1 chapitre II: signaux discrets ou séquences

1.1 I. Généralités

. un signal discret ou séquence est un signal défini sur un ensemble discrets de pts uniforméments répartis sur l'axe des temps $t = nT_e$; $n \in Z$

.les séquences sont générées par des systèmes discrets ou par échantillonnage de signaux analogiques

1.2 Définitions:

soit $x(n)$ et $y(n)$ deux sequences quelconques

1. Valeur moyenne de $x(n)$: $\overline{x}$

   $\overline{x} = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum\limits_{n=-N}^{N} x(n)$

2. Energies:

   - Energie totale de $x(n)$: E_x

   $E_x = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} x(n).x^*(n) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$

   - Energie de $x(n)$ sur l'intervalle $[n_1......n_2]$: $E_{x(n_1..n_2)}$

   $E_{x_{(n_1..n_2)}} = \sum\limits_{n=n_1}^{n_2} x(n).x^*(n) = \sum\limits_{n=n_1}^{n_2} |x(n)|^2$

   - Energie instantannée de $x(n)$: E_{x_n}

   $E_{x_n} = x(n)x^*(n) = |x(n)|^2$

   - Energie totale d'interaction entre $x(n)$ et $y(n)$: E_{xy}

   $E_{xy} = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n)$

   $E_{yx} = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} y(n).x^*(n)$

   Energie d'interaction entre $x(n)$ et $y(n)$ sur l'intervalle $[n_1......n_2]$: $E_{xy(n_1..n_2)}$

$$E_{xy_{(n_1..n_2)}} = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)y^*(n)$$

$$E_{yx_{(n_1..n_2)}} = \sum_{n=n_1}^{n_2} y(n)x^*(n)$$

Energie d'interaction instantannée entre $x(n)$ et $y(n)$: E_{xy_n}

$E_{xy_n} = x(n)y^*(n)$ et $E_{yx_n} = y(n)x^*(n)$

- Relation entre E_{xy} et E_{yx} :

$$E_{yx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)x^*(n) = \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)x^*(n)\right)^*\right]^* = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n)\right]^* = E_{xy}^*$$

3. Puissances :

- puissance moyenne sur $\mathbb{R}$ de $x(n)$:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n).x^*(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

- puissance moyenne sur l'intervalle $[n_1......n_2]$: $P_{x(n_1..n_2)}$

$$P_{x(n_1..n_2)} = \frac{1}{(n_2-n_1+1)} \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n).x^*(n) = \frac{1}{(n_2-n_1+1)} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x(n)|^2$$

- puissnce moyenne d'interaction entre $x(n)$ et $y(n)$ sur $\mathbb{R}$

$$P_{xy} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N-1} x(n)y^*(n)$$

puissnce moyenne d'interaction entre $x(n)$ et $y(n)$ sur l'intervalle $[n_1......n_2]$

$$P_{xy_{(n_1..n_2)}} = \frac{1}{(n_2-n_1+1)} \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)y^*(n)$$

- relation entre P_{xy} et P_{yx}

$$P_{xy} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N-1} x(n)y^*(n)$$

$$P_{yx} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N-1} y(n)x^*(n) = \left\{ \left[\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N-1} y(n)x^*(n) \right]^* \right\}^*$$

$$P_{yx} = \left[\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N-1} y^*(n)x(n) \right]^* = P_{xy}^*$$

4. longueur d'une séquence

   la longueur d'une séquence $x(n)$ est la durée discrète de cette séquence

   soit $x(n) = 0 \quad \forall n < n_1$ et $x(n) = 0 \quad \forall n > n_2 \implies L_x = n_2 - n_1 + 1$

   L_x : finie $\implies$ séquence transitoire

   L_x : infinie $\implies$ séquence permanente

   si $x(n) = 0 \quad \forall n < 0 \implies x(n)$ est causal

   sinon $x(n)$ est non causale

5. quelques séquences particulieres:

   $*$ impulsion de Dirac $\delta(n) = \{ {}^{1}_{0} \; {}^{n=0}_{ailleurs} \to L_\delta = 1$ (longueur de $\delta(n)$)

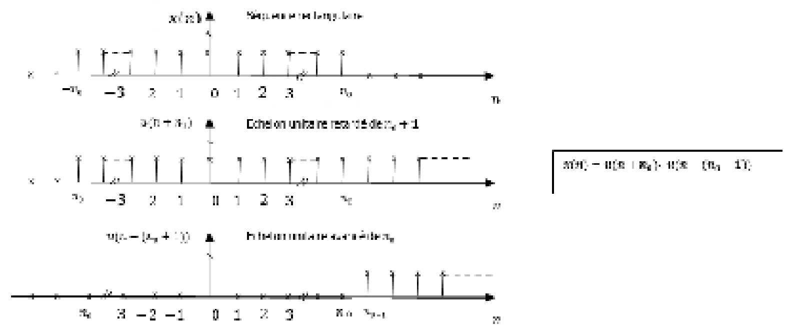
   $*$ peigne de Dirac $Pgn(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-k)$

