Chapitre III

RÉPONSES TEMPORELLES DES SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRES CONTINUS.

3.1 Introduction

L'étude de la réponse d'un système linéaire consiste à connaître son comportement dynamique avant de l'asservir. C'est-à-dire, savoir comment réagit tel système à telle excitation d'entrée ? Étant donné le modèle mathématique d'un système, l'évolution temporelle de la sortie s(t) pour une entrée donnée e(t) est obtenue directement par résolution des équations différentielles (méthode classique) ou par inversion de la transformée de Laplace de sa sortie S(p) comme le montre la figure 3.1 ci-dessous.

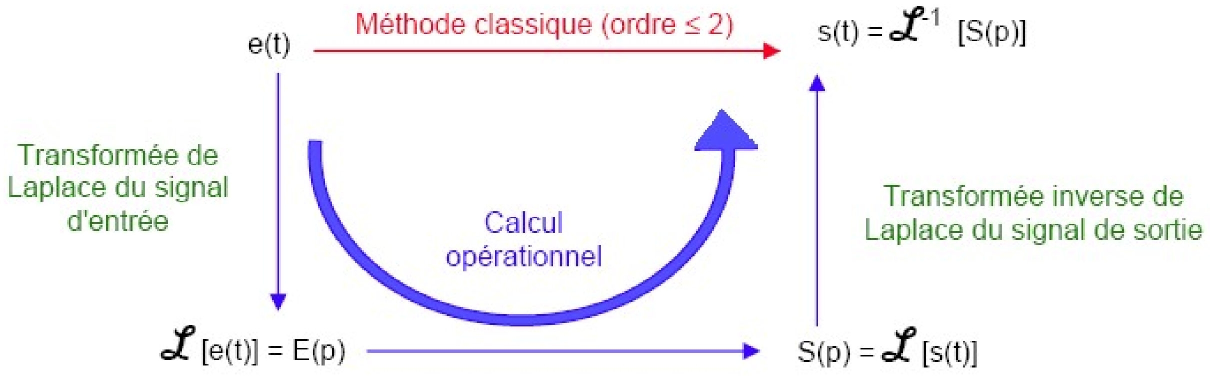


Figure 3.1 Détermination de la sortie du système par la méthode classique et par la transformée de Laplace (ou calcul opérationnel)

La réponse d'un système linéaire à une entrée quelconque peut être décomposée en somme de deux composantes:

- La réponse propre, qui est une fonction des conditions initiales, mais indépendante de l'entrée.
- La réponse forcée, qui est une fonction de l'entrée, mais indépendante des conditions initiales.

A travers l'étude et l'analyse temporelle, on cherche à déterminer :

- ✓ Le comportement du système en régime transitoire.
- ✓ Le comportement du système en régime permanent.
- ✓ Si le système est stable, instable ou juste oscillant.

Ce chapitre est consacré notamment à l'étude du comportement statique et dynamique des systèmes de premier et second ordre. Les caractéristiques de ces systèmes ainsi que leurs réponses seront étudiées en détail. On verra aussi comment approximer des systèmes d'ordre supérieur en systèmes de deuxième ordre.

3.2 Réponses temporelle des systèmes linéaires

Comme les signaux d'entrées sont illimités dans leur forme, on se limite à un certain nombre d'entrées typiques (impulsion, échelon, rampe ou parabole) qu'on appelle fonctions d'essais ou fonctions tests et dont on cherche la réponse. On peut utiliser aussi d'autres fonctions plus complexes.

3.2.1 Système du premier ordre

a) Définition : On appelle un système du premier ordre tout système régit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme :

$$b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0 s(t) = a_0 e(t) \qquad (3.1)$$

Où e(t) et s(t) sont respectivement le signal d'entrée et le signal de sortie.

Si on pose $\begin{cases} k = \dfrac{a_0}{b_0} & \text{: Gain statique du système.} \\ \tau = \dfrac{b_1}{b_0} & \text{:est la constante du temps du système (positive).} \end{cases}$

Alors on peut écrire l'équation (3.1) ci-dessus sous la forme suivante :

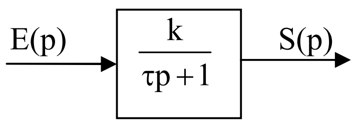
$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = ke(t) \qquad (3.2)$$

b) Fonction de transfert : En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (3.2) précédente, où les conditions initiales du système sont supposées nulles, on obtient : $\tau pS(p) + S(p) = kE(p)$ d'où la fonction de transfert du système est :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{\tau p + 1} \qquad (3.3)$$

3.2.2 Réponses temporelles du système de 1er ordre

Soit un système du premier ordre représenté par le schéma bloc suivant :



a) Réponse impulsionnelle

C'est la réponse temporelle d'un système quand l'entrée e(t) est une impulsion de Dirac. Si toutes les conditions initiales sont considérées nulles, alors la transformée de Laplace du signal de sortie est justement égale à la fonction de transfert du système.

