1 Chapitre III Transformée de Fourier et transformé en Z de Séquences

2 I- Transformée de Fourier

2.1 1-Définition:

$x_e(t) = \sum_n x(nT_e).\delta(t - nT_e)$ **signal échantillonné**

$\mathrm{TF}\{x_e(t)\} = X_e(w) = TF\left\{\sum_n x(nT_e).\delta(t - nT_e)\right\}$

$X_e(w) = \sum_n x(nT_e)\ TF\left\{\delta(t - nT_e)\right\}$

$X_e(w) = \sum_n x(nT_e)\ e^{-jwnT_e} TF\left\{\delta(t)\right\}$

$*\ x(n) \Rightarrow$ séquence $\Rightarrow X(w) = \sum_n x(n)e^{-jwn}$ avec $w = wT_e$ pulsation angulaire en Rds

$*$ Transformée directe: $X(w) = TF\left\{x(n)\right\}$

$*$ Transformée inverse : $x(n) = TF^{-1}\left\{X(w)\right\}$

$x(n) = TF^{-1}\left\{X(w)\right\} = ?$

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn} \Rightarrow X(w + 2\pi k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(w+2\pi k)n}$$

$$X(w + 2\pi k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn}e^{-j2k\pi n} = X(w) \quad \forall k \in Z$$

$X(w)$: périodique de période $2\pi \Rightarrow$ développable en séries de Fourier exponentielle:

$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn}$ est sous forme d'une séries de Fourier exponentielle de base $\left\{e^{-jwn}\right\}_{n\in Z}$ et de coeifficients: $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwn}dw$ $\forall n \in Z$

$*$ **Remarque**:

$X(w)$ est périodique de période 2π : seule la première période $[-\pi, \pi]$ centrée sur l'origine représente le spectre de $x(n)$

3 2- Convergence de la TF:

$$X(w) = \sum_n x(n)e^{-jwn} = \sum_n x(n)\cos(wn) - j\sum_n x(n)\sin(wn) = |X(w)|\, e^{jArg\{X(w)\}}$$

converge ssi

$|X(w)|$ converge c.a.d $|X(w)| < \infty$

$$|X(w)| = \left|\sum_n x(n)e^{-jwn}\right| \leqslant \sum_n \left|x(n)e^{-jwn}\right| = \sum_n |x(n)|\left|e^{-jwn}\right|$$

$$|X(w)| \leqslant \sum_n |x(n)|$$

$\Rightarrow$ $X(w)$ converge si $\sum_n |x(n)|$ est finie $\Leftrightarrow$ $x(n)$ est absolument sommable

Remarque:
$x(n) \in L^2 \Rightarrow X(w)$ converge.

4 Proprietés de la TF:

1. $X(w + 2\pi k) = X(w)\ \forall k \in Z \rightarrow$ périodique de période 2π Rds
2. $TF\{\alpha x(n) \pm \beta y(n)\} = \alpha TF\{x(n)\} \pm \beta TF\{y(n)\} \rightarrow \textit{linéaire}$
3. $TF\{x(n - n_0)\} = e^{-jwn_0}X(w) \rightarrow$ décalage temporel
4. $TF^{-1}\{X(w - w_0)\} = e^{jw_0 n}x(n)$
   $TF^{-1}\{X(w + w_0)\} = e^{-jw_0 n}x(n) \rightarrow$décalage fréquentiel
5. $TF^{-1}\left\{\frac{d^k X(w)}{dw^k}\right\} = (-jn)^k x(n) \rightarrow$ dérivation de $X(w) \Rightarrow n^k x(n) \underset{TF^{-1}}{\overset{TF}{\rightleftarrows}}$
   $(\frac{-1}{j})^k \frac{d^k X(w)}{dw^k} = j^k \frac{d^k X(w)}{dw^k}$
6. convolution : $x(n) * h(n) \Rightarrow TF\{y(n)\}.TF\{h(n)\} = X(w).H(w)$
   Démonstration:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_n x(k).h(n-k)$$
$$Y(w) = \sum_n y(k)e^{-jwn} = \sum_n \sum_k x(k).h(n-k)e^{-jwn}$$
changement de variable $n-k = m \Rightarrow n = m+k \Rightarrow Y(w) = \sum_n \sum_k x(k).h(m)e^{-jw(m+k)}$
$$\Rightarrow \sum_n h(m).e^{-jw(m+k)} \sum_k x(k)e^{-jwk} = H(w).X(w)$$

