Table des matières

0.1 Généralités et definitions

0.1.1 1) CAN :

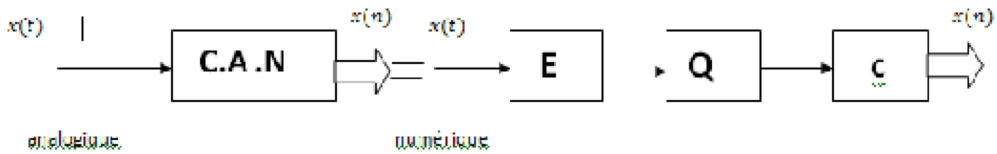
c'est l'operation qui consiste à transformer un signal analogique en un signal numérique.

la C.A.N assure une compatibilité entre le " monde" analogique et le "monde" numérique.

la C.A.N se compose de trois opérations à savoir :

1. l'echantillonage
2. la quantification
3. le codage

$4_{1.png}4$



$_{1.png}$

C.A.N : convertisseur analogique numérique

E : echantillonneur ; Q : quantificateur ; C : codeur

0.1.2 2) Définition de chaque opération

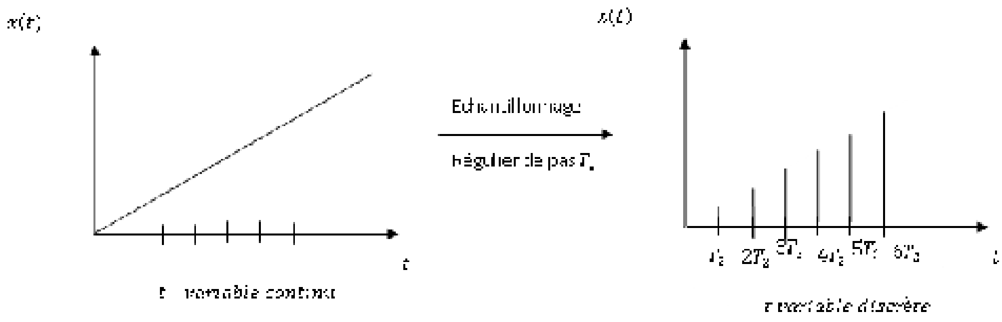
0.1.3 a) Echantillonage :

1. (a) c'est l'opération qui consiste à discrétiser l'axe des temps.

   en effet, l'axe des temps est substitué par une sélection particulière de points $\{T_i\}_{i\in Z}$ répartis sur cet axe.

   - répartition uniforme des $\{T_i\}_{i\in Z} \Longrightarrow T_i = iT_e$ avec $T_e = cste \Longrightarrow$ echantillonage régulier ou périodique de pas T_e
   - répartiyion non uniforme des $\{T_i\}_{i\in Z} \Longrightarrow T_i = iT_e$ avec $T_e \neq cste$ (variable) $\Longrightarrow$ echantillonage irrégulier

. T_e variable suivant une certaine loi de probabilité $\Longrightarrow$ echantillonage stochastique.



0.1.4 b) Quantification :

1. (a) c'est l'opération qui consiste à discrétiser l'axe des amplitudes. l'axe continu des amplitudes est substitué par une selection particulière de ptd ou de niveaux répartis sur cet axe.

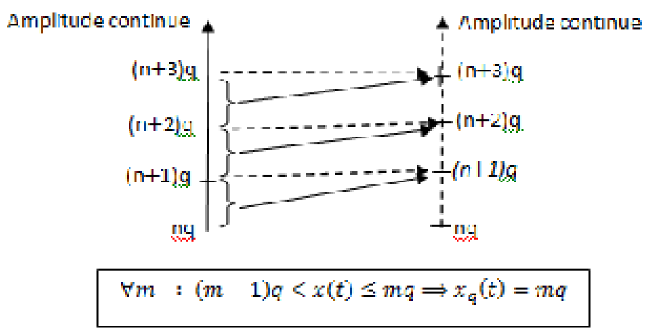
   . niveaux uniforméments repartis (multiples d'un pas q)
   $\Longrightarrow$ quantification uniforme ; $q = cste$ pas de quantification.

   . niveaux non uniforméments répartis $(q \neq cste)$ $\Longrightarrow$ quatification non uniforme.
   le quantificateur réalise une approximation du signal analogique par un signal en pas d'escaliers.