Alors si on a $e(t)=\delta(t) \Rightarrow E(p)=L[\delta(t)]=1$ d'où $G(p)=S(p)$, cela indique que la fonction de transfert du système n'est que la transformée de sa réponse impulsionnelle h(t).

Comme $S(p) = G(p) = \dfrac{k}{\tau p + 1} \Rightarrow h(t) = s(t) = L^{-1}\left[\dfrac{k}{\tau p + 1}\right]$

D'où $$\boxed{h(t) = s(t) = \frac{k}{\tau} e^{-t/\tau}.u(t)} \qquad (3.4)$$

avec u(t) est un échelon unitaire.

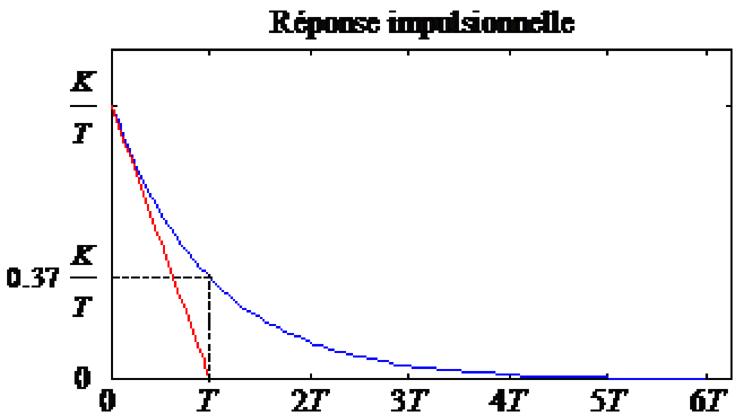


Figure 3.2 Réponse impulsionnelle d'un système de 1er ordre

Exemple :

Soit à tracer la réponse impulsionnelle d'un système dont la fonction du transfert est donnée par :

$$G(p)=\frac{1}{0.5p+1}$$

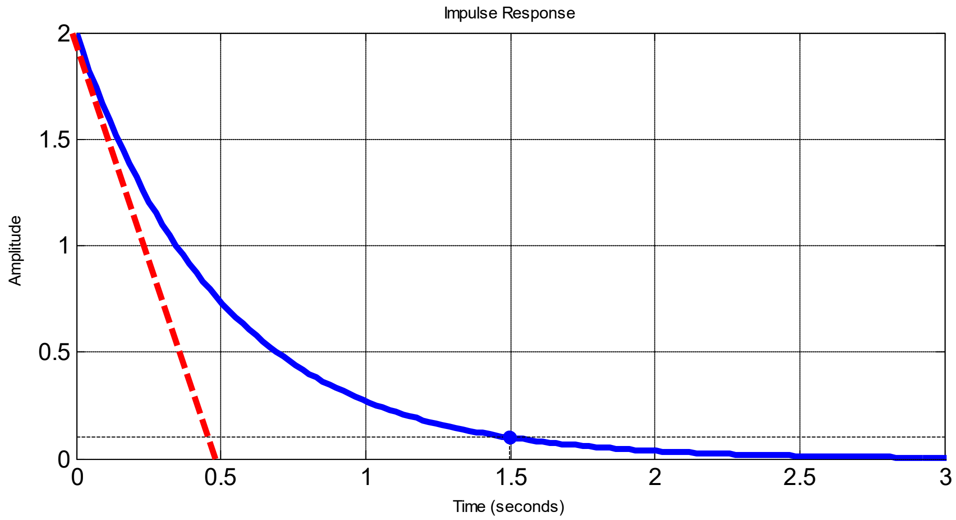


Figure 3.3 Réponse indicielle du système : $G(p)=1/(0.5p+1)$

Remarque : Pour un système linéaire caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$. *On peut en déduire la réponse à une entrée* $e(t)$ *quelconque sous la forme d'une convolution :* $s(t)=\int_0^{\infty} h(t\text{-}\tau).e(\tau)d\tau$

b) Réponse indicielle

C'est la réponse temporelle d'un système quand l'entrée est un échelon unitaire.

