

Calcul vectoriel :

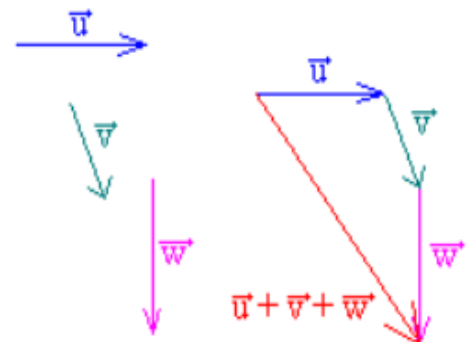
Oérations sur les vecteurs et propriétés

Addition vectorielle :

Construction :

Pour additionner deux ou plusieurs vecteurs :

- On prend un représentant du **premier vecteur** (un vecteur égaux)
- On prend un représentant du **second vecteur** dont l'origine est à placer à l'extrémité du premier vecteur , on procède ensuite de la même façon pour les autres vecteurs à ajouter.
- Le vecteur somme est le vecteur dont l'origine est l'origine du représentant du **premier vecteur** et l'extrémité est l'extrémité du représentant du **dernier vecteur**.



Relation de Chasles :

Quels que soient les points A, B, C du plan (ou de

l'espace) : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$

Cette relation se généralise par exemple :

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GU} + \overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VC} = \overrightarrow{AC}$$

Propriétés de l'addition vectorielle

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w}

$$1) \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

($\vec{0}$ est l'élément neutre de l'addition vectorielle)

$$2) \quad \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

(La somme de deux vecteurs opposés est le vecteur nul)

$$3) \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

(Commutativité de l'addition vectorielle)

$$4) \quad \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

(Associativité de l'addition vectorielle)

Multiplication d'un vecteur par un réel :

Soit \vec{u} un vecteur donné

et k un réel :

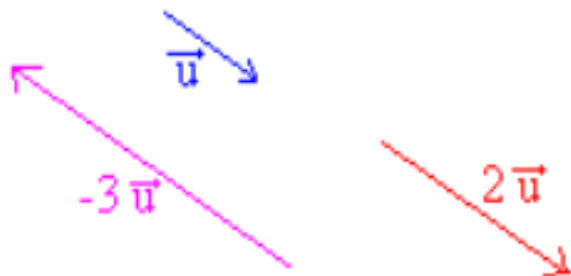
Si $k \neq 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ le vecteur $k \cdot \vec{u}$ est le vecteur :

_de même direction que \vec{u}

_de même sens si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$

_de norme $\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

Si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ alors le vecteur $k \cdot \vec{u}$ est le vecteur nul



Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel.

Pour tous réels a, b et tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} on a :

$$1) \quad (a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$

$$2) \quad a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

$$3) \quad a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$$

Définition vecteurs colinéaires

2 vecteur \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires

si il existe un réel k tel que :

$$\vec{v} = k\vec{u}$$

Soit \vec{OA} , \vec{OB} et \vec{OC} trois vecteur de l'espace vectoriel E. avec :

$$\vec{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}$$

$$\vec{OB} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k}$$

$$\vec{OC} = x_C \vec{i} + y_C \vec{j} + z_C \vec{k}$$

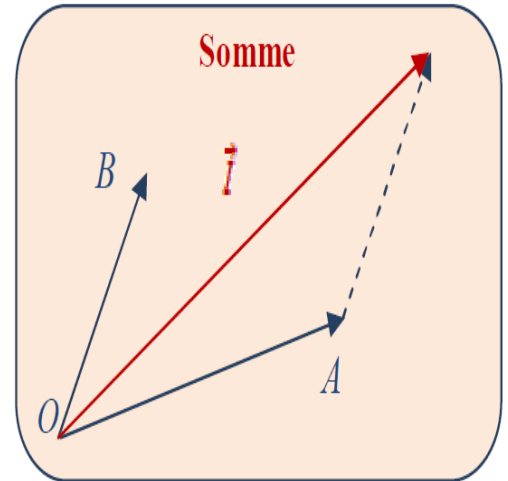
I.3.1 Somme et multiplication par un scalaire

- La somme de deux vecteurs :

$$\vec{I} = \vec{OA} + \vec{OB} = (x_A + x_B)\vec{i} + (y_A + y_B)\vec{j} + (z_A + z_B)\vec{k}$$

Le vecteur \vec{I} est représenté géométriquement par :

(voir figure Somme)



- La multiplication par un scalaire :

