1

CHAPITRE III : LOIS DE PROBABILITES

2 Introduction :

La théorie des probabilités est considérablement utilisée dans les domaines d'applications, tels que les sciences physiques, l'économie, les sciences sociales et humaines. C'est une théorie qui s'applique le plus souvent dans l'étude des phénomènes aléatoires et l'analyse des expériences déterministes.

Lors des expériences déterministes la réponse de l'observateur est souvent "le résultat est ..." par contre lors d'une expérience aléatoire, cette affirmation ce remplace par la négation : quelle est la probabilité pour que le résultats soit ....?.

Le calcul de la théorie des probabilités joue un rôle fondamental dans la démarche scientifique, d'une part, d'une raison de la nature aléatoire de la plus part des problèmes réels, d'autre part grâce à la nécessité de recourir aux méthodes statistiques de traitement des données sans cesse plus nombreuses et complexes à analyser.

2.1 Liens avec les concepts de la statistique

Les concepts du calcul des probabilités sont les homologues de concepts de la statistique et il est possible de disposer en regard les concepts homologues (voir table cidessous).

Probabilités	**Statistique**
Espace fondamental	Populatione
Epreuve	Tirage (d'un individu), xpérimentation
Evènement élémentaire	Individu, observation
Variable aléatoire	Caractère
Epreuves répétées	Echantillonnage
Nbre de répétitions d'une épreuve	Taille de l'échantillon, effectif total
Probabilité	Fréquence observée
Loi de probabilité	Distribution observée ou loi empirique
Espérance mathématique	Moyenne observée
Variance	Variance observée

Exemple 1: Dans la physique des particules les électrons ne décrivent pas des trajectoires autour du noyau comme les font les planètes autour du soleil. La seule chose qu'il est possible de connaître est la probabilité de présence d'une particule en un point donné et à un instant donné.

3 1-Expérience aléatoire, expérience déterministe

En guise d'introduction nous allons considérer l'expérience physique qui consiste à mesurer la différence du potentiel U s'exerçant entre le bornes d'un circuit de résistance 10 ohms, et dans lequel circule un courant d'intensité deux ampères; Si le montage de l'expérience est parfait, le voltmètre doit indiquera une d d p U=RI=20V. Ce type d'expériences sera qualifié de déterministe.

Le résultat étant parfaitement déterminer par la connaissance des paramètres qui la réagissent (Résistance,Intensité).

Définition 1:-*L'expérience qui consiste à mesurer les variations du pH d'une solution au cour da sa neutralisation par une autre solution de même molarité est une expérience déterministe.*

Par opposition une expérience sera dite aléatoire si sont résultat ne peut être prévu à priori.

L'expérience consistant à noter le résultat du lancer d'un dé régulier est une expérience aléatoire.

4 2-variables aléatoires

Dès que l'on mesure une grandeur dont les valeurs dépendant du **hasard** on est en présence d'une variable **aléatoire**.

Définition 2: *Soit E l'ensemble des résultats possiblesà l'issue d'une épreuve. créons une application (au sens mathématique du terme) notée f de E dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ ensemble de nombres réels). Achaque élément de E l'application f fait correspondre un nombre réel. f définit une variable aléatoire.En d'autres tèrmes, une variable aléatoire et une fonction dont la valeur dépend du résultat d'une épreuve. A partir d'un même ensemble on peut définir plusieurs variables aléatoires.*

Exemple 2- Soit un échantillon constitué de 100 famills. Nous pouvons présenter E comme l'ensemble des 100 famills.

Définissons alors une application de E dans $\mathbb{R}$ notée f par: nombre d'enfant par famill.

Cette application définit une variable aléatoire qui prend les valeurs 1,2,3,.......

Exemple 3- Un certain type de plante peut avoir juqu'à 5 fleurs. Le nombre de fleures est alors une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs 0,1,2,3,4 et 5.

Exemple 4-La taille observée de 10 personnes choisies au hasard dans une université est une variable aléatoire qui peut orendre des valeurs réelles comprises ntre 150cm et 190cm.par exemple.