On a donc e(t)=u(t) $\Rightarrow S(p)=E(p).G(p)=\frac{1}{p}.\frac{k}{\tau p+1}=\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{\tau p+1}$

$$\text{Avec}\quad \begin{cases} a_1=p.S(p)\big|_{p=0}=k \\ a_2=(\tau p+1).S(p)\big|_{p=-\frac{1}{\tau}}=-k\tau \end{cases} \quad \Rightarrow S(p)=\frac{k}{p}+\frac{-k\tau}{\tau p+1}$$

$$\text{D'où}\quad \boxed{s(t)=L^{-1}\left[\frac{k}{p}\right]+L^{-1}\left[\frac{-k\tau}{\tau p+1}\right]=(k-ke^{-\frac{t}{\tau}})u(t)} \qquad (3.5)$$

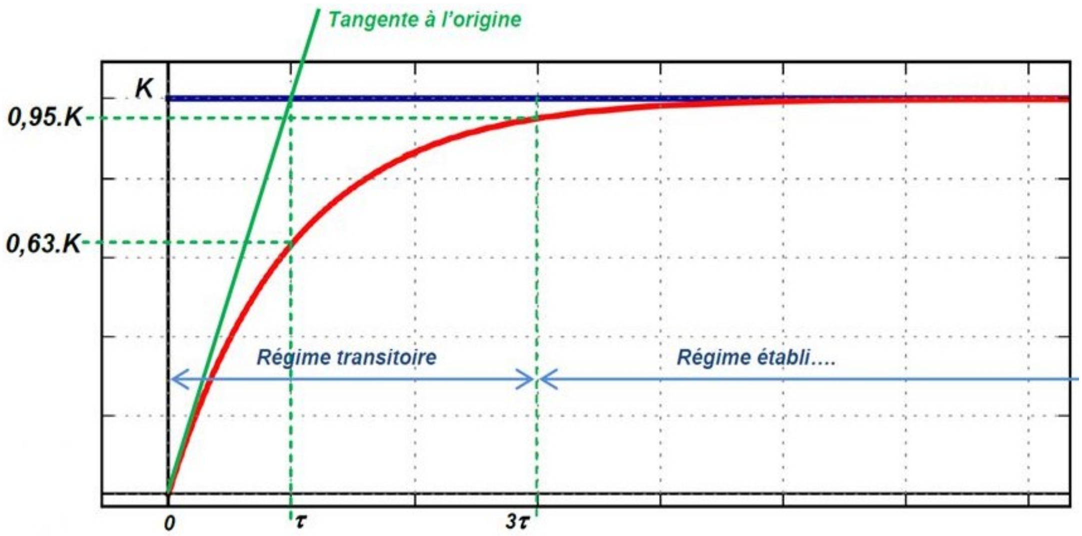


Figure 3.3 Réponse d'un système de 1^er ordre à une entrée échelon.

Exemple :

Soit à tracer la réponse indicielle d'un système dont la fonction du transfert est donnée par :