   . on distingue trois types d'approximation

a- Par excès

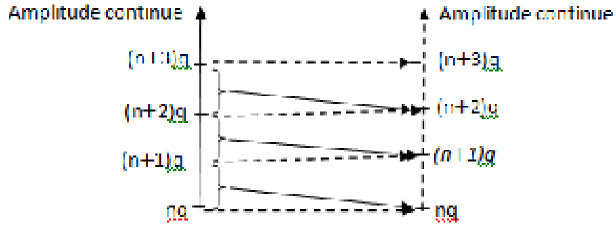
$1_{3.png1}$



$_{3.png}$

b- Par défault :

$2_{4.png}2$

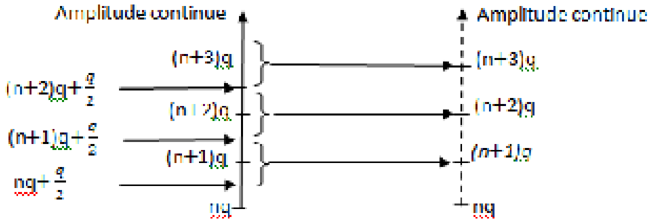


$$\forall m \quad : mq \leq x(t) < (m+1)q \longrightarrow x_q(t) = mq$$

$_{4.png}$

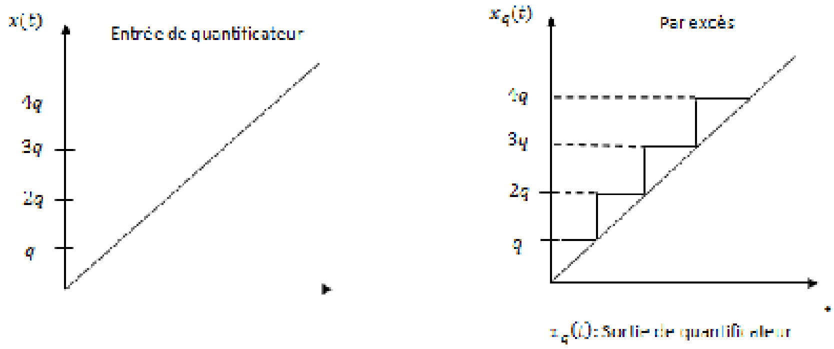
c- Par arrondi :

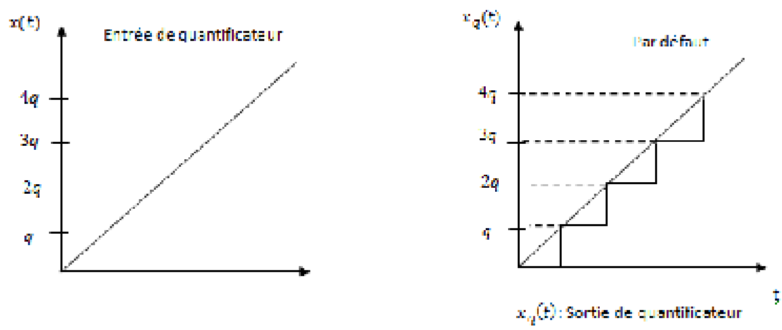
$3_{5.png}3$

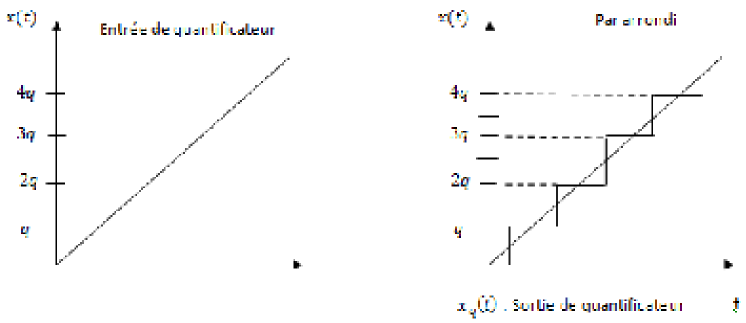


$$\forall m \quad : mq - \frac{q}{2} < x(t) \leq mq + \frac{q}{2} \longrightarrow x_q(t) = mq$$