   $*$ Echelon unitaire $u(n) = \{ {}^{1}_{0} \; {}^{n\geq 0}_{ailleurs} \to u(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(n-k) \quad L_u = \infty$

   $*$ séquence rectangulaire $r_{(n_1..n_2)}(n)$

   $r_{(n_1..n_2)}(n) = \{ {}^{1}_{0} \; {}^{n_1 \leqslant n \leq n_2}_{ailleurs} \to L_{r_{(n_1..n_2)}} = n_2 - n_1 + 1$

$1ch2$



$_{1}.png$

$r_{(n_1..n_2)}(n) = u(n - n_1) - u(n - (n_2 + 1))$

$*$ séquence exponentielle causale

$x(n) = e^{-\alpha n} u(n) = \{ \begin{smallmatrix} e^{-\alpha n} & n \geq 0 \\ 0 & ailleurs \end{smallmatrix}$

$*$ séquence sinusoidale:

$x(n) = A \sin(n w_0) \qquad w_0 = \frac{2\pi}{N}$

A: amplitude $\qquad$ w_0 :pulsation angulaire $\qquad$ N : période

$*$ séquence rampe causale

$x(n) = n u(n) = \{ \begin{smallmatrix} n & n \geq 0 \\ 0 & ailleurs \end{smallmatrix}$

$*$ séquence sinus cardinal: sinc

$x(n) = A \frac{\sin(n w_0)}{n w_0} = A \frac{\sin(n w_0)}{n w_0} = A \frac{\sin(n \frac{2\pi}{N})}{n \frac{2\pi}{N}} = A \text{sinc}(n \frac{2}{N})$

2 II- opérations sur les séquences :

on ne peut éffectuer des opérations que sur des séquences ayant le meme pas d'échantillonnage

2.1 1- opérations arithmetiques:

1. $x(n)$ et $y(n)$ deux séquences ayant le meme pas d'échantillonnage

   $x(n) + y(n) = z(n) \qquad$ (somme)

$x(n) - y(n) = v(n)$ (différence)

$x(n).y(n) = w(n)$ (produit)

$x(n)/y(n) = s(n)$ $y(n) \neq 0$ (rapport)

2.2 2- Produit scalaire :

Espace vectoriel de séquences: e.v.s.

S : un ensemble de séquences est un e.v.s. ssi :

1-$\forall x(n)$ et $y(n)$ $\in S \Rightarrow x(n) \pm y(n) \in S$

2-$\forall x(n) \in S$ $\forall k \in C$ $\Rightarrow k.x(n) \in S$

la somme algebrique et la multiplication par un scalaire sont deux lois internes par rapport à S

$x(n)$ et $y(n) \in S \Rightarrow$

$\langle x(n).y^*(n) \rangle$: poduit scalaire de $x(n)$ par $y(n)$

$\langle y(n).x^*(n) \rangle$: poduit scalaire de $y(n)$ par $x(n)$

$\langle x(n).x^*(n) \rangle = \|x(n)\|^2$ carré de la norme de $x(n)$

Notations:

L^2 : éspace vectoriel de séquences d'énergie finie

L_p : éspace vectoriel de séquences d'énergie infinie (puissance finie)

$\forall x(n), y(n) \in L^2$

$\langle x(n).y^*(n) \rangle = E_{xy}$

$\langle y(n).x^*(n) \rangle = E_{yx}$

$\langle x(n).x^*(n) \rangle = \|x(n)\|^2 = E_x$ (norme de $x(n)$ au carré)

- Espace L_p des séquences:

$\forall\ x(n), y(n) \in L_p \Leftrightarrow E_x = E_y = \infty$

$\langle x(n).y^*(n) \rangle = P_{xy}$

$\langle y(n).x^*(n) \rangle = P_{yx}$

$\langle x(n).x^*(n) \rangle = \|x(n)\|^2 = P_x$ (norme de $x(n)$ au carré)

conclusion:

$\langle x(n).y^*(n) \rangle = \{ {}^{E_{xy}\ \ L^2}_{P_{xy}\ \ L_p}$

$\langle x(n).x^*(n) \rangle = \|x(n)\|^2 = \{ {}^{E_x\ \ L^2}_{P_x\ \ L_p}$

2.3 distance euclidienne entre les séquences $x(n)$ et $y(n)$: $d_1(x, y)$

$x(n)$ et $y(n)$ deux séquences quelconques

soit $e(n) = x(n) - y(n)$
$d_1^2(x,y) = \langle e(n).e^*(n)\rangle = \|e(n)\|^2 = \{ \begin{smallmatrix} E_e & L^2 \\ P_e & L_p \end{smallmatrix}$
$d_1^2(x,y) = \langle (x-y).(x-y)^*\rangle =$
$\langle x.x^*\rangle + \langle y.y^*\rangle - \langle y.x^*\rangle - \langle x.y^*\rangle$ or $\langle y.x^*\rangle = \langle x.y^*\rangle^*$
$d_1^2(x,y) = \|x(n)\|^2 + \|y(n)\|^2 - (\langle x.y^*\rangle + \langle x.y^*\rangle^*) = \|x(n)\|^2 + \|y(n)\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle x.y^*\rangle$
$\Rightarrow d_1^2(x,y) = E_x + E_y - 2\,\mathrm{Re}\,E_{xy}$ (dans L^2)
$d_1^2(x,y) = P_x + P_y - 2\,\mathrm{Re}\,P_{xy}$ (dans L_p)

2.4 propriétés du produit scalaire :

1. $\langle (\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)), (\beta_1 y_1(n) + \beta_2 y_2(n))^*\rangle =$
   $\alpha_1\beta_1^*\langle x_1, y_1^*\rangle + \alpha_2\beta_2^*\langle x_2, y_2^*\rangle + \alpha_1\beta_2^*\langle x_1, y_2^*\rangle + \alpha_2\beta_1^*\langle x_2, y_1^*\rangle$
2. $\langle y, x^*\rangle = [\langle y, x^*\rangle^*]^* = \langle x, y^*\rangle^*$
3. $|\langle x, y^*\rangle|^2 \leqslant \langle x, x^*\rangle . \langle y, y^*\rangle$
   $*$ Démonstration de lapropriété 3:
   $d_1^2(x, ky) \geqslant 0 \quad \forall k \in C$
   $d_1^2(x, ky) = \langle (x - ky).(x - ky)^*\rangle$
   $\langle x.x^*\rangle + kk^*\langle y.y^*\rangle - k\langle y.x^*\rangle - k^*\langle x.y^*\rangle \geqslant 0 \quad \forall k$
   en particulier pour $k = \frac{\langle x.y^*\rangle}{\langle y.y^*\rangle}$
   $\Rightarrow \langle x.x^*\rangle + \frac{\langle x.y^*\rangle}{\langle y.y^*\rangle}.\frac{\langle x.y^*\rangle^*}{\langle y.y^*\rangle}\langle y.y^*\rangle - \frac{\langle x.y^*\rangle}{\langle y.y^*\rangle}\langle x.y^*\rangle^* - \frac{\langle x.y^*\rangle^*}{\langle y.y^*\rangle}\langle x.y^*\rangle \geqslant 0$
   $\Rightarrow \langle x.x^*\rangle - \frac{\langle x.y^*\rangle.\langle x.y^*\rangle^*}{\langle y.y^*\rangle} \geqslant 0$
   $\Rightarrow \langle x.y^*\rangle\langle x.y^*\rangle^* \leqslant \langle x.x^*\rangle . \langle y.y^*\rangle$
   $|\langle x.y^*\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 . \|y\|^2$
   on déduit que :
   $|E_{xy}|^2 \leqslant E_x.E_y$
   $|P_{xy}|^2 \leqslant P_x.P_y$
4. $\langle x(n).y^*(n)\rangle = 0 \Rightarrow$ $x(n)$ est *orthogonale* à $y(n)$ $\quad x(n) \perp y(n)$

3 III- Produit de covolution de séquences:

3.1 convolution linéaire :