$$G(p) = \frac{1}{0.5p+1}$$

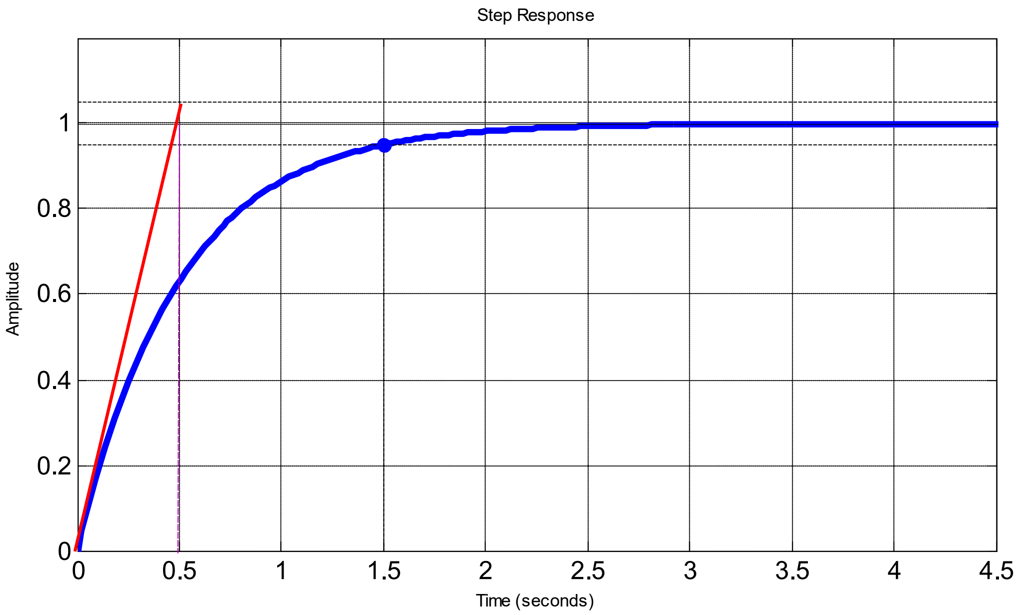


Figure 3.3 Réponse indicielle du système : $G(p) = 1/(0.5p+1)$ (où tr=1.5s et τ=0.5s)

c) Réponse à une rampe

Nous nous proposons ici d'étudier le comportement d'un système de premier ordre lorsque celui-ci est excité par une rampe (ou un échelon de vitesse) dont la transformée de Laplace est égale à $\frac{1}{p^2}$ nous obtenons alors la réponse : $S(p) = \frac{k}{p^2(\tau p+1)}$

La décomposition en éléments simples de S(p) donne : $S(p) = \frac{k}{p^2} - \frac{k\tau}{p} + \frac{k\tau^2}{\tau p+1}$

$$\Rightarrow \boxed{s(t) = L^{-1}[S(p)] = k(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad \text{pour} \quad t \geq 0} \tag{3.6}$$

Si k=1, l'erreur au régime permanent appelée erreur de trainage est déterminée comme suit : on a $\varepsilon(t) = \tau - \tau e^{-\frac{t}{\tau}}$, lorsque $t \to \infty \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$, on obtient donc $\varepsilon(\infty) = \tau$.Cela veut dire, que dans ce cas la sortie suit asymptotiquement la rampe avec un retard τ.

Le tracé du signal d'entrée (rampe) et celui de la réponse à une rampe du système en fonction de k est donné par la figure 3.4 suivante :

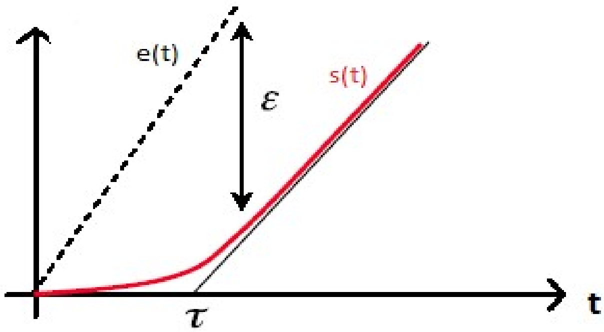
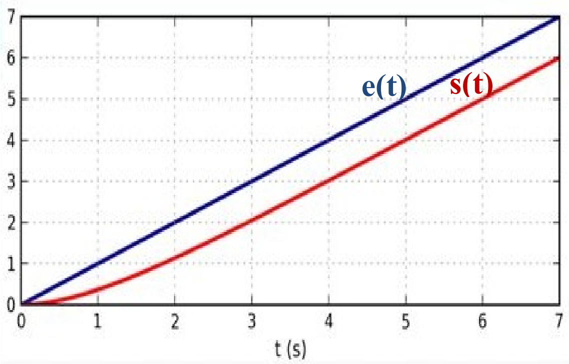
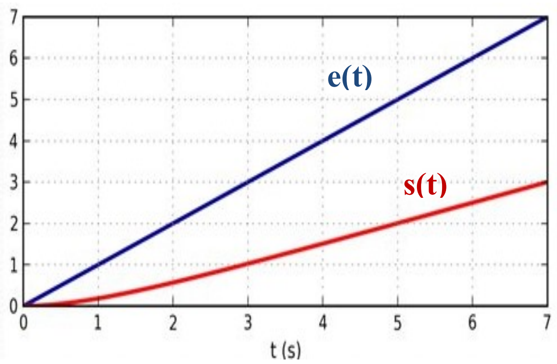


Figure 3.4 Réponse type à une rampe d'un système de 1er ordre.