$_{5.png}$







0.1.5 Bruit de quantification :

1. le quantificateur réalise une approximation d'ordre zéro du signal analogique $x(t)$ par un signal $x_q(t)$ à amplitude discrète. cette approximation induit une erreur $e_q(t) = x(t) - x_q(t)$ appelée bruit de quantification

a par excès $-q \prec e_q(t) \leqslant 0$

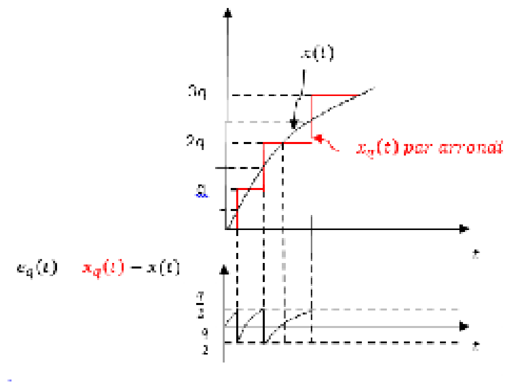
Remarque 0.1.1. *b. par défaut* $0 \prec e_q(t) \leqslant q$

c. par arrondi $-\frac{q}{2} \prec e_q(t) \leqslant \frac{q}{2}$

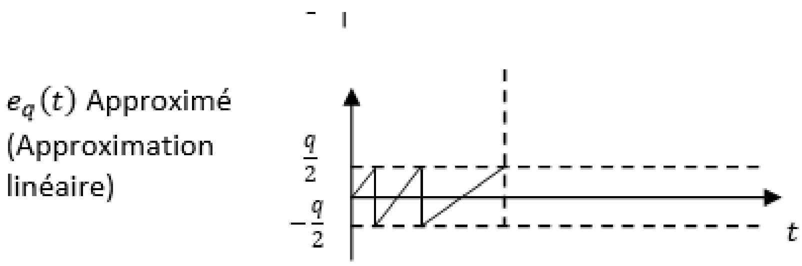
0.1.6 Estimation de la puissance du bruit de quantification :

considérons le cas par arrondi : $-\frac{q}{2} \prec e_q(t) \leqslant \frac{q}{2}$ avec $e_q(t) = x(t) - x_q(t)$

Remarque 0.1.2. *1.* $\Longrightarrow e_q(t)$ *: est un signal dépendant de* $x(t)$



généralement le pas de quantification q *est trés petit* $\Longrightarrow$ $e_q(t)$ *peut etre approximé par des segments de droite (approximation d'ordre 1 ou linéaire), de durée* τ



P_{e_q} *est approximativement égale à la puissance moyenne d'un signal périodique de période* τ *trés petite.*

$e_q(t) \approx \frac{q}{\tau}t \qquad |t| \leqslant \frac{\tau}{2} \qquad$ *(une période)*

$$P_{e_q} = \frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} (\frac{q}{\tau}t)^2 dt = \frac{q^2}{\tau^3} 2\int_0^{\frac{\tau}{2}} t^2 dt = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\tau^3}t^3 \mid_0^{\frac{\tau}{2}}$$

$$P_{e_q} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\tau^3}(\frac{\tau}{2})^3 = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\tau^3}\frac{\tau^3}{8} = \frac{q^2}{12}$$

c. ***codage***

le codeur a pour role d'établir une relation bijective entre les différents niveaux de quantification et les mots d'un code généralement binaire. Ainsi chaque niveau de quantification est représenté par une combinaison unique du code considéré.

Exemple 0.1.3. *: soit un CAN à 4bits et un pas de quantificatin* $q = 0,1$

$nq - \frac{q}{2} \prec x(t) \prec nq + \frac{q}{2} \Longrightarrow x(t) \approx nq$ *par arrondi* *soit* $x(t) = 1,24 \Longrightarrow x(t) = \frac{1,24}{q}q = \frac{1,24}{0,1}q = 12,4q \Rightarrow$

$12q - \frac{q}{2} \prec x(t) \prec 12q + \frac{q}{2} \Longrightarrow x(t) \approx 12q$

le codeur nous donne la combinaison binaire (4bits) qui correspond à 12 (décimal) soit : (11001) binaire

$x(t) = 1,24 \Longrightarrow x(n) = 1100$ *binaire*

0.1.7 3) caractéristiques d'un convertisseur :

Remarque 0.1.4. ** le CAN présente trois caractéristiques essentielles :*

** la dynamique de l'amplitude du signal d'entrée*

** la capacité du CAN = nbre de bits du codeur*

** le temps de conversion T_e qui fixe la vitesse de fonctionnement du CAN*

** d_c : dynamique du signal d'entrée*

$x(t) \succ d_c \Longrightarrow$ *saturation du CAN* $\Longrightarrow$ *écrétage*

$\forall x(t) \succ d_c \Longrightarrow$ *le CAN retient $x(t) = d_c$ le reste est ignoré.*

** capacité du CAN : nbre de bits = n cette caractéristique fixe la précision du CAN.*

n :nbre de bits $\Longrightarrow 2^n = N$ nbre de combinaisons.