4.1 2-1-Variable aléatoire discrète:

Définition 3: *Une variable aléatoire est dite discrète si son domaine de variation et fini ou dénombrable. C'est le cas des deux premiers exemples ci- dessus.*

4.2 2-2-Variable aléatoire continue:

Définition 4: *Une variable aléatoire est dite continue si son domaine de variation est $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$. C'est le cas du troisième exemples ci- dessus*

Remarque 1: Il faut pas confondre le domaine de variation d'une variable aléatoire qui est l'ensemble des valeurs imprévisibles qu'elle peut prendre et qui peut être non dénombrable, avec le sous-ensemble des valeurs qu'elle prend effectivement et qui est la plus part du temps dénombrable.

5 3-Généralités sur les lois de probabilité

5.1 3-1-Lois de probabilité

5.1.1 3-1-1-Cas des variables alétoires discrètes

Soit une variable aléatoire X, définie par une application f de E dans $\mathbb{R}$, pouvand prendre les valeurs x_1, x_2,...,x_n.

Définition 5: *La probabilité que X soit égale à x_i notée $[P(X = x_i)]$ est la probabilié des éléments de E ayant pour image le nombre x_i par l'application f*
.

Définition 6: *La probabilté d'un évènement A est donnée par* $P(A) = \frac{CAR(A)}{CARD(\Omega}$.
Eclaircissons cela avec l'exemple suivant:
Dans l'expérience du jet d'un dé, l'ensemble des éventualités Ω=$\{1, 2, ..., 6\}$.
Soit A l'évènement: "apparition d'un chiffre pair".
B l'évènement: "apparition d'un chiffre impair".
C l'évènement: "apparition d'un miltuple de trois".
$A = \{, 2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{3, 6\}$
P(A)=P(B)= $\frac{3}{6}$=0.5, et $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Conséquences:
$1 - 0 \leq P(A) \leq 1, \forall\ A \subset \Omega$.
$2 - P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$
$3 - P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$4 - P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$5 - A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$.

5.2 3-2-Probabilités conditionnelles:

Définition 7:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La probabilité q'un évènemet A soit réalisé sachant q'un évènement B est déja eréalisé est appelé probabilité de A conditionné par B et est notée $P(A/B)$.

Exemple 5 (précident)

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = 0.5 \ ; \ P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6}$$

5.2.1 Formule des probabilités totales

Soit (A_i) un système complet d'événements de probabilités non nulles, c'est-à-dire tels que :

$$\begin{cases} \textit{pour} \text{ tout couple (i,j), où i} \neq j \ , \ A_i \cap A_j = \varnothing \\ \cup_i A_i = \Omega \end{cases}$$

Quel que soit l'événement B :

$$p(B) = \sum_i p(A_i \cap B) = \sum_i p(A_i) * p(B/A_i)$$

5.3 3-3-Formule de BAYES

$$p(A_k/B) = \frac{p(A_k)p(B/A_k)}{\sum_i p(A_i)p(B/A_i)}$$

5.4 3-4-L'indépendance:

Définition 8: *On dit que l'évenement B est indépendant de l'évènement A si la probabilité que B se produise n'est pas affectée par la réalisation ou la non réalisation de A. autrement dit si $P(B/A) = P(B)$.*

Conséquence: Si A et B sont indépendants alors $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$.

5.4.1 Cas de variables alétoires continues:

Il existe des variables aléatoires dont les valeurs possibles ne sont pas dans un ensemble fini ou dénombrable mais dans un ensemble non dénombrable. un exempe de tel phénomène est la durée devie d'un composant, le poids ou la tail d'un individu.

5.4.2 Densité de probabilité:

Définition 9: *Soit X une varible aléatoire on dit qu'elle est continue s'il existe une fonction positive f définie pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ telle que pour tout intérval* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *on a* $P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Définition 10: *f continue sur $\mathbb{R}$, sauf peutêtre en un nombre fini ou infini dénombrable de points.*

Définition 11: *Soit:* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Definition 1 *f est appelée la densité de probabilité de la variable aléatoire X.*

Propriétes:
1-Si X est une variable alétoire continue
alors $P(X = x) = 0, \forall \in \mathbb{R}$.
$P(X \leq x) = P(X < x), \forall \in \mathbb{R}$.

