Année Universitaire : 2020-2021

Département : S.C.M.I

Module : Algèbre 2

Correction des exercices du chapitre 2

Ex1 1) f est une application linéaire si les conditions suivantes sont satisfaites :

a) $\forall$ X=(x_1, x_2, x_3), Y=(y_1, y_2, y_3) $\in \mathbb{R}^3$; f(X+Y)=f(X) + f(Y) ;

b) $\forall$ X=(x_1, x_2, x_3) $\in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$; f (α.X)= α.f(X).

Montrons le a).

Soient X=(x_1, x_2, x_3), Y=(y_1, y_2, y_3) $\in \mathbb{R}^3$, alors :

f(X+Y)=f $[(x_1, x_2, x_3)+(y_1, y_2, y_3)]$=f $[(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)]$

$=(x_2 + y_2 + x_3 + y_3, x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3,\ x_1 + y_1)$

$=(x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1) + (y_2 + y_3, y_1 + y_2 + y_3, y_1)$

=f(x_1, x_2, x_3) +f (y_1, y_2, y_3)

=f(X) + f(Y).

Montrons le b).

Soient X=(x_1, x_2, x_3) $\in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

f (α.X)=f $[\alpha.(x_1, x_2, x_3)]$=f$(\alpha.x_1, \alpha.x_2, \alpha.x_3)$= $(\alpha.x_2 + \alpha.x_3, \alpha.x_1 + \alpha.x_2 + \alpha.x_3, \alpha.x_1)$

$= \alpha.(x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1) = \alpha.\mathrm{f}(x_1, x_2, x_3) = \alpha.\mathrm{f}(X)$.

De a) et b) on déduit que f est bien une application linéaire.

2) a) ker(f)= $\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)\}$

$= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1) = (0, 0, 0)\}$

$= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2 + x_3 = 0, x_1 = 0\} = \{(0, x_2, -x_2) = x_2(0,1,-1) / x_2 \in \mathbb{R}\}$

$=< \{(0,1,-1)\} >$.

Donc ker(f) est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur (0, 1, -1).

b) $\mathrm{Im(f)} = \{f(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{(x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1) = (x_2 + x_3)(1, 1, 0) + x_1(0, 1, 1)\}$

$= < \{(0, 1, 1), (1, 1, 0)\} >$.

Donc Im(f) est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(0, 1, 1)$ et $(1, 1, 0)$.

3) a) Déterminons une base de ker(f).

D'après la question 2 a), la famille $B_{\ker(f)} = \{(0, 1, -1)\}$ est une partie génératrice de ker(f). De plus elle est libre. C'est donc une base de ker(f).

b) Déterminons une base de Im(f).

D'après la question 2 b), la famille $B_{\mathrm{Im}(f)} = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ est une partie génératrice de Im(f). Elle est de plus libre (c'est facile à faire). C'est donc une base d'Im(f).

$\dim[\ker(f)] = \mathrm{card}\, B_{\ker(f)} = 1$ et $\dim[\mathrm{Im}(f)] = \mathrm{card}\, B_{\mathrm{Im}(f)} = 2$.

4) f n'est pas injective car $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, f n'est pas surjective car $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$.

f n'est pas bijective.

<u>Ex2</u> 1) f est linéaire si et seulement si :

$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 ;\ f(\alpha.X + \beta.Y) = \alpha.f(X) + \beta.f(Y)$.

$f(\alpha.X + \beta.Y) = f[(\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta y_1, \beta y_2)] = f[(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)]$

$= (\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta y_1)$

$= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_2, \alpha x_1) + (\beta y_1 + \beta y_2, \beta y_2, \beta y_1)$

$= \alpha\, f(x_1, x_2) + \beta\, f(y_1, y_2) = \alpha\, f(X) + \beta\, f(Y)$. Donc, f est bien linéaire.

2) rang(f) = rg(f) = dim[Im(f)] = card ($B_{\mathrm{Im}(f)}$). Déterminons Im(f).

$\mathrm{Im}(f) = \{ f(X) \in \mathbb{R}^3 / X \in \mathbb{R}^2 \} = \{x_1(1, 0, 1) + x_2(1, 1, 0), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = < \{ (1, 0, 1), (1, 1, 0) \} >$.

Donc, $B_{\mathrm{Im}(f)} = \{ (1, 0, 1), (1, 1, 0) \}$ est une partie génératrice de Im(f). Pour qu'elle soit une base, il faut qu'elle soit, en plus libre (c'est facile à faire.)

Ainsi, $B_{\mathrm{Im}(f)}$ est une base de Im(f) et dim(Im(f) = card ($B_{\mathrm{Im}(f)}$) = 2.

Donc, rg(f) = 2.

Ex3 $f: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \quad \mathbb{R}^4$

$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \quad f(x_1, x_2, x_3)$?

Soit X=$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors : X=$x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

et f(X)= f ($x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$) = x_1 f (e_1) + x_2f (e_2) + x_3 f (e_3) car f est linéaire.

= $x_1(1,2,-1,2) + x_2(2,4,4,-8) + x_3(3,6,1,-2)$.

D'où : f(x_1, x_2, x_3)=$(x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + 4x_2 + 6x_3, -x_1 + 4x_2 + x_3, 2x_1 - 8x_2 - 2x_3)$.