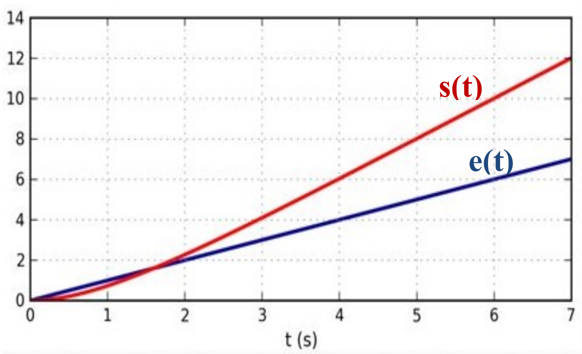
Remarque : L'écart en régime permanent $\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$ est appelé erreur de traînage



(a) Cas où k=1



(b) Cas où k<1



(c) Cas où k>1

Figure 3.4 Réponse à une rampe d'un système de 1er ordre en fonction du gain k.

3.2.2 Système du second ordre

a) Définition : Un système physique est dit de second ordre s'il est régi par une équation différentielle linéaire de deuxième ordre à coefficients constants de la forme :

$$b_2\frac{d^2s(t)}{dt^2}+b_1\frac{ds(t)}{dt}+b_0s(t)=a_0e(t) \qquad (3.7)$$

Où e(t) et s(t) sont respectivement le signal d'entrée et le signal de sortie.
b_2, b_1, b_0 et a_0 sont des constantes positives.

b) Fonction de transfert : On calcule la transformée de Laplace de l'équation (3.6) ci-dessus, où les conditions initiales du système sont supposées nulles, on obtient : $a_2p^2S(p)+a_1pS(p)+a_0pS(p)=b_0E(p)$ d'où la fonction de transfert du système est :

$$G(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{a_0}{b_2p^2+b_1p+b_0} \qquad (3.8)$$

Si on pose :

$$\begin{cases} k=\dfrac{a_0}{b_0} \text{: est le gain statique du système.} \\ \omega_n=\sqrt{\dfrac{b_0}{b_2}} \text{: pulsation propre non amortie [rad/s]} \\ z\ (\text{ou } \xi)=b_1/2\sqrt{b_0b_2} \text{ : Coefficient d'amortissement} \end{cases}$$

Alors, on peut écrire la fonction de transfert d'un système de second ordre sous la forme canonique standard suivante : $G(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{k\omega_n^2}{p^2+2\xi\omega_np+\omega_n^2}$ ou bien $\dfrac{k}{\dfrac{1}{\omega_n^2}p^2+\dfrac{2\xi}{\omega_n}p+1}$ (3.8)

3.2.2 Réponses temporelles du système de 2ème ordre

Soit un système de second ordre représenté par le schéma bloc suivant :

$$\mathbf{E(p)} \longrightarrow \boxed{\frac{k\omega_n^2}{p^2+2\xi\omega_np+\omega_n^2}} \longrightarrow \mathbf{S(p)}$$

a) Réponse impulsionnelle

On a e(t)=δ(t) ⇒ E(p)=L[δ(t)]=1 d'où G(p)=S(p), alors la fonction de transfert du système est égale à la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle h(t).

Comme $S(p)=G(p)=\dfrac{k\omega_n^2}{p^2+2\xi\omega_np+\omega_n^2} \Rightarrow h(t)=s(t)=L^{-1}\left[\dfrac{k\omega_n^2}{p^2+2\xi\omega_np+\omega_n^2}\right]$

On constate que la réponse en question dépend des racines de l'équation caractéristique $p^2+2\xi\omega_np+\omega_n^2=0$ du système (i.e. pôles de G(p)) c'est-à-dire de $\Delta'=\omega_n^2(\xi^2-1)$ et surtout de la valeur de ξ. Pour cela, on distingue 4 cas : ($\xi>1$, $\xi=1$, $0<\xi<1$, et $\xi=0$).

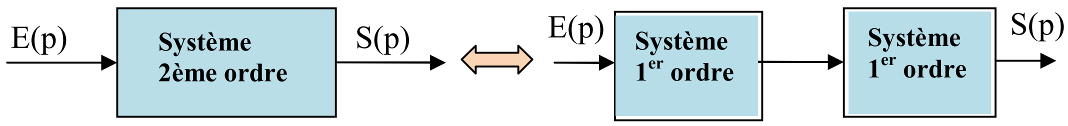
1) Cas où $\xi > 1 \Rightarrow \Delta' > 0$

G(p) admet alors, deux pôles réels distincts : $\begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\dfrac{1}{\tau_1} \\ p_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\dfrac{1}{\tau_2} \end{cases}$

La fonction de transfert peut s'écrit :

$$G(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{k\omega_n^2}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{k\omega_n^2}{(p + \frac{1}{\tau_1})(p + \frac{1}{\tau_2})} = \frac{k\omega_n^2\tau_1\tau_2}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{k}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$



$$S(p) = G(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{a_1}{p - p_1} + \frac{a_2}{p - p_2} \quad \text{où} \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{k\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \\ a_2 = -a_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{s(t) = L^{-1}\left[\frac{a_1}{p - p_1}\right] + L^{-1}\left[\frac{a_2}{p - p_2}\right] = \frac{k\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}(e^{p_2 t} - e^{p_1 t}), \quad \text{pout } t \geq 0}$$

Il s'agit donc d'une réponse apériodique **hyper-amortie**.