5.4.3 Fonction de répartition:

Définition 12 : *La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue est partout définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $[0, 1]$ et est donnée par* $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$.

Définition 13 :*La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:*

$f(x) = \begin{cases} 3\varrho^{-3x} & si\ x \geqslant 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$ est une densité de probabilté, la fonction de répartition correspondante est $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 1 - \varrho^{-3x}$

6 4-Caractéristiques de tendance centrale et de dispèrsion

6.0.4 4-1-Espérance mathématique:

Soit X une variable aléatoire. On appelle **espérance mathématique** ou moment d'ordre 1 par rapport à l'origine la quantité $E[X]$ définie par
$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ dans le cas continue
$\sum_i x_i P[X = x_i]$ .dans le cas discret

Exemple 6: (exemple précident) : L'espérance mathé mathématique est donnée par $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^{\infty} x\left(3\varrho^{-3x}\right)dx$
$= -\left[x\varrho^{-3x} - \frac{1}{3}\varrho^{-3x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{3}$

Exemple 7: *Soit l'expérience consitant au lancé d'un dé équilibré*

Exemple 8 :$E[X] = \sum_i x_i P[X = x_i] = 1 * P[X = 1] + 2 * P[X = 2] + ... + 6 * P[X = 6] =$
$1 * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + ... + 6 * \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 + 2 + ... + 6) = \frac{21}{6}$.

6.0.5 2-3-2-La variance:

Soit X une variable aléatoire. On appelle **variance** la quantité $Var\left[X\right]$ définie par

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\left(x-E\left[X\right]\right)^{2}f\left(x\right)dx \text{ cas continue} \\ \sum_{i}\left(x_{i}-E\left[X\right]\right)^{2}P\left[X=x_{i}\right]. \text{ cas discret} \end{cases}$$

Proposition 2 *(formule simple du calcul de la variance:*$Var\left[X\right]=E\left[X^{2}\right]-\left(E\left[X\right]\right)^{2}$

6.1 les lois de distributions

6.1.1 1 - Introduction

Les lois de distribution, ou distributions de probabilités, montrent la probabilité d'apparition de toutes les valeurs d'une variable théorique.

• Les lois de distribution servent d'abord au calcul direct de la probabilité d'apparition de certains événements, une fois que l'on connaît la loi de distribution du phénomène.

• Lors des tests statistiques paramétriques, nous nous référerons à ces mêmes lois de distribution pour trouver la probabilité que les données soient conformes à une certaine hypothèse nulle.

Þ La compréhension des lois de distribution suppose que la notion de probabilité soit connue et comprise.
Une distribution de probabilités (ou loi de distribution) est une distribution représentant les probabilités des différents états que peut prendre une variable aléatoire x.

6.2 Loi des grands nombres

Lorsque l'effectif d'un échantillon devient grand:

• les fréquences relatives estimées tendent vers les probabilités et les distributions de fréquences relatives observées tendent vers les distributions de probabilités.

7 5-Lois usuelles

7.1 5-1-Lois discrètes

7.1.1

a) LOI DE BERNOULLI

Valrurs possibles: $X = 0; 1$

Probabilités: q; p avec $p + q = 1$,

$E(X) = p \quad var(X) = pq$

Application 1: Dans une épruve on s'intéresse à un événement A de probabilité p.

On désigne par X la fréquence de A dans l'épreuve ($X = 1$ *si X est réalisé*; $X = 0$ *dans le cas contraire*).

7.1.2

b) – LOIS BINOMIALES B(n; p)

n entier positif; $p \in [0;1]$

Valeurs possibles : $X = \{0; 1; ...; k; ...; n\}$.

.

$$Prob\,\{X = k\} = p_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \, (1-p)^k$$

$E(X) = np \quad var(X) = npq$

Application 2: Problème de Bernoulli, ou agrégation d'épreuves indépendantes

On répète n fois une épreuve élémentaire du type précédent , a), on désigne par X la fréquence absolue de l'événement A dans l'épreuve globale (X est le nombre de fois où A a été obtenu); p est la probabilité d'amener A dans chacune des épreuves élémentaires.

