Année Universitaire : 2020-2021

Département : S.CM.I

Module : Algèbre 1

Exercices sur le chapitre 2

Ex1 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E non vide. Démontrer que :

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ex2 Soient A et B deux parties d'un ensemble E non vide. On appelle différence symétrique de A et B, notée $A \Delta B$, l'ensemble défini par :

$A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$ où $\bar{A}$ est le complémentaire de A dans E et $\bar{B}$ est le complémentaire de B dans E.

1) Déterminer les ensembles $A\Delta E$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta A$.
2) Montrer que l'opérateur Δ est commutatif.

Ex3 Soit $f : E \to F$ une application

1) Soient A_1, A_2 deux sous-ensembles de E. Démontrer que :
   a) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$
   b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Montrer par un contre-exemple que : $f(A_1) \cap f(A_2) \not\subset f(A_1 \cap A_2)$
   c) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2) Soient B_1, B_2 deux sous-ensembles de F. Démontrer que :
   a) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$
   b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
   c) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Ex4 En utilisant les définitions de la surjection, de l'injection et de la bijection d'une application, dire si les applications suivantes sont surjectives, injectives et bijectives ?

1) $f : [-1, +1] \to \mathbb{R}$

   $x \mapsto f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

2) $g : \mathbb{R} \to [-3, +\infty[$

   $x \mapsto g(x) = x^2 + 4x + 1$

3) $h : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$

   $x \mapsto h(x) = 3x^2 + 4x + 1$