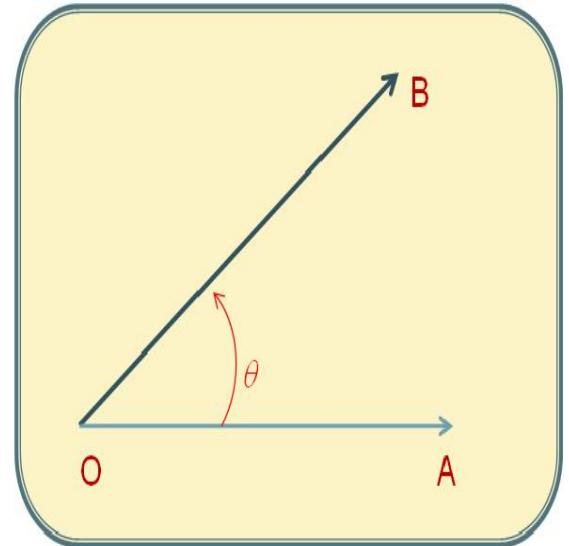
$$\forall \mu \in \mathbb{R}, \mu \vec{OA} = \mu x_A \vec{i} + \mu y_A \vec{j} + \mu z_A \vec{k}$$

Produit scalaire :

Le **produit scalaire** de deux vecteurs non nuls représentés par les bipoints OA et OB est le **nombre réel** $OA \cdot OB \cdot \cos(\theta)$ si l'angle θ désigne celui de AOB . Si l'un des vecteurs est nul alors le produit scalaire est nul.

Dans le cas où aucun des vecteurs n'est nul, cette définition prend la forme suivante :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \cdot OB \cdot \cos \theta$$



Propriétés du produit scalaire :

Commutativité :

Le produit scalaire est commutatif :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OA} \quad (\text{Justification : } \cos \theta = \cos(-\theta))$$

Distributivité par rapport à l'addition :

Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition :

$$\vec{OA} \cdot (\vec{OB} + \vec{OC}) = \vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OA} \cdot \vec{OC}$$

Conséquence :

$$\text{Si } \vec{OA} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{OB} \neq \vec{0} \text{ alors } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Leftrightarrow \vec{OA} \perp \vec{OB}$$

Le produit scalaire nous permet donc de déduire la perpendicularité géométrique lorsqu'il est de valeur nulle.

Expression analytique :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B$$

I.3.3 Produit vectoriel

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs non nuls représentés par les bipoints OA et OB est le vecteur représenté par le bipoint OC avec :

- Un **module** égale à $OA \cdot OB \cdot \sin(\theta)$
- Une **direction** perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs OA et OB
- Un **sens** défini par la règle de la main droite ou de la progression du tire bouchon qui envoi \vec{OA} sur \vec{OB} . On note :

$$\|\vec{OA} \wedge \vec{OB}\| = OA * OB * \sin \theta$$

Propriétés du produit vectoriel :

Commutativité :

Le produit vectoriel est **anticommutatif** :

$$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = - \vec{OB} \wedge \vec{OA} \quad (\text{Justification : } \sin \theta = - \sin(-\theta))$$

Distributivité par rapport à l'addition :

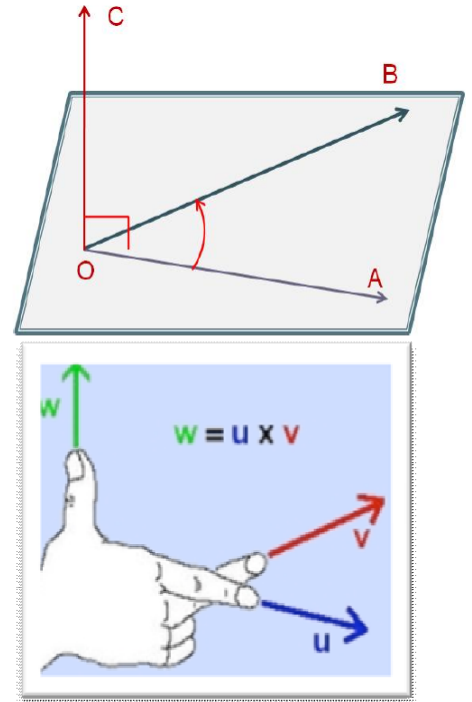
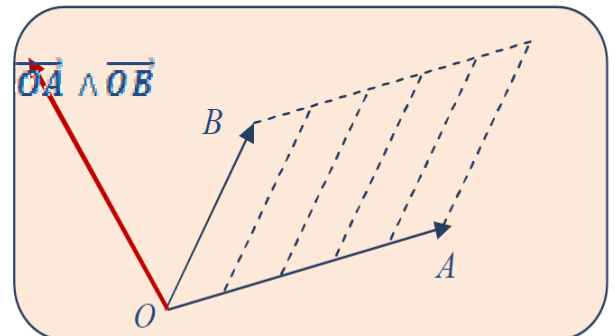
Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition :

$$\vec{OA} \wedge (\vec{OB} + \vec{OC}) = \vec{OA} \wedge \vec{OB} + \vec{OA} \wedge \vec{OC}$$