Propriété:

Si Y_1 et Y_2 sont indépendantes où

Y_1 obéit à la loi $B(n_1; p)$

Y_2 obéit à la loi $B(n_2; p)$

alors

$Y_1 + Y_2$ obéit à la loi $B(n_1 + n_2; p)$

Application biologique 3 — Quelle est la probabilité de trouver $x = 0, 1, 2$ ou 3 filles dans des familles de $n = 3$ enfants?

Supposons que $p\,(fille) = q\,(garçon) = 1/2$

x	$C_{n=3}^{x}$	$q^{n-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$	$p^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$	Prob
0	1	1/8	1	1/8
1	3	1/4	1/2	3/8
2	3	1/2	1/4	3/8
3	1	1	1/8	1/8
			somme	1

Paramètres de la distribution binomiale des x :

moyenne (calculée à partir de la distribution) =

$0 * \frac{1}{8} + 1 * \frac{3}{8} + 2 * \frac{3}{8} + 3 * \frac{1}{8} = 1,5$

moyenne $\mu = m = np = 3 * \frac{1}{2} = 1,5$ variance $= \sigma^2 = npq = 0,75$

Application biologique 2 — Un gène est présent dans une population sous la forme de deux allèles sélectivement neutres ($n = 2$). L'allèle A a une fréquence relative de $\frac{1}{5}$ alors que l'allèle B a une fréquence relative de $\frac{4}{5}$. Quelle est la probabilité de trouver des individus ayant 0, 1 ou 2 allèles B dans cette population? En d'autres termes, quelle est la

distribution de probabilité des génotypes AA, AB et BB?

$p_B = 0,8$ alors que $q_A = 0,2$

Génotypes	$C_{n=2}^{x}$	$q^{n-x} = (1/5)^{2-x}$	$p^x = (4/5)^x$	Prob
AA (x = 0)	1	$(0,2)^2$	$(0,8)^0$	0,04
AB (x = 1)	2	$(0,2)^1$	$(0,8)^1$	0,32
BB (x = 2)	1	$(0,2)^0$	$(0,8)^2$	0,64
			somme	1

——————————————————

Paramètres de la distribution binomiale des x :

moyenne (à partir de la distribution) $= 0 * 0,04 + 1 * 0,32 + 2 * 0,64 = 1,6$

moyenne $= m = np = 2 * 0,8 = 1,6$ variance $= \sigma^2 = npq = 0,32$

Limite de la distribution: Si n $\rightarrow \infty$ et si p n'est pas trop près de 0 ou de 1, le nombre de classes tend vers l'infini et la distribution binomiale tend vers une fonction continue décrite par l'équation

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \varrho^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}$$

7.1.3

c – LOI DE POISSON : P(m) m > 0

Vleurs possibles: $\{0; 1; ...; n; ...\}$

$$Probabilités : Prob\,\{X = k\} = P_k = \frac{m^k \varrho^{-k}}{k!}$$

$E(X) = var(X) = m$

Propriétés:

1-$\forall k \geqslant 0$; $P_{k+1}/P_k = m/(k+1)$

C'est là une relation caractéristique de la loi de Poisson. Car elle définit P_k en fonction de P_0 et de plus $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$.

2-Si Y_1 et Y_2 sont indépendantes où

Y_1 obéit à la loi $P(m_1)$

Y_2 obéit à la loi $B(m_2)$

alors

$Y_1 + Y_2$ obéit à la loi $P(m_1 + m_2)$.

3 - Loi de Poisson: $P(m)$

Loi pour variables qualitatives binaires lorsque p est près de 0.

Si la probabilité p de la distribution discontinue de la variable x est près de 0 (et difficile à estimer avec précision) et si n est élevé, la distribution de probabilité de x peut être décrite par une loi de Poisson.

Un seul paramètre: $\mu_x = \sigma_x^2$

μ_x est estimé par np où $p = min(p, q)$

Utilisation fréquente en écologie:

• La présence d'un individu d'une espèce donnée à un endroit particulier est, dans bien des cas, un événement rare.

• Si le processus de répartition des individus parmi les observations est aléatoire, la distribution du nombre d'individus observés dans un grand nombre d'observations devrait obéir à une loi de Poisson.

• Par conséquent, la moyenne de telles observations devrait être égale à leur variance.