7. Produit de deux séquences: $y(n) = x(n) * h(n) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} X(w) * H(w)$

Démonstration :
$$y(n) = x(n) * h(n) \Rightarrow Y(w) = \sum_n y(n)e^{-jwn}$$
$$Y(w) = \sum_n x(n).h(n)e^{-jwn}$$
$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(w^{'})e^{+jw^{'}n}dw \Rightarrow$
$$Y(w) = \sum_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(w^{'}).e^{+jw^{'}n}dw^{'}h(n)e^{-jwn}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(w^{'}) \sum_n h(n)e^{-j(w-w^{'})n}dw^{'}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(w^{'})H(w-w^{'})dw^{'}$$
$$= \frac{1}{2\pi} X(w) * H(w)$$

8. corrélation de séquences

$$r_{xy}(k) = \langle x^*(n).y(n+k) \rangle \Rightarrow R_{xy}(w) = X^*(w).Y(w)$$
Démonstration:
Dans L^2 $\quad r_{xy}(k) = \sum_n x^*(n).y(n+k)$
$$R_{xy}(w) = \sum_n r_{xy}(k)e^{-jwk} = \sum_k \sum_n x(n).y(n+k)e^{-jwk}$$
changement de variable $m = n + k \quad k = m - n \Rightarrow$
$$R_{xy}(w) = \sum_m \sum_n x^*(n).y(m)e^{-jw(m-n)}$$

$$= \sum_n x^*(n)e^{jwn} . \sum_m y(m)e^{-jwm}$$

$$= \left[\sum_n x(n)e^{-jwn}\right]^* . \sum_m y(m)e^{-jwm} = X^*(w).Y(w)$$

$R_{xy}(w) = X^*(w).Y(w) = \Phi_{YX}(w) \rightarrow DISE \quad L^2, DISP$ ailleurs

4.1 Théorème de w-k:

$$r_{xy}(k) \underset{TF^{-1}}{\overset{TF}{\rightleftarrows}} X^*(w).Y(w) = \Phi_{YX}(w)$$

$$r_{xy}(k) \rightleftarrows X^*(w).X(w) = |X(w)|^2 = \Phi_x(w)$$

4.2 Théoreme de parseval:

$$E_{xy} = \sum_n x(n).y^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w).Y^*(w)dw$$

$$E_x = \sum_n x(n).x^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w).X^*(w)dw$$

Démonstration:

$$E_{xy} = \sum_n x(n).y^*(n)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w).e^{+jwn}dw$$

$$E_{xy} = \sum_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w).e^{+jwn}dw.y^*(n)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w) \sum_n y^*(n)\left[e^{-jwn}\right]^* dw$$

$$E_{xy} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w).Y^*(w)dw$$

$\Rightarrow E_x = E_{xy}$ pour $y = x$

$$\Rightarrow E_x = \sum_n |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(w)|^2\, dw$$

Remarque:

$$r_{xy}(0) = \langle x^*(n).y(n)\rangle = E_{yx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{yx}(w)dw$$

$$r_x(0) = \langle x^*(n).x(n)\rangle = E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_x(w)dw$$

5 Transformée en Z:

5.1 Définitions:

$x_e(t) = \sum_n x(nT_e).\delta(t - nT_e)$ **signal échantillonné**

TL$\{x_e(t)\} = X_e(p) = TL\{x(nT_e).\delta(t - nT_e)\}$

$= \sum_n x(nT_e) TL\{\delta(t - nT_e)\}$

$TL\{\delta(t - nT_e)\} = e^{-pnT_e}.TL\{\delta(t)\} = e^{-pnT_e}.1$

$\Rightarrow X_e(p) = \sum_n x(nT_e)e^{-pnT_e}$ transformée de Laplace

changement de variable

$z = e^{pT_e} \Rightarrow X(z) = \sum_n x(nT_e)z^{-n}$

$p = \alpha + jw \Rightarrow z = e^{\alpha + jwT_e} = e^{\alpha}e^{jw} \Rightarrow |z| = e^{\alpha}, Arg(z) = w$

Transformée en Z directe : $X(z) = \sum_n x(n)z^{-n}$

5.2 convergence de la Tz:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} x(-n)z^{n}$$

$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$

$X(z) = X_1(z) + X_2(z)$ converge ssi $X_1(z)$ et $X_2(z)$ convergent

* critère de Cauchy de convergence des séries

$v(n)$ une séries : $\sum_{n=0}^{\infty} v(n)$ converge ssi $\lim_{n\to\infty} |v(n)|^{\frac{1}{n}} < 1$ on applique ce critère pour les deux séries $X_1(z)$ et $X_2(z)$