soient $x(n)$ et $h(n)$ deux séquences tel que

$x(n) \rightarrow n_1 ....n_2$

$x(n) \;=\; \{x(n_1), x(n_1+1), ...x(n_2)\} \quad L_X \;= n_2 - n_1 + 1$

$h(n) \rightarrow n_3 ....n_4$

$h(n) \;=\; \{h(n_3), h(n_3+1), ...h(n_4)\} \quad L_h \;= n_4 - n_3 + 1$

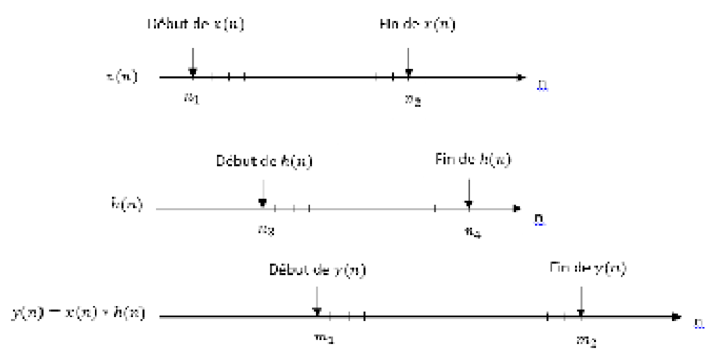
$y(n) \rightarrow m_2 ....m_2$

$y(n) \;=\; \{y(m_1), y(m_1+1), ...y(m_2)\} \quad L_Y \;= m_2 - m_1 + 1$

$$y(n) \;= x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

- Détermination de m_1 et m_2 en fonction de n_1, n_2, n_3 et n_4 :

$2ch2$



$_2.png$

$$y(n) \;= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

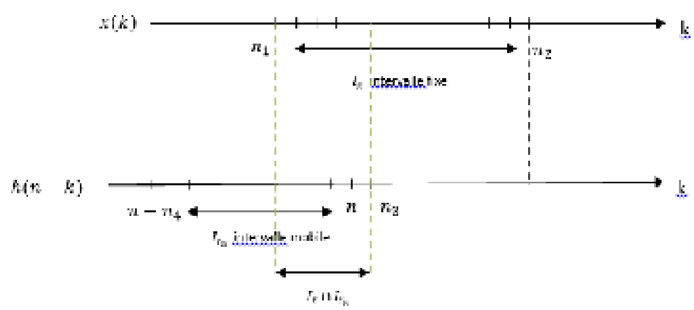
$x(k) \neq 0$ pour ($n_1 \leqslant k \leqslant n_2$) $\rightarrow$ intervalle discret noté I_x fixe

$h(n-k) \neq 0$ pour $n_3 \leqslant n-k \leqslant n_4 \;\Rightarrow -n_4 \leqslant k-n \leqslant -n_3 \Rightarrow (n-n_4 \leqslant k \leqslant n-n_3)$

$\rightarrow$ intervalle discret noté I_{h_n} mobile suivant les valeurs de n

$x(k).h(n-k) \neq 0$ pour $\underbrace{(n_1 \leqslant k \leqslant n_2)}_{I_x} \cap \underbrace{(n-n_4 \leqslant k \leqslant n-n_3)}_{I_{h_n}}$

$3ch2$



$_{3}.png$

Discussion suivant les valeurs du paramètre n

1) - $n - n_3 < n_1 \Rightarrow n < n_1 + n_3 \Rightarrow I_x \cap I_{h_n} = \Phi$

$\Rightarrow x(k).h(n-k) = 0 \quad \forall k \in Z \;\Rightarrow\; y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = 0$ ($n < n_1 + n_3$)

2) $n - n_4 > n_2 \Rightarrow n > n_2 + n_4 \Rightarrow I_x \cap I_{h_n} = \Phi$

$\Rightarrow x(k).h(n-k) = 0 \quad \forall k \in Z \;\Rightarrow\; y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = 0$ $(n > n_2 + n_4)$

3) pour $n_1 + n_3 \leqslant n \leqslant n_2 + n_4 \quad I_x \cap I_{h_n} \neq \Phi \Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \neq 0$

$y(n) \neq 0 \qquad m_1 \leqslant n \leqslant m_2 \Rightarrow \quad m_1 = n_1 + n_3$ et $m_2 = n_2 + n_4$

1. Déduction de L_y en fonction de L_x , L_h

$L_X = n_2 - n_1 + 1 \qquad L_h = n_4 - n_3 + 1 \qquad L_Y = m_2 - m_1 + 1$

$L_Y = (n_2 + n_4) - (n_1 + n_3) + 1 = (n_2 - n_1) + (n_4 - n_3) + 1$

$L_Y = (L_X - 1) + (L_h - 1) + 1 = L_X + L_h - 1$

Exemple de calcul de la convolution linéaire:

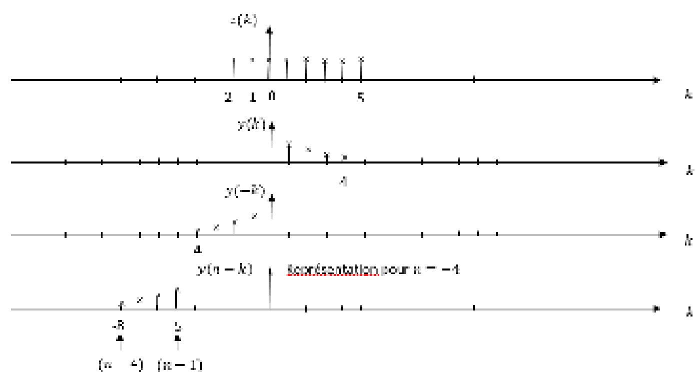
1. soient deux séquences $x(n)$ et $h(n)$ définies par :