Exemple 9: On observe le nombre de spécimens d'une espèce de plante dans des quadrats de végétation.

• Si la répartition spatiale des individus est aléatoire, on devrait trouver $\overline{x} = s_x^2$, et cela pour toutes les tailles de quadrats de végétation.

• Si la répartition est agrégée, on devrait trouver $\overline{x} < s_x^2$.

• Si la répartition spatiale est régulière, on devrait trouver $\overline{x} > s_x^2$ car s_x^2 tend alors vers 0 puisque tous les quadrats contiennent à peu près le même nombre de spécimens.

7.2 5-2-Lois absolument continues

7.2.1

a) – LOI UNIFORME

Une variables aléatoire X suit la loi continue uniforme sur$[a, b]$ où $a \neq b$, si, et seulement si, X a pour densité de probabilité la fonction f définie par:

$$\forall x \in [a, b]\,,\ f(x) = \frac{1}{b-a}\ et\ \forall x \in \mathbb{R} - [a, b]\,,\ C) = 0$$

$$Cette\ loi\ est\ not\acute{e}e\ U\,[a, b]$$

$$E\,[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{a}^{b} xf(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

7.2.2

b) – LOI NORMALE (lois de Laplace – Gaouss)

La loi normale est la limite de la loi binomiale lorsque la variable devient continue.

Loi de probabilité: Une variable aléatoire X suit une loi normale, notée $N(m, \sigma)$, de moyenne m et d'écart-type σ lorsque sa densité de probabilité est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]$$

Un phénomène ou une variable aléatoire obéit approximativement à une loi normale quand quatre conditions sont rencontrées:
• Le phénomène dépend de nombreux facteurs.
• Ces facteurs sont indépendants entre eux.
• Les effets aléatoires de ces facteurs sont cumulatifs.
• Les variations de ces facteurs sont faibles et la variation du phénomène due à la variation de chacun des facteurs est également faible.

Si ces quatre conditions se trouvent réalisées, l'effet résultant suit approximativement une loi normale.

Champ d'application

La loi nrmale intervient dans la modélisation de phénomènes aléatoires possédant de nombreuse causes indépendantes dont les éffets s'ajoutent, sans que l'un deux soit dominant. Elle tire son importance du fait que, sous certaines conditions, pluieurs autres lois convergent vers elle.

Addition de variables aléatoires normales indépendantes

Theorem 3 *Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement les lois normales $N(m_1, \sigma_1)$ et $N(m_2, \sigma_2)$, alors la variable aléatoire X+Y suit la loi normale $N(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$*

Ce théoreme se généralise à l'addition de n varaibles aléatoires mutuellement indépendantes.

7.2.3 Lois normale centrée réduite

Si une variable aléatoire X suit la loi $N(m, \sigma)$, alors la variable alétoire T définie par : $T = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $N(0, 1)$.

Densité de probabilité

La densité de probabilité de la loi normale centrée réduite est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varrho^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Il existe des tables donnant les valeurs prises par la fonction de répartition, notée Π, de la loi normale centrée réduite : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Pi(t) = P(T \leq t)$.

7.2.4

c) – Loi exp **onentielle**

Valeurs possibles $[0; \infty]$

Expression élémentaire:$f(x)dx = a\varrho^{-ax}dx$

Fonction de répartition: $F(x) = 1 - \varrho^{-ax}$

$E(X) = \frac{1}{a}, Var(X) = \frac{1}{a}$

7.3 5-3-Lois dérivées de la loi normale

7.3.1 Loi du khi carré: χ_n^2

Construction de la loi de distribution:

Répéter les opérations suivantes pour un grand nombre de points i:

Tirer au hasard des valeurs de plusieurs (n) lois N(0, 1).

Mettre chacune de ces valeurs au carré.

La valeur du point i est la somme de ces valeurs au carré.

Continuer avec le point suivant

La distribution des valeurs obtenues obéit à une loi χ_n^2: $z_1^2 + z_2^2 + ... + z_n^2 = \chi_n^2$

En particulier, $\chi_1^2 = [N(0, 1)]^2$.