$X_1(z)$ converge ssi $\lim_{n\to\infty} |x(-n)z^n|^{\frac{1}{n}} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x(-n)|^{\frac{1}{n}} |Z| < 1$

$|Z| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |x(-n)|^{\frac{1}{n}}} = R_2$

$X_2(z)$ converge ssi $\lim_{n\to\infty} |x(n)z^{-n}|^{\frac{1}{n}} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} |Z^{-1}| < 1$

$|Z| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |x(-n)|^{\frac{1}{n}}} = R_1$

$X(z)$ converge ssi $R_1 < |Z| < R_2$

si le domaine $R_1 < |Z| < R_2 \neq \Phi \Rightarrow X(z)$ converge($\exists$)

sinon $X(z)$ ($\nexists$)

$R_1 < R_2 \Rightarrow R_1 < |Z| < R_2 \neq \Phi$

sinon $\Rightarrow R_1 < |Z| < R_2 = \Phi$

5.3 Transformée en Z inverse:

la définition de la Tz^{-1} est basée sur l'integrale de cauchy des fonctions à variable complexe:

$\frac{1}{2\pi J} \oint_c z^{k-1}dz = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

c: contour fermé contenant l'origine et $\in$ au domaine convegence de z^k

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$

$X(z).z^{k-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}.z^{k-1}$

$\oint_c X(z).z^{k-1}dz = \oint_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{k-n-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \oint_c z^{k-n-1}dz$

or $\oint_c z^{k-n-1}dz = \begin{cases} 2\pi j & k-n=0 \quad \Rightarrow \quad k=n \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

$$\Rightarrow \oint_c X(z).z^{k-1}dz = x(k).2\pi j \;\; \Rightarrow$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z).z^{k-1}dz \quad \forall k \in Z$$

c : contour fermé contenant l'origine et $\in$ au domaine de convegence de $X(z).z^k$

Calcul de $x(k)$ par la méthode des résidus

$$x(k) = \sum_{\substack{z_i \,:\, \text{tous les} \\ \text{poles} \\ \text{de } X(z).z^{k-1}}} \text{Résidus de } \left[X(z).z^{k-1}\right]$$

$$\text{Résidu}_{z_i}\,[F(z)] = \frac{1}{(l-1)!}\frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}}\left[(z-z_i)^l.F(z)\right]_{z=z_i}$$

avec l = ordre de multiplicité du pole z_i de $F(z)$

z_i :pole simple $(l=1)$ $\Rightarrow$Résidu$_{z_i}$ $[F(z)] = [(z-z_i).F(z)]_{z=z_i}$

5.4 Autres méthodes:

si $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ $N(z), D(z)$ deux polynomes

$x(n) = Tz^{-1}\{X(z)\}$: peut etre calculée par division de polynomes ou par décomposition de $X(z)$ en élements simples et utilisation des tables de transformée en Z

- $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = Q(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$

par identification des termes de $Q(z)$ avec ceux de $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$ on déduit les $x(n)$

- $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_i X_i(z) \Rightarrow x(n) = \sum_i Tz^{-1}\{X_i(z)\}$ $\quad X_i(z)$: élements simples de la décomposition de $X(z)$

Exemple: $z_{i=1,2,3----}$ poles simples de $X(z) = \sum_i \frac{A_i}{z-z_i}$ avrec $A_i = (z-z_i)X(z)\mid_{z=z_i}$

$$\Rightarrow x(n) = Tz^{-1}\{X(z)\} = \sum_i A_i(z_i)^n$$

6 Propriétés de la transformée en Z

démonstrations sous forme d'éxercices (voir Annexe du chapitre 3)

1. Linéarité:

   $w(n) = \alpha x(n) + \beta y(n)$

   $Tz\left\{\alpha x(n) + \beta y(n)\right\} = \alpha X(z) + \beta Y(z) = W(z)$

   D-conver de $W(z)$ = D-conver de $X(z)\cap$D-conver de $Y(z)$

2. Décalage temporel :

   $Tz\left\{x(n - n_0\right\} = z^{-n_0}X(z)$

3. Multiplication par une séquence exponentielle:

   $Tz\left\{x(n\right\} = X(z) \Rightarrow Tz\left\{a^n x(n)\right\} = X(\frac{z}{a})$