   $x(n) = \{^{1}_{0} \quad ^{-2 \leq n \leq 5}_{ailleurs} \rightarrow L_X = 5 - (-2) + 1 = 8$

   $h(n) = \{^{e^{-n}}_{0} \quad ^{1 \leq n \leq 4}_{ailleurs} \rightarrow L_h = 4 - 1 + 1 = 4$

   $$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad \Rightarrow L_Y = 8 + 4 - 1 = 11$$

   $4ch2$

   $_{4}.png$

   (a) $y(n) = 0$ pour $(n < -2 + 1) \cup (n > 5 + 4)$ $\qquad$ $(n < -1) \cup (n > 9)$

   b. $n - 1 \geqslant -2$ et $n - 4 \leqslant -2 \Rightarrow n \geqslant -1$ et $n \leqslant 2 \Rightarrow (-1 \leqslant n \leqslant 2)$

   $$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-2}^{n-1} x(k)h(n-k)$$ calcule de 4 échantillons $y(-1), y(0), y(1), y(2)$

   1 - $n - 1 \leqslant 5$ et $n - 4 > -2 \Rightarrow n \leqslant 6$ et $n > 2 \Rightarrow (2 < n \leqslant 6)$

   $$y(n) = \sum_{k=n-4}^{n-1} x(k)h(n-k)$$ calcule de 4 échantillons $y(3), y(4), y(5), y(6)$

   2 - $n - 1 > 5$ et $n - 4 \leqslant 5 \Rightarrow 6 < n \leqslant 9$

$$y(n)=\sum_{k=n-4}^{5}x(k)h(n-k) \quad \text{calcule de 3 échantillons } y(7),y(8),y(9)$$

calcule de $y(n)=x(n)*h(n) \qquad n=-1,0,1,........,9$

1.1 $y(n)=\sum_{k=-2}^{n-1}x(k)h(n-k)$

$$y(-1)=\sum_{k=-2}^{-2}x(k)h(-1-k)=x(-2)h(1)=e^{-1}$$

$$y(0)=\sum_{k=-2}^{-1}x(k)h(0-k)=x(-2)h(2)+x(-1)h(1)=e^{-1}+e^{-2}$$

$$y(1)=\sum_{k=-2}^{0}x(k)h(1-k)=x(-2)h(3)+x(-1)h(2)+x(0)h(1)=e^{-1}+e^{-2}+e^{-3}$$

$$y(2)=\sum_{k=-2}^{1}x(k)h(2-k)=x(-2)h(4)+x(-1)h(3)+x(0)h(2)+x(1)h(1)=e^{-1}+e^{-2}+e^{-3}+e^{-4}$$

1.2 $y(n)=\sum_{k=n-4}^{n-1}x(k)h(n-k) \quad y(3)=\sum_{k=-1}^{2}x(k)h(3-k)=x(-1)h(4)+x(0)h(3)+x(1)h(2)+x(2)h(1)=e^{-1}+e^{-2}+e^{-3}+e^{-4}$

$$y(4)=\sum_{k=0}^{3}x(k)h(4-k)=x(0)h(4)+x(1)h(3)+x(2)h(2)+x(3)h(1)=e^{-1}+e^{-2}+e^{-3}+e^{-4}$$

$$y(5)=\sum_{k=1}^{4}x(k)h(5-k)=x(1)h(4)+x(2)h(3)+x(3)h(2)+x(4)h(1)=e^{-1}+e^{-2}+e^{-3}+e^{-4}$$

$$y(6)=\sum_{k=2}^{5}x(k)h(6-k)=x(2)h(4)+x(3)h(3)+x(4)h(2)+x(5)h(1)=e^{-1}+e^{-2}+e^{-3}+e^{-4}$$

Notation 1 *1.3* $y(n) = \sum_{k=n-4}^{5} x(k)h(n-k)$

$y(7) = \sum_{k=3}^{5} x(k)h(7-k) = x(3)h(4)+x(4)h(3)+x(5)h(2) = e^{-2}+e^{-3}+e^{-4}$

$y(8) = \sum_{k=4}^{5} x(k)h(8-k) = x(4)h(4)+x(5)h(3) = e^{-3}+e^{-4}$

$y(9) = \sum_{k=5}^{5} x(k)h(9-k) = x(5)h(4) = e^{-4}$

3.2 convolution d'une séquence avec des impulsions de Dirac:

$x(n) \to n_1 .... n_2 \qquad L_X = n_2 - n_1 + 1$

$h(n) \to n_0 \qquad L_h = 1 \qquad h(n) = \delta(n-n_0)$

$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$

$y(n) = \sum_k x(k)h(n-k) = \sum_k h(k)x(n-k)$

$= \sum_k \delta(k-n_0)x(n-k) = \delta(0)x(n-n_0)$

$y(n) = x(n-n_0)$

$*\ \ x(n) * \delta(n) = \delta(n) * x(n) = x(n)$

$\delta(n)$ élément neutre de " $*$ "

3.3 Convolution circulaire:

soient $x(n)$ et $h(n)$ deux séquences, la convolution circulaire de $x(n)$ par $h(n)$ est défine par :

$\overset{0}{y}(n) = x(n) \circledast h(n)$

$\overset{0}{y}(n) = \sum_k x(k)h(n \ominus k) \qquad : \quad h(n \ominus k)$:décalage circulaire de $h(n)$ (périodique)

la périodicité de $\overset{0}{y}(n)$ provient de la périodicité du décalage circulaire $h(n \ominus k)$

$y(n) = \sum_k x(k)h(n-k)$ $\quad h(n-k)$: décalage linéaire de $h(n)$ (non périodique)

Remarque: $\overset{0}{y}(n)$ est calculée de la meme manière que $y(n)$ sauf que $h(n \ominus k)$ est un décalage circulaire alors que $h(n-k)$ est linéaire.

3.3.1 Décalage circulaire d'une séquence :

1. (a) $x(n) \to x(n \ominus n_0)$ $\quad n_0 > 0$ $\quad$ décalage à droite

   $x(n) \to \quad x(n \oplus n_0)$ $\quad n_0 > 0$ $\quad$ décalage à gauche

   Exemple:

   soit $x(n)$ une séquence de longueur $L_X = 4$

   $x(n)$: $.....0, 0, 0, \underbrace{x(0), x(1), x(2), x(3)}_{L_X=4}, 0, 0, 0.......$

   représentation des $x(n \ominus k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4$

   - $x(n \ominus k)$ de période $N = L_X = 4$ période minimale du décalage circulaire

   $x(n \ominus 1) = x(3), x(0), x(1), x(2)$
   $x(n \ominus 2) = x(2), x(3), x(0), x(1)$
   $x(n \ominus 3) = x(1), x(2), x(3), x(0)$
   $x(n \ominus 4) = x(0), x(1), x(2), x(3) = x(n)$

   - $x(n \ominus k)$ de période $N = 7$ $\quad (N > L_X)$ période du décalage circulaire
     $x(n) = x(0), x(1), x(2), x(3), 0, 0, 0 \;\to\; N = L'_X = 7$
     on rajoute 3 échantillons nuls

   $x(n \ominus 1) = 0, x(0), x(1), x(2), x(3), 0, 0$
   $x(n \ominus 2) = 0, 0, x(0), x(1), x(2), x(3), 0$
   $x(n \ominus 3) = 0, 0, 0, x(0), x(1), x(2), x(3)$
   $x(n \ominus 4) = x(3), 0, 0, 0, x(0), x(1), x(2)$
   $x(n \ominus 5) = x(2), x(3), 0, 0, 0, x(0), x(1)$
   $x(n \ominus 6) = x(1), x(2), x(3), 0, 0, 0, x(0)$
   $x(n \ominus 7) = x(0), x(1), x(2), x(3), 0, 0, 0 = x(n)$

   Remarque:

$x(n \ominus k)$ décalage circulaire de période N
$x(n \ominus k) = x(n - k \pm N)$ car N est la période
soit $N = 9$
$x(2 \ominus 4) = x(2 - 4 + 9) = x(7)$
$x(3 \ominus 8) = x(3 - 8 + 9) = x(4)$
$x(5 \ominus 3) = x(5 - 3) = x(3)$
$x(2 \ominus 4) = x(\ominus 2) = x(9 - 2)$

3.4 Relation convolution linéaire-convolution circulaire:

$y(n) = x(n) * h(n)$ convolution linéaire non périodique de longueur L_Y

$\overset{0}{y}(n) = x(n) \circledast h(n)$ convolution circulaire périodique de période N

1. si $N \geqslant L_Y \Rightarrow y(n) = \{ \begin{smallmatrix} \overset{0}{y}(n) & 0 \leqslant n \leqslant L_Y - 1 \\ 0 & ailleurs \end{smallmatrix}$