Interprétation géométrique du produit vectoriel :

Le module de $\vec{OA} \wedge \vec{OB}$ est donné par

$OA * OB * \sin \theta$ qui représente l'aire (surface) du parallélogramme construit sur les deux vecteurs.



Conséquence :

Si $\vec{OA} \neq \vec{0}$ et $\vec{OB} \neq \vec{0}$ alors $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OA} \parallel \vec{OB}$

Expression analytique :

$$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} \vec{k} - \begin{vmatrix} x_A & z_A \\ x_B & z_B \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} y_A & z_A \\ y_B & z_B \end{vmatrix} \vec{i}$$

(Voir exemple flèches)

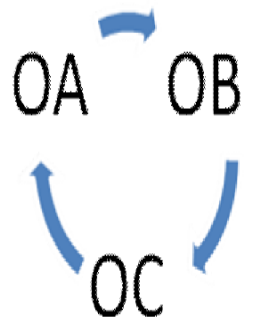
I.3.4 Produit mixte

Le produit mixte de Trois vecteurs non nuls représentés par les bipoints OA et OB et OC est un scalaire ; Il est le déterminant de ces trois vecteurs dans une base orthonormale directe quelconque.

On note : $[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}] = \vec{OA} \cdot (\vec{OB} \wedge \vec{OC})$

Propriétés du produit mixte :

- $[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}] = \vec{OA} \cdot (\vec{OB} \wedge \vec{OC}) = \vec{OC} \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{OB}) = \vec{OB} \cdot (\vec{OC} \wedge \vec{OA})$
-



Interprétation géométrique du produit vectoriel :

Conséquence :

Expression analytique :

$$\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \wedge \vec{OC}) = \begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \end{vmatrix}$$

I.3.5 Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel peut être calculé à l'aide de la relation suivante :

$$\vec{OA} \wedge (\vec{OB} \wedge \vec{OC}) = (\vec{OA} \cdot \vec{OC}) \cdot \vec{OB} + (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \cdot \vec{OC}$$

I.3.6 Dérivation vectorielle

Soient $M(x(t), y(t), z(t))$ du repère $R(O,xyz)$ on a :

$$\vec{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Par définition :

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Que l'on note aussi :

$$\frac{d\vec{M}}{dt}$$

Propriétés :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{d}{dt}(\vec{u} + \vec{v}) &= \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} & \frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{v}) &= \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{u} \\ \bullet \quad \frac{d}{dt}(\vec{u} \wedge \vec{v}) &= \frac{d\vec{u}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} & \frac{d}{dt}[\lambda(t)\vec{u}(t)] &= \frac{d\lambda}{dt}\vec{u} + \lambda \frac{d\vec{u}}{dt} \end{aligned}$$

Définition de l'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$ d'une fonction :

Considérons l'espace rapporté à un repère orthonormé $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Soit $f(x,y,z)$ une fonction scalaire des trois variables x,y,z . La différentielle de f s'écrit::

Le gradient d'une fonction $f(x, y, z)$ est un vecteur qui indique la direction et le sens de croissance de la fonction f dans l'espace.

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}.$$



Univ Batna 2

ISTU

Physique I

TD N°1

Dept GAT

SI 2020/2021

L'espace étant muni d'un repère ortho normal $R(O ; X ; Y ; Z)$, ($i ; j ; k$) dans tout ce qui suit.