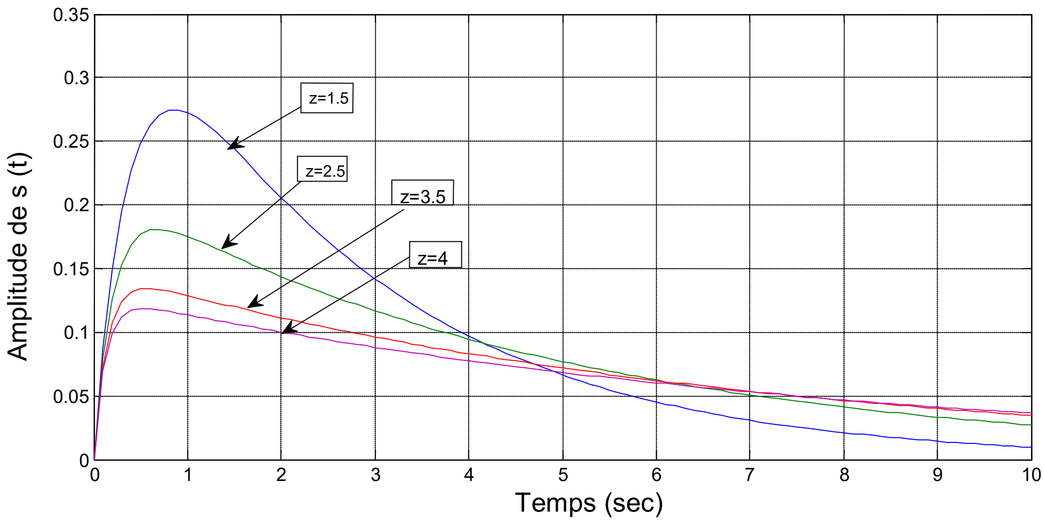


Figure 3.2 Réponse impulsionnelle du système de second ordre (ξ ou z>1)

2) Cas où $\xi = 1 \Rightarrow \Delta' = 0$

G(p) admet alors, deux pôles réels identiques : $p_1 = p_2 = -\omega_n$

$G(p) = \dfrac{k\omega_n^2}{(p+\omega_n)^2} \Rightarrow s(t) = k\omega_n^2 t.e^{-\omega_n t}$, pout $t \geq 0$, réponse à **amortissement critique**.

3) Cas où $0 < \xi < 1 \Rightarrow \Delta' < 0$, G(p) admet donc deux pôles complexes conjugués :

$$\begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \\ p_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S(p) = G(p) = \frac{k\omega_n^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{k\omega_n^2}{(p+\xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2} = \frac{k\omega_n^2}{(p+\xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

avec $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$: pseudo-pulsation ou pulsation naturelle amortie[rad/seconds]

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}\left[\frac{k\omega_n^2}{(p+\xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = \frac{k\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t, \text{ pour } t \geq 0$$

La réponse est apériodique et **pseudo-amortie**.

4) Cas où $\xi = 0 \Rightarrow$ pas d'amortissement

$$S(p) = G(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + \omega_n^2} \Rightarrow s(t) = L^{-1}\left[\frac{k\omega_n^2}{p^2 + \omega_n^2}\right] = k\omega_n \sin \omega_n t$$

L'allure de la réponse impulsionnelle obtenue sera une sinusoïde de pulsation ω_n. Il s'agit d'une réponse apériodique, **oscillatoire non amortie**.