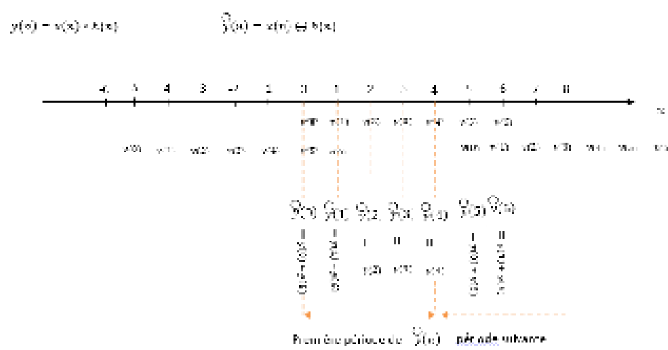
   $y(n)$ est la première période de $\overset{0}{y}(n)$

2. si $N < L_Y \Rightarrow$ $y(n)$ ne peut pas etre deduite entierement de $\overset{0}{y}(n)$

   Exemple d' illustration de la relation: conv.linéaire-conv.circulaire :
   $x(n) \rightarrow L_X = 5$ $h(n) \rightarrow L_h = 3$
   $y(n) = x(n) * h(n) \rightarrow$ $L_Y = L_X + L_h - 1 = 7$
   soit
   $\overset{0}{y}(n) = x(n) \circledast h(n)$ de période N
   la relation entre $y(n)$ et $\overset{0}{y}(n)$ peut etre obtenue de la manière suivante :

1. $1^{er} cas : N < L_Y = L_X + L_h - 1$

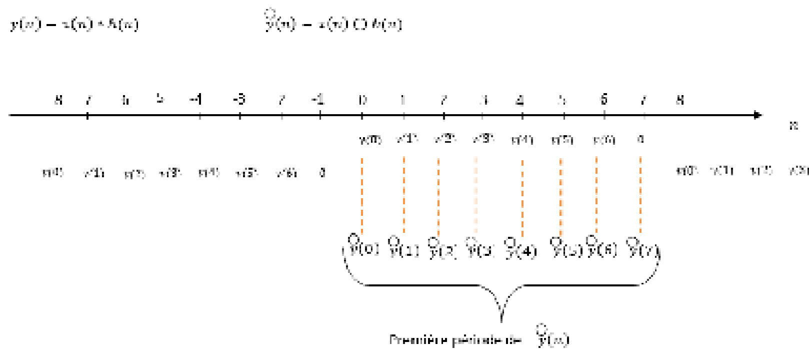
$5ch2$



$_{5}.png$

2. $2^{ème} cas$: $N \geqslant L_Y = L_X + L_h - 1$

$6ch2$



$_{6}.png$

4 IV- Corrélations de séquences

4.1 Définitions:

$x(n)$ et $y(n)$ deux séquences quelconques

$r_{xy}(k) = \langle x^*(n).y(n+k)\rangle$: fonction d'interaction de $x(n)$ par $y(n)$

$r_x(k) = \langle x^*(n).x(n+k)\rangle$: fonction d'autocorrelation de $x(n)$

dans L^2 : e.v.s. d'énergie finie

$r_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n)y(n+k)$ (énergie d'interaction finie)

$r_x(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n)x(n+k)$ (énergie finie)

dans L_p : e.v.s d'énergie infinie

$r_{xy}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^*(n)y(n+k)$ (puissance d'interaction finie)

$r_x(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^*(n)x(n+k)$ (puissance finie)

Covariances:

$x(n) \rightarrow$ valeur moyenne $\overline{x}$

$y(n) \rightarrow$ valeur moyenne $\overline{y}$

$c_{xy}(k) = \langle [x(n)-\overline{x}]^* . [y(n+k)-\overline{y}] \rangle \rightarrow$ Intercovariance entre $x(n)$ et $y(n)$

$c_x(k) = \langle [x(n)-\overline{x}]^* . [x(n+k)-\overline{x}] \rangle \rightarrow$ Autocovariance de $x(n)$

soient : $x(n)-\overline{x} = x_c(n)$ séquence $x(n)$ centrée

$y(n)-\overline{y} = y_c(n)$ séquence $y(n)$ centrée

$c_{xy}(k) = r_{x_c y_c}(k)$

$c_x(k) = r_{x_c}(k)$

4.2 Propriétés:

1. $r_{xy}(k) = \langle x^*(n).y(n+k) \rangle \Rightarrow r_{xy}(0) = \langle x^*(n).y(n) \rangle = \begin{cases} E_{yx} & \rightarrow \text{dans } L^2 \\ P_{yx} & \rightarrow \text{dans } L_p \end{cases}$