Afin de pouvoir coder tous les niveaux de quantification on doit avoir : $d_c = (2^n - 1)q$

. sachant d_c et n on tire $q = \frac{d_c}{2^n - 1}$

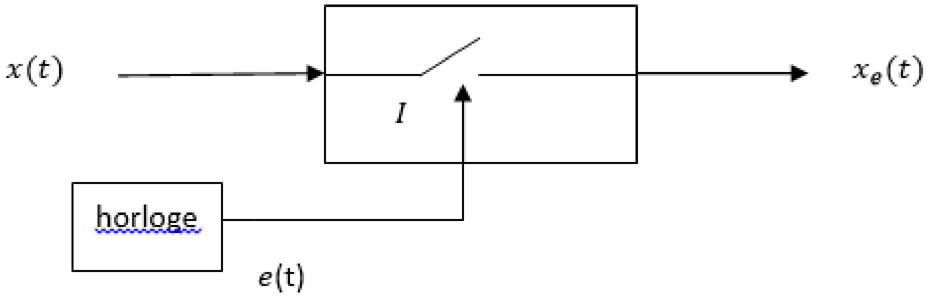
. sachant d_c et q on déduit $n = \log_2(1 + \frac{d_c}{q})$

** temps de conversion T_c : c'est le temps nécessaire pour convertir un échantillon d'amplitude maximale permise (d_c)*

- remarque : on doit avoir $T_c \leqslant T_e$ (T_e pas d'échantillonnage

0.2 II-Etude mathématique de l'échantillonnage régulier :

Remarque 0.2.1. *1. représentation symbolique d'un échantillonneur*



$x(t)$: *signal analogique*

$x_e(t)$: *signal échantillonné*

$e(t)$: *horloge ou fonction d'échantillonnage*

"I" interrupteur électronique

0.2.1 1) Domaine temps :

Echantillonner un signal $x(t)$ c'est multiplier ce signal par une fonction d'échantillonnage $e(t)$

$x_e(t) = x(t).e(t)$

$e(t)$: signal périodique de période T_e $\Longrightarrow$ $e(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} E_n e^{j2\pi n f_e t}$ avec $E_n = \frac{1}{T_e}\int\limits_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} e(t)e^{j2\pi n f_e t}dt$ $\forall n$ et $f_e = \frac{1}{T_e}$

Echantillonage ideal $e(t)$ est un peigne de Dirac

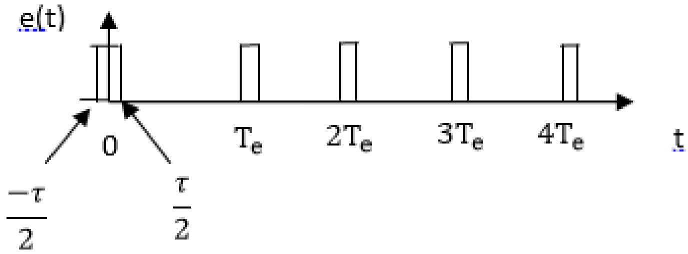
Remarque 0.2.2. . *Echantillonage Réel* $e(t)$ *est un train d'implusions*

$e(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \partial(t - nT_e)$ *peigne de Dirac de période* T_e

$\Longrightarrow x_e(t) = x(t).e(t) = x(t).\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \partial(t - nT_e) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x(t).\partial(t - nT_e)$

$x_e(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x(t).\partial(t - nT_e) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e).\partial(t - nT_e)$

**** cas réel :*** $e(t)$ ***train d'implsions***



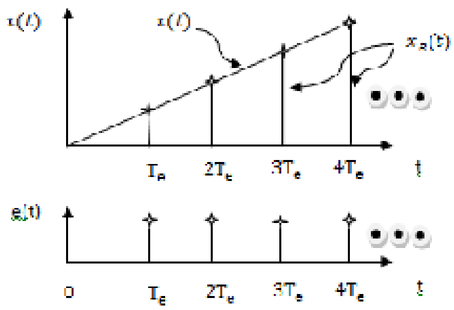
chaque impulsion est de largeur τ *, d'amplitude 1 et centrée sur* $t = nT_e$