7.3.2 Limite de la loi du khi-carré

Quand n devient grand [en pratique, quand $n \geq 30$], la loi du χ^2 tend vers une nouvelle loi normale $N(m, s)$ de moyenne $m = n$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{2n}$. Il suffit de centrer et réduire pour passer de la loi du χ^2 à une loi normale centrée réduite z.

Par conséquent, $\frac{\chi_{n,\alpha}^2 - n}{\sqrt{2n}} = z_\alpha$ ou inversement, $\chi_{n,\alpha}^2 = n + z_\alpha\sqrt{2n}$

pour toute valeur de probabilité α.

Remarque: L'analyse des données biologiques utilise abondamment la loi du χ^2

7.4 Loi de Fisher-Snedecor:

Définition 13 : $F_{(v_1, v_2)} = \frac{\chi_{v_1}^2 / v_1}{\chi_{v_2}^2 / v_2}$

Le rapport de deux variables aléatoires distribuées comme khi-carré, chacune divisée par ses degrés de liberté, est une variable aléatoire distribuée comme F.

Il existe autant de courbes de densité de probabilité de F que de combinaisons possibles de n_1 et n_2.

Applications

a- Test F de rapport de variances.

b- Analyse de variance.

7.5 Loi de Student: t(n)

Loi décrite en 1908 par William Sealy Gosset sous le pseudonyme “Student”. Le premier article de Student, publié en 1907, avait établi que la distribution des dénombrements de cellules dans les carrés d’un hémacytomètre suivaient la loi de Poisson (répartition aléatoire).

7.5.1 Deux définitions équivalentes de la loi de t:

1) $t(n) = \dfrac{Z}{\sqrt{\chi^2/n}}$

2) $t(n) = F_{(v_1,v_2)}$ lorsque $n_1 = 1$. Le nombre de degrés de liberté de la loi de t est alors $n = n_2$.

Applications

a- Estimation des paramètres d’une population à partir de renseignements portant sur un échantillon.

b-Test de comparaison des moyennes.

c- Calcul de la probabilité d’observer un écart donné à la moyenne, en particulier dans le cas de petits échantillons:

Pour un écart observé , la probabilité d’une telle observation x_i est donnée par la variable aléatoire $t = (x_i - \overline{x})/s_x$.

Il existe autant de courbes de densité de probabilité de t que de valeurs possibles de n. Voir la table de la distribution de t

7.6 Thérorème de la limite centrée

Theorem 4 *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de moyenne* μ *et d’écart-type* σ *et soit* $\overline{X} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$. *Pour* $n \geq 30$, *la variable aléatoire* $\overline{X}$ *suit, approximativement, la loi normale de moyenne* μ *et d’écart-type* $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

8

6 – Approximations

8.1 6-1-Approximation d’une loi binomiale par une loi de Poisson

Considéronons une loi binomiale de paramètres n et p; Si n et grand et p assez petit, la loi de Poisson est une bonne approximation de la loi binomiale à condition que le produit np reste fini, et dans ce cas la loi binomiale $B(n,p)$ tend vers la loi de Poisson $P(\lambda = np)$

En pratique, nous utiliserons l’approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson dans les conditions suivantes:

a) $n > 50$, $p < 0.1$

$n > 50, p > 0.9$ car alors $q < 0.1$ ce qui nous ramène au cas précédent compte tenu du rôle symétrique que jouent p et q dans le cas d'une loi binomiale.

8.2 6-2-Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Soit une variable aléatoire discrète X suivant une loi binomiale $B(n, p)$ telle que: $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Si n est suffisamment grand et p pas trop proche de 0 ni de 1 avec $np \geqslant 5$ et $nq \geqslant 5$ alors la loi normale de paramètres $m = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$ constitue une bonne approximation de la loi binomiale.

Remarque: Il y a nécessité de remplacer $P(X = k)$ par $P(k - 0.5 < X < k + 0.5)$ (correction de continuité) car dans le cas d'une loi discrète les probabilités de type $P(X = k)$ sont nulles.

Les conditions pratique de l'approximation sont:

$n \geqslant 30$ *et* $np \geqslant 5, nq \geqslant 5$.