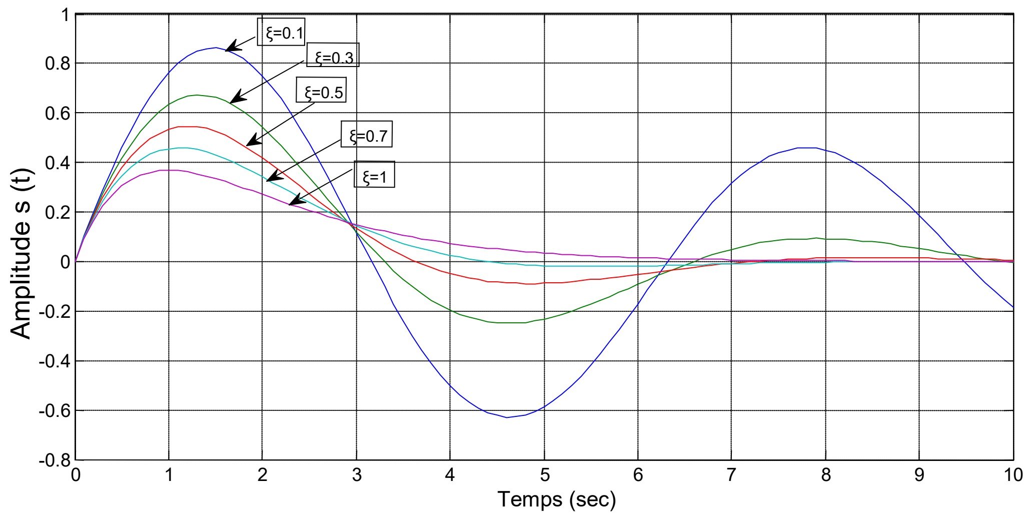


Figure 3.2 Réponse impulsionnelle du système de second ordre ($0<\xi \leq 1$)

b) Réponse indicielle

On a $e(t) = u(t) \Rightarrow E(p) = \dfrac{1}{p}$ Alors $S(p) = \dfrac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}.\dfrac{1}{p}$, d'où l'expression de la réponse s'obtient par : $s(t) = L^{-1}\left[\dfrac{k\omega_n^2}{p(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)}\right]$. Selon la valeur de ξ et d'une manière analogue au cas précédent, on distingue aussi 4 cas: ($\xi>1$, $\xi=1$, $0<\xi<1$, et $\xi=0$).

1) Cas où $\xi > 1 \Rightarrow \Delta' > 0$, le système admet donc deux pôles réels distincts :

$$p_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1} = -\frac{1}{\tau_1} \quad \text{et} \quad p_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1} = -\frac{1}{\tau_2}$$

La fonction de transfert s'écrit : $G(p) = \dfrac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{k\omega_n^2}{p(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{k\omega_n^2}{p(p+\frac{1}{\tau_1})(p+\frac{1}{\tau_2})} = \frac{k\omega_n^2\tau_1\tau_2}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

La décomposition en éléments simples :

$$S(p) = \frac{a_1}{p-p_1} + \frac{a_2}{p-p_2} + \frac{a_0}{p} \quad \text{où} \quad \begin{cases} a_1 = (p-p_1)S(p)\big|_{p=p_1} = \dfrac{p_2}{p_1-p_2} = \dfrac{p_2}{2\omega_n\sqrt{\xi^2-1}} \\ a_2 = (p-p_2)S(p)\big|_{p=p_2} = \dfrac{p_1}{p_2-p_1} = \dfrac{p_2}{-2\omega_n\sqrt{\xi^2-1}} \\ a_0 = pS(p)r\big|_{p=0} = k \end{cases}$$

Après un long calcul on aboutira au résultat suivant :

$$s(t) = L^{-1}\left[S(p)\right] = k[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2})], \quad \text{pour } t \geq 0$$, On peut écrire

$$s(t) = k[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}(\tau_2 e^{-t/\tau_2} - \tau_1 e^{-t/\tau_1})], \quad \text{pour } t \geq 0$$, réponse **hyper amortie.**

2) **Cas où** $\xi = 1 \Rightarrow \Delta' = 0$ on a : $p_1 = p_2 = p_0 = -\omega_n = -\dfrac{1}{\tau_0}$

La fonction de transfert s'écrit :

$$G(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\omega p + \omega_n^2} \Rightarrow S(p) = \frac{k\omega_n^2}{p(p-p_0)^2} = \frac{k\omega_n^2}{p(p+\omega_n)^2} = \frac{k\omega_n^2}{p(p+\frac{1}{\tau_0})^2}$$

La décomposition en éléments simples de S(p) permet d'écrire:

$$S(p) = \frac{b_2}{(p+\omega_n)^2} + \frac{b_1}{p+\omega_n} + \frac{a}{p} \quad \text{où} \quad \begin{cases} b_2 = (p+\omega_n)^2.S(p)\big|_{p=-\omega_n} = -k\omega_n \\ b_1 = \dfrac{d}{dp}\left[(p+\omega_n)^2.S(p)\right]_{p=-\omega_n} = k \\ a = pS(p)r\big|_{p=0} = k \end{cases}$$

$$\text{d'où} \ \boxed{s(t) = L^{-1}\left[S(p)\right] = k(1 - te^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t}), \quad \text{pour } t \geq 0}$$, **amortissement critique**.