$\Longrightarrow$ *l'impulsion centrée sur* $t = nT_e$ *a pour expression :* $1.r(\frac{t-nT_e}{\tau})$

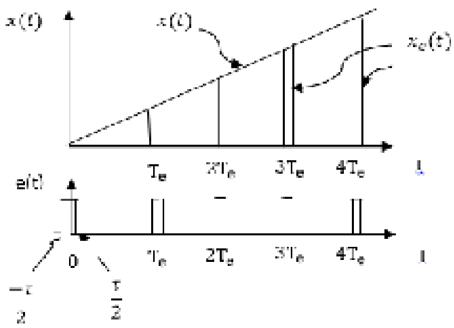
$$\Longrightarrow e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(\tfrac{t-nT_e}{\tau})$$

$$\Longrightarrow x_e(t) = x(t).e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t).r(\tfrac{t-nT_e}{\tau})$$

$*$ ***échabtillonnage ideal :***



$*$ ***Echantillonnage réel***



0.2.2 2) Dans le domaine fréquence :

$x_e(t) = x(t).e(t) \quad \text{(temps)}$

Remarque 0.2.3. *1.* $X_e(f) = TF\{x_e(t)\} = TF\{x(t).e(t)\} = X(f) * E(f)$ *(Fréquence) avec* $E(f) = TF\{e(t)\}$

$e(t)$ *signal périodique de période* $T_e \implies e(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} E_n e^{j2\pi n f_e t}$

$$\implies E(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n \partial(f - nf_e)$$

$$\implies X_e(f) = X(f) * E(f) = X(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n \partial(f - nf_e)$$

$$\implies X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) * \partial(f - nf_e).E_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n \ . \ X(f - nf_e)$$

. ***cas idéal :***

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \partial(t - nT_e) \implies E_n = \frac{1}{T_e} \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} e(t) e^{j2\pi n f_e t} dt$$

$$E_n = \frac{1}{T_e} \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \partial(t).e^{j2\pi n f_e t} dt = \frac{1}{T_e} \quad \forall n$$

$$\implies X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n X(f - nf_e) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e)$$

. ***cas réel :***

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r\left(\frac{t - nT_e}{\tau}\right) = E_n = \frac{1}{T_e} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1.e^{-j2\pi n f_e t} dt$$

$E_n = \frac{1}{T_e} . \frac{-1}{j2\pi n f_e} e^{-j2\pi n f_e t} \mid_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{\pi n} \sin(n\pi\tau f_e)$

$E_n = \frac{1}{\pi n}.sin(n\pi \frac{\tau}{T_e}) = \frac{\tau}{T_e} \operatorname{sinc}(n\frac{\tau}{T_e})$

$\Longrightarrow X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n X(f - nf_e) = \frac{\tau}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} sinc(n\frac{\tau}{T_e}) X(f - nf_e)$

coclusion :

- . $X_e(f)$ *est périodique de période* f_e *dans le cas idéal.*
- . $X_e(f)$ *est périodique de période* f_e *amortie par les* $E_n = \frac{\tau}{T_e} sinc(n\frac{\tau}{T_e})$ *dans le cas réel.*

  $X_e(f)$ *est constitué d'une infinité de termes* $E_n X(f - nf_e)$ *de fréquences centrales* $f = nf_e \quad n \in Z$

0.3 III-restitution du signal $x(t)$ à partir de $x_e(t)$:

Remarque 0.3.1. *1. (a) c'est l'opération inverse de l'echantillonnage*

$$x(t) \xrightarrow[\text{(opération directe)}]{\text{echantillonnage}} x_e(t) \xrightarrow[\text{(opération inverse)}]{\text{echantillonnage inverse}} x(t)$$

$x_e(t) \to x(t)$ *temps*

$X_e(f) \to X(f)$ *fréquence*

$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n X(f - nf_e) = E_0 X(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} E_{-n} X(f + nf_e) + E_n X(f - nf_e)$