4. Dérivation d'ordre k de $X(z)$:

   $X(z) = \sum_n x(n)z^{-n} \qquad \Rightarrow \frac{d^k X(z)}{dz^k} = \sum_n x(n)\frac{d^k}{dz^k}z^{-n} \qquad \frac{d^k}{dz^k}z^{-n} = ?$

   $\frac{d}{dz}z^{-n} = (-n)z^{-n-1} = (-1)(n)z^{-n-1}$

   $\frac{d^2}{dz^2}z^{-n} = (-n)(-n-1)z^{-n-2} = (-1)^2(n)(n+1)z^{-n-2}$

   $\frac{d3}{dz^3}z^{-n} = (-n))(-n-1)(-n-2)z^{-n-3} = (-1)^3(n)(n+1)(n+2)z^{-n-3}$

   $\Rightarrow \frac{d^k}{dz^k}z^{-n} = (-1)^k\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}z^{-k}z^{-n}$

   $\frac{d^k X(z)}{dz^k} = \sum_n x(n)\frac{d^k}{dz^k}z^{-n} = \sum_n x(n)(-1)^k\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}z^{-k}z^{-n}$

   $z^k\frac{d^k X(z)}{dz^k} = \sum_n x(n)(-1)^k\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}z^{-n} \Rightarrow z^k\frac{d^k X(z)}{dz^k} = Tz\left\{x(n)(-1)^k\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}\right\}$

5. Propriétes de parité :

   $x(n) \underset{Tz^{-1}}{\overset{Tz}{\rightleftarrows}} X(z) \Rightarrow \quad x(-n) \underset{Tz^{-1}}{\overset{Tz}{\rightleftarrows}} X^{-1}(z) \qquad\qquad x^*(n) \underset{Tz^{-1}}{\overset{Tz}{\rightleftarrows}} X^*(z^*)$

   $x^*(-n) \underset{Tz^{-1}}{\overset{Tz}{\rightleftarrows}} X^*(z^{-1*})$

6. Produit de convolution :

   $v(n) = x(n) * y(n)$

   $Tz\left\{x(n) * y(n)\right\} = Tz\left\{x(n)\right\} Tz\left\{y(n)\right\} = X(z).Y(z) = V(z)$

   D-conver de $V(z)$ = D-conver de $X(z) \cap$D-conver de $Y(z)$

7. Produit de deux séquences:

   $v(n) = x(n).y(n)$

   $Tz\left\{x(n).y(n)\right\} = Tz\left\{v(n)\right\} = V(z)$

   $x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{c} X(z^{'}).z^{'n-1}dz^{'}$ $\quad (Tz \ \text{ inverse})$

   $V(z) = \sum\limits_{n} v(n).z^{-n} = \sum\limits_{n} x(n).y(n).z^{-n} = \sum\limits_{n} \frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{c} X(z^{'}).z^{'n-1}dz^{'}.y(n).z^{-n}$

   $= \frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{c} X(z^{'}) \sum\limits_{n} z^{'n-1}.y(n).z^{-n}dz^{'} = \frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{c} X(z^{'}) \sum\limits_{n} y(n).(\frac{z}{z^{'}})^{-n}\frac{1}{z^{'}}dz^{'}$

   $\Rightarrow V(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{c} X(z^{'})Y(\frac{z}{z^{'}})\frac{1}{z^{'}}dz^{'}$

8. Tz d'une fonction de correlation:

   $Tz\left\{r_{xy}(k)\right\} = X^{*}(\frac{1}{Z^{*}}).Y(z)$

   $Tz\left\{r_{x}(k)\right\} = X^{*}(\frac{1}{Z^{*}}).X(z)$

Exemple de calcul de la Tz :

soit $x(n) = \{ \begin{smallmatrix} a^n & n \geqslant 0 \\ b^n & n<0 \end{smallmatrix}$

$X(z) = Tz\left\{x(n)\right\} = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum\limits_{-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum\limits_{0}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum\limits_{1}^{+\infty} b^{-n}z^{n} + \sum\limits_{0}^{+\infty} a^{n}z^{-n}$

$X(z) = \sum\limits_{1}^{+\infty}(\frac{z}{b})^{n} + \sum\limits_{0}^{+\infty}(\frac{a}{z})^{n}$