2. $r_x(k) = \langle x^*(n).x(n+k) \rangle \Rightarrow r_x(0) = \langle x^*(n).x(n) \rangle = \begin{cases} E_x & \rightarrow \text{dans } L^2 \\ P_x & \rightarrow \text{dans } L_p \end{cases}$

3. relation entre $r_{yx}(k)$ et $r_{xy}(k)$

   $r_{xy}(k) = \langle x^*(n).y(n+k) \rangle$

   $r_{yx}(k) = \langle y^*(n).x(n+k) \rangle = [\langle y^*(n).x(n+k) \rangle^*]^* = \langle y(n).x^*(n+k) \rangle^*$

   changement de variable discrete n

   $m = n+k \Rightarrow n = m-k$

   $r_{yx}(k) = \langle y(n).x^*(n+k) \rangle^* = \langle y(m-k).x^*(m) \rangle^* = \langle x^*(m).y(m-k). \rangle^* = r^*_{xy}(-k)$

   $r_{yx}(k) = r^*_{xy}(-k)$ $\qquad$ $r_x(k) = r^*_x(-k)$

$|r_{xy}(k)|^2 \leqslant r_x(0).r_y(0) \quad \forall k \in Z$

$|r_x(k)|^2 \leqslant r_x(0).r_x(0) \quad \forall k \in Z$

démonstration:

$|\langle x.y^* \rangle|^2 \leqslant \langle x.x^* \rangle . \langle y.y^* \rangle$ (propriété du produit scalaire)

$|r_{xy}(k)|^2 = |\langle x^*(n).y(n+k) \rangle|^2 \leqslant \langle x^*(n).x(n) \rangle . \langle y(n+k).y^*(n+k) \rangle$

$= \langle x^*(n).x(n) \rangle . \langle y(m).y^*(m) \rangle \qquad m = n+k$

$= r_x(0) r_y(0)$

$\Rightarrow |r_{xy}(k)|^2 \leqslant r_x(0).r_y(0) \quad \forall k \in Z$

et $|r_x(k)|^2 \leqslant r_x(0).r_x(0) \quad \forall k \in Z$

Corrélations normalisées:

$\rho_{xy}(k) = \frac{r_{xy}(k)}{\sqrt{r_x(0).r_y(0)}}$ intercorrélation normalisée
$\rho_x(k) = \frac{r_x(k)}{r_x(0)}$ autocorrélation normalisée

$|r_{xy}(k)|^2 \leqslant r_x(0).r_y(0) \Rightarrow \frac{|r_{xy}(k)|^2}{r_x(0).r_y(0)} \leqslant 1 \quad \forall k \in Z$
$\Rightarrow \left|\rho_{xy}(k)\right|^2 = \frac{|r_{xy}(k)|^2}{r_x(0).r_y(0)} \leqslant 1 \qquad \forall k \in Z \ \Rightarrow -1 \leqslant \rho_{xy}(k) \leqslant 1 \quad \forall k \in Z$
on déduit : $|\rho_x(k)| = \frac{|r_x(k)|}{r_x(0)} \leqslant 1 \quad \forall k \in Z \Rightarrow \ -1 \leqslant \rho_x(k) \leqslant 1 \quad \forall k \in Z$

4.3 Relation convolution-corrélation:

$(L^2) \rightarrow r_{xy}(k) = \langle x^*(n).y(n+k)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n)y(n+k)$

changement de variable $n = -m$

$\Rightarrow r_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(-m)y(k-m)$...........(1)

covolution: $x(k) * y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(k-m)$....(2)

par comparaison de (1) et (2) on déduit que : $r_{xy}(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*(-m)y(k-m) \Rightarrow$

$r_{xy}(k) = x^*(-k) * y(k)$
$r_x(k) = x^*(-k) * x(k)$

Remarque:

comme $r_{xy}(k) = x^*(-k) * y(k)$
$\Rightarrow$ pour des séquences réelles on aura:
$r_{xy}(k) = x(-k) * y(k)$
si de plus $x(k)$ est une séquence paire on aura $r_{xy}(k) = x(k) * y(k)$
$\Rightarrow$ si $x(k)$ est réelle et paire $\Rightarrow$
$r_{xy}(k) = x(k) * y(k) \Rightarrow$ correlation$\equiv$convolution.

dans le cas général la correlation peut etre calculée comme un produit de convolution. Il suffit de déterminer préalablement $\overline{x}(k)$ tel que $\overline{x}(k) = x^*(-k)$ puis calculer $r_{xy}(k) = \overline{x}(k) * y(k)$