$p \in [0.1, 0.9]$ car sinon la loi de Poisson réalise une meilleure approximation

8.3 6-3-Approximation de loi de Poisson par une loi normale

Soit une variable aléatoire discrète X suivant la loi de Poisson $P(\lambda)$ telle que: $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \varrho^{-\lambda}$

Si λ est suffisamment grand, la loi normale de paramètres $m = \lambda$ et $\sigma = \sqrt{\lambda}$ constitue une bonne approximation de la loi de Poisson..la correction de continuité citée ci-dessus s'applique ici aussi et $P(X = k) = P(k - 0.5 < X < k + 0.5)$

APPLICATION 4 : On sait que la probabilité qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à $(10)^{-3}$, On s'intéresse à un échantillon de 1000 personnes. On appelle X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de personne allergique dans l'échantillon.

1-Déterminer, on la justifiant, la loiu de probabilité de X.

2-En utilisant une approximation que l'on justifiera, calculer les probabilités des événements suivants:

a-Il y a exactement deux personnes allergique dans l'echantillon

b- Il y a au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon.

Que peut-on dire si 30% de la population d'où provient cet échantillon sont allergiques à ce médicament.

9

EXERCICES

Exercice 1

Trois tireurs tirent sur une sible. Les probabilités d'atteindre celle-ci sont respectivement égales à 0.7; 0.8; 0.9.

1°) *Quelle est la probabilité que les trois tireurs atteignent la cible?.*

2°) *Quelle est la probabilité qu'au moins un tireur atteigne la cible?.*

Exercice 2 :**Variables aléatoires continues**

1°) Soit la f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \ si \ x < -1 \\ f(x) = a\,(1-x) \ \ si \ x \in [-1, 1] \\ f(x) = 0 \ si \ x > 1 \end{cases}$$

a)- Détermine le réeel a pour que f soit une densité de probabilité

b)- Tracer alors la courbe (C) représentative de f .

2°) Soit F la fonction de répartion de la variable aléatoire X dont f est la densité de probabilité.

a)- On rappelle que $F(T) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$.Déterminer F.

b)- Tracer alors la courbe (Γ) représentative de F

On rappelle que pour tout réel t, $P(T \leq t) = F(t)$.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

$X \leq -0.5$; $-0.5 \leq X \leq 0.25$; $X > 0.25$.

Exercice 3:

Soit a un réel positif et f la fonction définie par: $\begin{cases} f(t) = 0 & si \ t < 0 \\ f(t) = a\varrho^{-at} & si \ t \geqslant 0 \end{cases}$

Démontrer que f est une densité de probabilité.

Donner sa fonction de répartition.

Exercice 4:

On suppose que la glycémie est distribuée normalement dans la population avec une moyenne de 1 g/l et un écart-type de 0.03 g/l. On mesure la glycémie chez un individu.

1- Calculer la probabilité pour que sa glycémie soit:

a) inférieure à 1.06;

b) supéroeure à 0.9985;

c) comprise entre 0.94 et 1.08;

d)- supérieure à 1.10.

2- On mesure la glycémie chez 1000 individus. Donner le nombre moyen d'individus dont la glycémie est supérieure à 0.99.

Exercice 5:

Dans une population bovine, on admet que la robe d'un animale se caractérise par la présence d'ne gène dominant S (robe unie) ou d'un gène récessif s (robe tachetée bleu). Selon la théorie de Mendel, l'accouplement d'animaux hétérozygotes (S,s) entre eux donne $\frac{3}{4}$ de robes unies et $\frac{1}{4}$ de robes tachetées bleues.

Sur un échantillon de 160 bovins issus de croisement $(S,s)x(S,s)$, on note X le nombre d'animaux ayant une robe tachetée bleu.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

b) Montrer que la loi de probabilité de X ût être approchée par une variable aléatoire normale Y. préciser ses paramètres.

c) Calculer la probabilité pour que parmi les 160 bovins de l'échantillon, le nobre de bovins ayant une robe tachetée bleu soit compris entre 35 et 50.

Exercice 6:

On considère un échantillon de 20 moutons à l'engraissement sur lequel on étudie le "Gain Moyen Quotidien". On admet que ce GMQ suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ.

Soit X la variable aléatoire égale au GMQ qui suit une loi normale de moyenne 600 g et d'écart-type 30g.