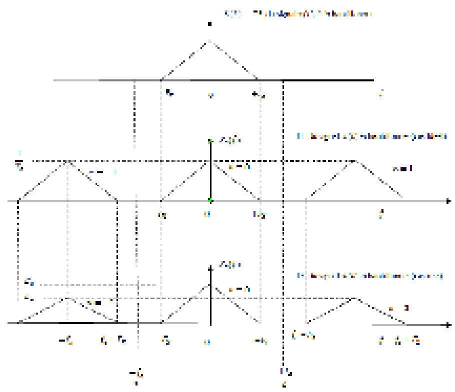
$\Longrightarrow$ *pour pouvoir extraire* $X(f)$. *de* $X_e(f)$. *on doit séparer le terme* $n = 0$ *c.a.d* $E_0 X(f)$ *sans etre affecté par les termes adjacents* $n = \pm 1, \pm 2.....$ $\Longrightarrow$ *on doit éviter tout chevauchement éventuel des termes voisins.*

0.3.1 Illustration :

Soit $x(t)$ un signal defini par sa transformée de Fourier $X(f)$ tel qu'elle est représentée si dessous :

représentation graphique des spectres de $x(t)$ avant et aprés échantillonnages ideal et réel

Remarque 0.3.2. *1. (a)*



$E_0 = \frac{\tau}{T_e} sinc\ (n\frac{\tau}{T_e}) \mid_{n=0} = \frac{\tau}{T_e}$

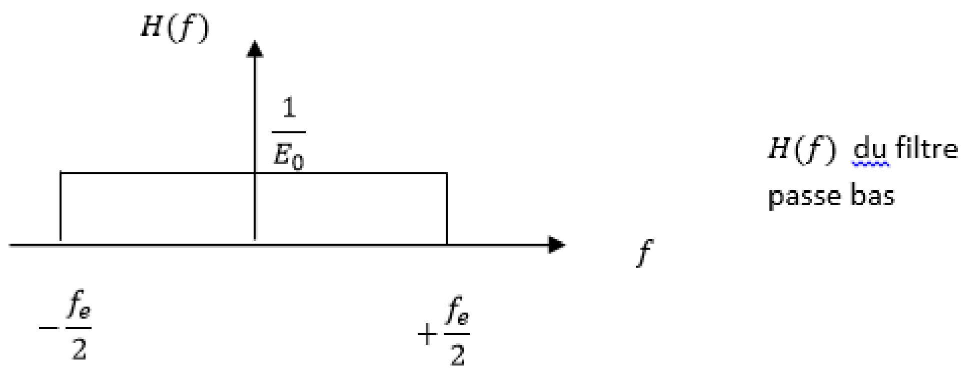
$E_1 = \frac{\tau}{T_e} sinc\ (\frac{\tau}{T_e}) \prec E_0$

. ***discussion suivant le choix du paramètre*** f_e ***donc*** T_e

$f_e - F_x \succ F_x \Longrightarrow f_e \succ 2F_x \Longrightarrow$ *pas de chevauchement entre le terme* $n = 0$ *et les termes* $n = \pm 1$

donc pour $f_e \succ 2F_x \Longrightarrow$ *pas de repliement spectral*

$X(f) = \frac{1}{E_0} X_e(f) \mid_{n=0}$ *on doit isoler le terme* $n = 0$, *pour le faire on réalise un filtrage passe bas de fréquence de coupure* $f_c = \frac{f_e}{2}$



$\Longrightarrow X(f) = X_e(f).H(f) \Longrightarrow x(t) = x_e(t) * h(t)$

$$h(t) = TF^{-1}\{H(f)\} = \frac{1}{E_0} \int_{-\frac{fe}{2}}^{\frac{fe}{2}} 1.e^{j2\pi ft} dt$$

$$h(t) = \frac{1}{E_0} \frac{1}{j2\pi t} e^{j2\pi ft} \mid_{\frac{-fe}{2}}^{\frac{+fe}{2}} = \frac{1}{E_0} \frac{1}{\pi t} \sin(\pi f_e t)$$

$h(t) = \frac{1}{E_0}\frac{f_e}{\pi f_e t}\sin(\pi f_e t) = \frac{1}{E_0 T_e} sinc(\frac{t}{T_e})$

$\Longrightarrow x(t) = x_e(t) * \frac{1}{E_0 T_e} sinc(\frac{t}{T_e})$

. ***cas ideal :***

$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\ \partial(t - nT_e) \qquad\qquad E_0 = \frac{1}{T_e}$