Exercice N° 1 : Soit les vecteurs :

$$\vec{A} = -3 \vec{i} + \frac{2}{3} \vec{j} - \sqrt{5} \vec{k}$$

$$\vec{B} = 4 \vec{i} + 2 \vec{j} - \sqrt{2} \vec{k}$$

$$\vec{C} = \frac{2}{3} \vec{i} - \frac{3}{2} \vec{j} - \frac{3}{\sqrt{5}} \vec{k}$$

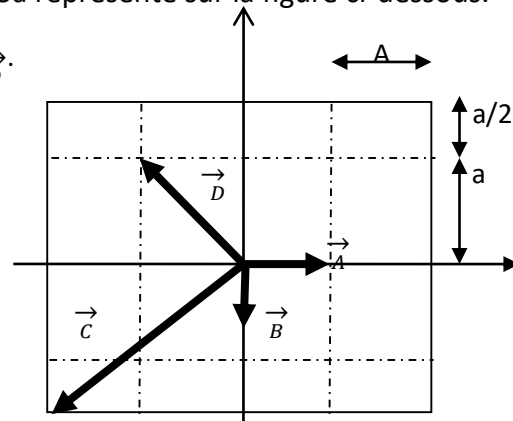
Calculer :

- a- Les modules des vecteurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} .
- b- Le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B}$
- c- L'angle entre \vec{A} et \vec{B}

Exercice N° 2 :

On considère un rectangle de longueur $4a$ et de largeur $3a$ représenté sur la figure ci-dessous.

- a- Calculer la résultante des vecteurs \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} et \vec{D} .



Exercice N° 3 :

Soit la fonction :

$$f(x, y, z) = -2x^2 \cdot y \cdot z^2 + 3\sqrt{y} \cdot \frac{x^2}{2z} + y \cdot \sin 2y.$$

Calculer $\overrightarrow{\text{grad}} f$.



Univ Batna 2

ISTU

Physique I

TD N°1

Dept GEO

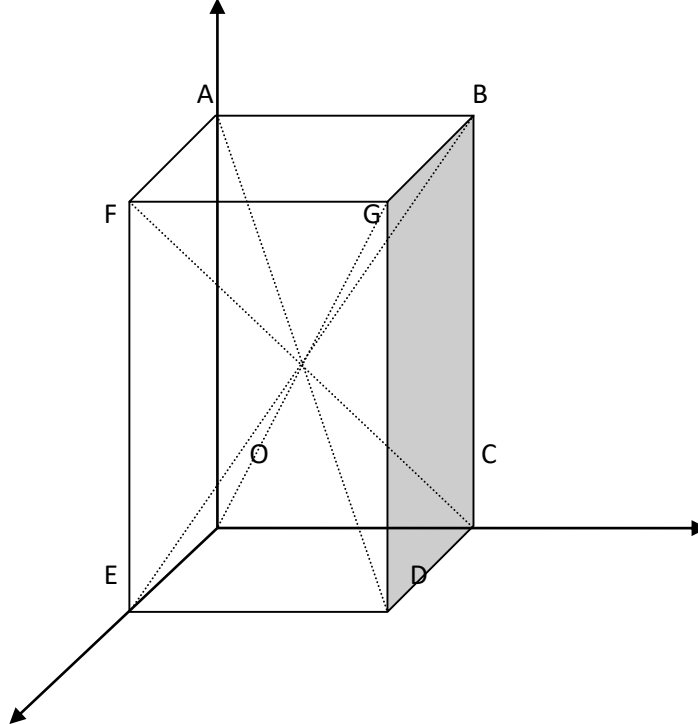
SI 2020/2021

Exercice N° 1 :

La figure (1) présente une structure cristalline quadratique de paramètres de mail a

: $\vec{A} = 2\vec{i}, \vec{B} = 3\vec{j}, \vec{C} = 4\vec{k}$. (les angles $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$).

- 1) Donner les coordonnées des points de sommets A, B, C, D, E, F et G.
- 2) Calculer les composantes des vecteurs : $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}; \vec{OD}, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AE}, \vec{OG}, \vec{EG}$, et trouver leurs modules.
- 3) Montrer que \vec{AB} est perpendiculaire au vecteur \vec{GD} ?
- 4) Trouver l'angle entre les deux vecteurs (\vec{OF}, \vec{OB}) et (\vec{OF}, \vec{OG}) .
- 5) Calculer le volume du parallélépipède.
- 6) Soit le point M centre du parallélépipède, trouvez ses coordonnées puis calculer les distances MA et MB.
- 7) Trouver l'angle entre les deux vecteurs (\vec{MA}, \vec{MG}) et (\vec{MG}, \vec{MD}) .



Exercice N° 2:

Soit les vecteurs A et b tel que $|A|=3, |B|=2$ et $\alpha=\pi/4$, α est l'angle entre \vec{A} et \vec{B}

- 1) Calculer les modules des vecteurs $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ et $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$. Trouver l'angle β entre \vec{C} et \vec{D} .

Exercice N°3: Montrer que si les vecteurs \vec{A} et \vec{B} sont perpendiculaire alors : $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$.