Calculer la probabilité pour que ce GMQ soit compris entre 580 g et 610 g.

On sélectionne le quart supérieur de la population: à partir de quel GMQ un porc sera-t-il sélectionné?.

Exercice 7:

Une maladie génétique a pour incidence $p = 1/1600$. Un laboratoire la dépiste chez l'enfant à la naissance; 1500 examens sont effectués par mois.

Quelle est la probabilité de n'observer aucun cas pendant un trimestre?.

Quelle est la probabilité d'observer exactement deux cas pendant un trimestre et cela pendant le même mois?.

Le test qui permet de détecter cette maladie a pour sensibilité 0.9777 et pour spécificité 0.9853. A combien de faux positifs et de faux négatifs peut-on s'attendre sur une période de 4 ans?.

Remarque: On rappelle que la sensibilté d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que le sujet est malade et la spécificité est la probabilité pour que ce test soit négatif sachant que le sujet n'est pas malade.

3- Une autre maladie d'incidence $P' = 1/4000$, peut être associée à la précédente.

Ces deux maladies sont indépendantes.

Quelle la probabilité P'' d'observer simultanément les deux maladies chez le même enfant?.Probabilités

10

Synthèse

Probabilités : $P : \blacksquare(\Omega) \to [0,1]\ A \to P(A)$

$\forall A \in \blacksquare(\Omega)\ P(A) \geq 0 \qquad P(\Omega) = 1$

$\forall A,\ B \in \blacksquare(\Omega)$

$si\ A \cap B = \emptyset\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$si\ A \cap B \neq \emptyset\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilités combinatoires :$P(A) = \dfrac{k}{n} = \dfrac{nombre\ de\ cas\ possibles}{nombre\ de\ cas\ favorables}$

Additivité des probabilités : $si\ Ai \cap Aj = \emptyset\ avec\ i \neq j\ alors\ P(U_i A_i) = \blacksquare_{i=1}^{n} P(A_i)$

Probabilités conditionnelles :

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}\ avec\ P(B) \neq 0$

Probabilités composées : $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$

Probabilités totales: $P(B) = \blacksquare_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)$

Formule de Bayes :$P(A_i/B) = \dfrac{P(B/A_i)P(A_i)}{\blacksquare_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)}$

Indépendance statistique : A et B indépendants si $\begin{cases} P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ P(A/B) = P(A) \\ P(A/B) = P(A/\overline{B}) \end{cases}$

Espérance mathématique ou moment d'ordre 1 par rapport à l'origine la quantité $E[X]$ définie par

$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$ dans le cas continue $\sum_i x_i P[X = x_i]$ .dans le cas discret

Formule simple du calcul de la variance:$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

LOI DE BERNOULLI Valrurs possibles: $X = 0;\ 1$

Probabilités: q; p avec $p + q = 1$, $E(X) = p \quad var(X) = pq$

LOIS BINOMIALES B(n; p) n entier positif; $p \in [0;1]$ $E(X) = np$ $var(X) = npq$

Valeurs possibles : $X = \{0; 1; ...; k; ...; n\}$.$Prob\{X = k\} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^k$

LOI DE POISSON : **P(m) m > 0**$Probabilit\acute{e}s$: $Prob\{\text{X=k}\} = P_k = \frac{m^k \varrho^{-k}}{k!}$

$E(X) = var(X) = m$ Vleurs possibles: $\{0; 1; ...; n; ...\}$

LOI UNIFORME $\forall x \in [a,b],\ f(x) = \dfrac{1}{b-a}\ et\ \forall x \in \mathbb{R} - [a,b],\ C) = 0$

$Cette\ loi\ est\ not\acute{e}e\ U[a,b]$

$E[X] = \frac{a+b}{2}$ et $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

LOI NORMALE (lois de Laplace − Gaouss) $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]$

Loi exp **onentielle** Valeurs possibles $[0;\infty]$; Expression élémentaire:$f(x)dx = a\varrho^{-ax}dx$

Fonction de répartition: $F(x) = 1 - \varrho^{-ax}$ $E(X) = \dfrac{1}{a}$, $Var(X) = \dfrac{1}{a}$