$\Longrightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_e)\ \partial(t - nT_e) * sinc(\frac{t}{T_e})$

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_e)\ \ sinc(\frac{t-nT_e}{T_e})$

Remarque :

Remarque 0.3.3. $x(t)$ *est de la forme :*

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(t) \qquad \{\alpha_n\}_{n\in Z}$ *composantes de* $x(t)$

$\{\varphi_n(t)\}_{n\in Z}$ *base de l'éspace vectoriel*

avec $\alpha_n = x(nT_e) \qquad \forall n \in Z$

$\varphi_n(t) = sinc(\frac{t-nT_e}{T_e}) \qquad \forall n \in Z$

conclusion :

Echantillonner $x(t)$ *est équivalent à représenter ce signal dans la base* $\varphi_n(t) = sinc(\frac{t-nT_e}{T_e})$ $n \in Z$

* ***cas réel :***

(a)

Remarque 0.3.4. $x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\ .r(\frac{t-nT_e}{\tau}) \qquad E_0 = \frac{\tau}{T_e}$

$\Longrightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\ .r(\frac{t-nT_e}{\tau}) * \frac{1}{\tau} sinc(\frac{t}{T_e})$

approximation :

$x(t) \simeq x(nT_e) = cste \quad$ *pour* $nT_e - \frac{\tau}{2} \prec t \prec nT_e + \frac{\tau}{2}$

$\Longrightarrow x(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\ .r(\frac{t-nT_e}{\tau}) * \frac{1}{\tau} sinc(\frac{t}{T_e})$

0.4 Theorème de Schanon ou théorème d'échantillonnage :

$x(t)$ est un signal de bande spectrale $w_x = 2F_X$ c.a.d $X(f) = 0 \ \ \forall |f| \succ F_X$

$x(t)$ est échantillonner avec le pas $T_e \Longrightarrow f_e = \frac{1}{T_e}$ pour nous donner $x_e(t)$

le théorème de Schanon nous permet de choisir f_e (ou T_e) en fonction de la bande w_x du signal afin d'asurer la réversibilité de l'échantillonnage :

Remarque 0.4.1. *1. (a) $f_e \succ 2F_X = w_x \Longrightarrow$ pas de repliement spéctral $\Longrightarrow$ l'echantillonnage est réversible c.a.d on peut éxtraire $x(t)$ à partir de $x_e(t)$*

2. $f_e \prec 2F_X = w_x \Longrightarrow$ il y'a repliement spéctral c.a.d les termes $n = \pm 1$ chevauchent avec le terme $n = 0 \Longrightarrow$ l'échantillonnage est non réversible

3. $f_e = 2F_X = w_x \Longrightarrow$ cas limite si $X(F_X) = X(-F_X) = 0$

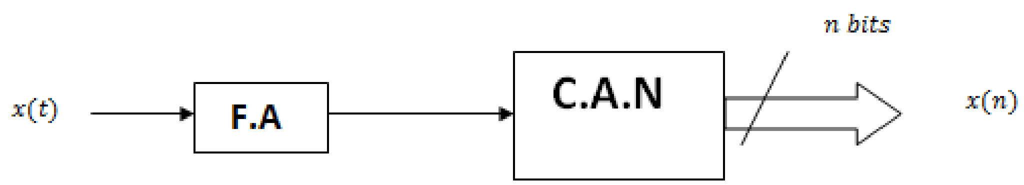
$\Longrightarrow$ échantillonage réversible

si $X(F_X) = X(-F_X) \neq 0 \Longrightarrow$ échantillonnage non réversible

0.4.1 *quelques considérations pratiques :

Remarque 0.4.2. *1. (a) En pratique on doit vérifier la condition da Schanon avec un coeifficient de sécurité $\eta \succ 1$ afin de s'éloigner de la condition limite $f_e = 2F_X = w_x$ en pratique on choisi $f_e = 2\eta F_X = \eta w_x$ avec $\eta \succ 1$ valeurs pratiques de $\eta = 2, 3$*

. En pratique on doit réaliser un filtrage passe bas de fréquence de coupure $f_e = 2F_X$ afin d'éliminer la "queue" spéctrale éventuelle de $X(f)$ due aux différents types de bruit qui qffecte le signal. ce filtre est appelé filtre d'anti-repliement spectral et doit etre placé en amont du CAN



F.A : filtre antirepliement passe bas

C.A.N : convertisseur anologique numérique