$\sum\limits_{1}^{+\infty}(\frac{z}{b})^{n} = \lim\limits_{n\rightarrow\infty} \frac{\frac{z}{b} - (\frac{z}{b})^{n}}{1-\frac{z}{b}} = \frac{\frac{z}{b}}{1-\frac{z}{b}}$ $\quad$ pour $\left|\frac{z}{b}\right| < 1 \Rightarrow |z| < |b|$

$$\sum_{0}^{+\infty}(\tfrac{a}{z})^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{a}{z})^n}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} \qquad \text{pour } \left|\tfrac{a}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$

$X(z) = \frac{\frac{z}{b}}{1-\frac{z}{b}} + \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-b}$ pour $|a| < |z| < |b|$: domaine de convergence de $X(z)$

si $|a| < |b| \Rightarrow$ D-conver de $X(z)$ est $\neq \Phi \Rightarrow X(z)\ \exists$

si $|a| \geqslant |b| \Rightarrow$D-conver de $X(z)$ est $= \Phi \Rightarrow X(z) \nexists$

6.1 Relation plan P- plan Z:

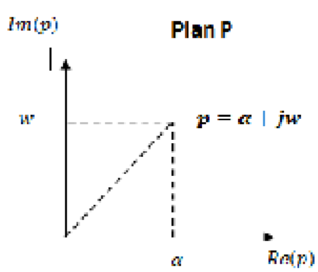
$p = \alpha + jw \qquad \alpha = \mathrm{Re}(p)$ et $w = \mathrm{Im}(p)$

$z = e^{pT_e} = e^{(\alpha+jw)T_e} = e^{\alpha T_e}e^{jwT_e}$

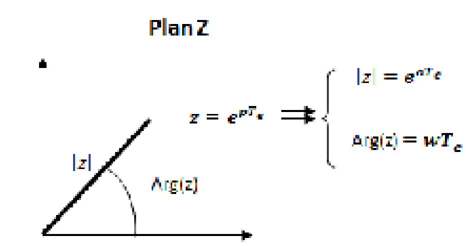
$z = |z|\, e^{iArg(z)} \quad \Rightarrow |z| = e^{\alpha T_e}$ et $Arg(z) = wT_e$

pour $\alpha = \mathrm{Re}(p) = 0$ (axe des imaginaires) $\Rightarrow |z| = e^{0T_e} = 1 \Rightarrow z = e^{jwT_e}$

la TF de $x(n)$: $X(w) = X(z)\mid_{|z|=1}$ $|z| = 1$ cercle de rayon 1 centré sur l'origine



Coordonnées cartésiennes (α, w)



Coordonnées polaires $(|z|, Arg(z))$

Domaines dans le plan P → **leurs images dans le plan Z**

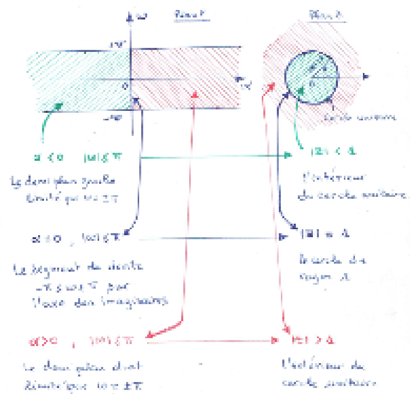
$\alpha = Re(p) < 0 \quad \forall w$
Demi plan gauche
$\longrightarrow$
$z = e^{pT_e} = e^{\alpha T_e} e^{jwT_e}$
$\alpha < 0 \longrightarrow e^{\alpha T_e} = |z| < 1$
$|z| < 1 \Rightarrow$
disque de rayon 1 sans la circonference

$\alpha \quad Re(p) \quad 0 \quad \forall w$
Axe des Imaginaires
$\longrightarrow$
$|z| \quad e^{\alpha T_e} \quad e^{0} \quad 1 \,, \forall\, wT_e$
cercle de rayon 1

$\alpha = Re(p) > 0 \quad \forall w$
Demi plan droit
$\longrightarrow$
$|z| = e^{\alpha T_e} \quad \alpha > 0 \quad > |z| > 1 \ \forall wT_e$
extérieur du cercle de rayon 1

Remarque:

La relation plan P-plan Z n'est pas bijective si on considere l'axe des w entier. Afin d'avoir une relation bijective entre les deux plans on doit conidérer uniquement une bande dans le plan P de largeur $w = 2\pi \quad (-\pi \leqslant w \leqslant \pi)$



σ < 0 , |ω| ≤ π
|z| < 1
σ = 0 , |ω| ≤ π
|z| = 1
σ > 0 , |ω| ≤ π
|z| > 1