise pas 48.
- La négation de b) est : 248 n'est pas un multiple de 6 et 3 ne divise pas 48.
- La négation de c) est : $(\forall x\in \mathbb{R}, x+5\neq0)$ et $(\forall x\in \mathbb{R}, x+9\neq0)$
- La négation de d) est : $\exists x\in \mathbb{R}, \forall y\in \mathbb{R} ; x-y\geq0$
- La négation de e) est : $\forall x\in \mathbb{R}, \exists y\in \mathbb{R} ; x-y\geq0$
- La négation de f) est : $\exists\, x\in \mathbb{R}, \exists y\in \mathbb{R} ; x-y\geq0$
- La négation de g) est : $\forall x\in \mathbb{R}, \forall y\in \mathbb{R} ; x-y\geq0$

Ex3 La formulation mathématique des expressions données est la suivante :

1) $\exists c\in \mathbb{R}/\forall x\in \mathbb{R}, f(x)=c$
2) $\forall c\in \mathbb{R}, \exists x\in \mathbb{R}, f(x)\neq c$
3) $\exists x\in \mathbb{R}, f(x)=0$
4) $\exists M\in \mathbb{R}, \exists m\in \mathbb{R}, \forall x\in \mathbb{R}, m\leq f(x) \leq M$
5) $\forall x\in \mathbb{R}, \exists T\in \mathbb{R}^{*}/f(x+T)=f(x)$
6) $\forall n\in\mathbb{N}, \exists x\in \mathbb{R} /f(x)=n$

Ex4

1) ($a\in\mathbb{Q}\Rightarrow a=p/q$; $p\in\mathbb{Z}$, $q\in \mathbb{Z}^*$) et ($b\in\mathbb{Q}\Rightarrow b=p_1/q_1$; $p_1\in\mathbb{Z}$, $q_1\in \mathbb{Z}^*$)

D'où : $a+b= (p/q)+(p_1/q_1)=(p\, q_1+q\, p_1)/q\, q_1=p_2/q_2$ avec $p_2=(p\, q_1+q\, p_1) \in\mathbb{Z}$ et $q_2=qq_1\in \mathbb{Z}^*$

Donc : $(a+b) \in\mathbb{Q}$

2) Le raisonnement par contraposée dit que, démontrer (n^2 pair $\Rightarrow$n pair) équivaut à démontrer que (n impair $\Rightarrow$ n^2 impair).
   n impair $\Rightarrow$ $n=2k+1$, $k \in \mathbb{N}$
   $\Rightarrow n^2= (2k+1)^2$
   $\Rightarrow n^2= 4k^2+4k+1$
   $\Rightarrow n^2= 2(2k^2+2k) +1$
   $\Rightarrow n^2= 2k_1+1$, avec $k_1= (2k^2+2k) \in \mathbb{N}$
   $\Rightarrow n^2$ impair
   Donc, la proposition initiale (n^2 pair $\Rightarrow$n pair) est vraie.

3) Raisonnons par l'absurde.
   Supposons que la proposition est fausse, donc, on a : $(\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a})$ et $a\neq b$.
   $(\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}) \Rightarrow (a+a^2=b+b^2)$
   $\Rightarrow$ (a- b) (a+b)=-(a-b))
   $\Rightarrow$ $a+b=-1$, car $a\neq b$.
   Or, par hypothèse, on a : $a, b \geq 0$. D'où a+b ne peut pas être négative. D'où la contradiction.

4) Soit P_n la proposition donnée.
   Raisonnons par récurrence.
   Pour n=0, P_0 est vraie car on a : 0=0.
   Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est aussi vraie, i.e. que
   $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2$
   $\sum_{k=0}^{n+1} k^3=\sum_{k=0}^{n} k^3+(n+1)^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2$
   Donc P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.