Année Universitaire : 2020-2021

Département : S.C.M.I

Module : Algèbre 1

Exercices sur le chapitre 1

Ex1 Soient p, q et r trois propositions. Montrer, en utilisant la table de vérité, l'équivalence des propositions suivantes :

1) $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$
2) $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$
3) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$
4) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
5) $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)]$

Ex2 Soient les propositions suivantes :

a) 248 est multiple de 6 et 3 divise 48.
b) 248 est multiple de 6 ou 3 divise 48.
c) $(\exists\, x \in \mathbb{R}, x + 5 = 0)\ ou\ (\exists\, x \in \mathbb{R}, x + 9 = 0)$
d) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}; x - y < 0$
e) $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}; x - y < 0$
f) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}; x - y < 0$
g) $\exists\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}; x - y < 0$

1) En remarquant l'ordre des quantificateurs, indiquer parmi ces propositions celles qui sont vraies et celles qui sont fausses (Justifier votre réponse).
2) Donner la négation de chacune d'elles.

Ex3 Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner la formulation mathématique des expressions suivantes :

1) f est constante.
2) f n'est pas constante.
3) f s'annule.
4) f est bornée.
5) f est périodique.
6) f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

Ex4 Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Montrer par un raisonnement direct que si $a, b \in \mathbb{Q}$, alors $(a + b) \in \mathbb{Q}$.
2) Montrer, en utilisant le raisonnement par contraposée que : $[\forall \text{ n} \in \mathbb{N}, n^2 \text{pair} \Rightarrow n \text{ pair}]$
3) Montrer par l'absurde que : $\forall\, a, b \geq 0 : (\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}) \Rightarrow (a = b)$
4) Montrer par récurrence que : $\forall \text{ n} \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2}{4}(n + 1)^2$