3) Cas où $0 < \xi < 1 \Rightarrow \Delta' < 0$ G(p) admet alors deux pôles complexes conjugués :

$$\begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ \overline{p}_1 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases} \quad \text{Si on pose : } \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \text{ alors on écrit } \begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_d \\ \overline{p}_1 = -\xi\omega_n - j\omega_d \end{cases}$$

Où ω_d [rad/sec] est la pseudo-pulsation (ou pulsation propre amortie)

$$S(p) = \frac{k\omega_n^2}{p(p^2+2\xi\omega p+\omega_n^2)} = \frac{k\omega_n^2}{p(p-p_1)(p-\overline{p}_1)} = k\left[\frac{1}{p} - \frac{p+2\xi\omega_n}{p^2+2\xi\omega p+\omega_n^2}\right] = k\left[\frac{1}{p} - \frac{p+2\xi\omega_n}{(p+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}\right]$$

$$\Rightarrow s(t) = k\left[1-(e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t))\right] \text{ ,pour } t \geq 0$$

En utilisant les transformations trigonométriques usuelles, on peut réécrit s(t) sous la forme la plus concise suivante:

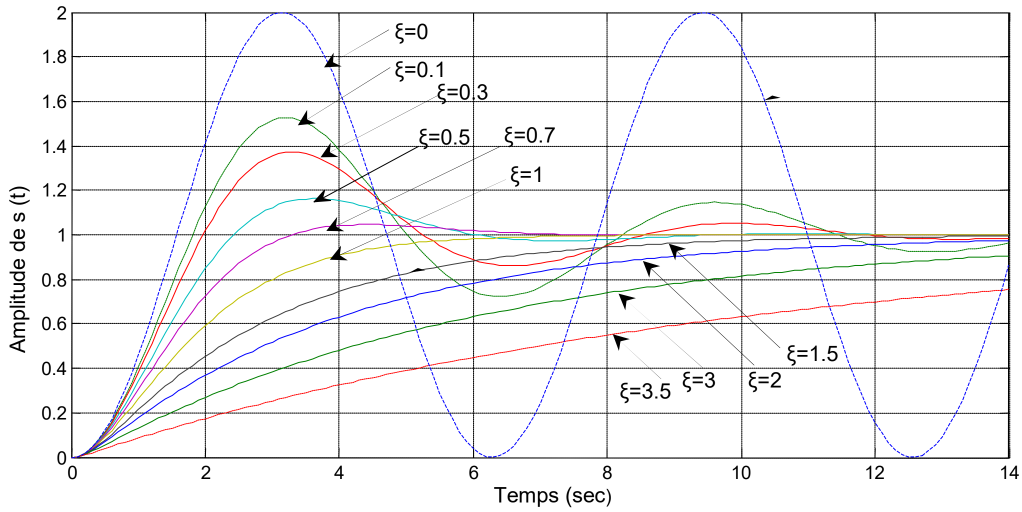
$$s(t) = k\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\varphi)\right] \text{ pour } t \geq 0, \text{ où } \varphi=\arccos(\xi)=tg^{-1}(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}) \text{ , s(t) est}$$

une réponse **oscillatoire amortie (**pseudopériodique**)** où la pulsation d'oscillation : $\omega_{os} = \omega_d$.

4) Cas où $\xi = 0$, pas d'amortissement, G(p) a deux pôles imaginaires purs : $\begin{cases} p_1 = +j\omega_n \\ \overline{p}_1 = -j\omega_n \end{cases}$

$$S(p) = \frac{k\omega_n^2}{p(p^2+\omega_n^2)} = k[\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+\omega_n^2}] \Rightarrow s(t) = L^{-1}\left[S(p)\right] = k(1-\cos(\omega_n t)), \quad \text{pour } \ t \geq 0$$

L'allure de la réponse impulsionnelle obtenue est une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega_n}$, il s'agit donc d'une réponse **oscillatoire (non amortie)** à la fréquence ω_n .



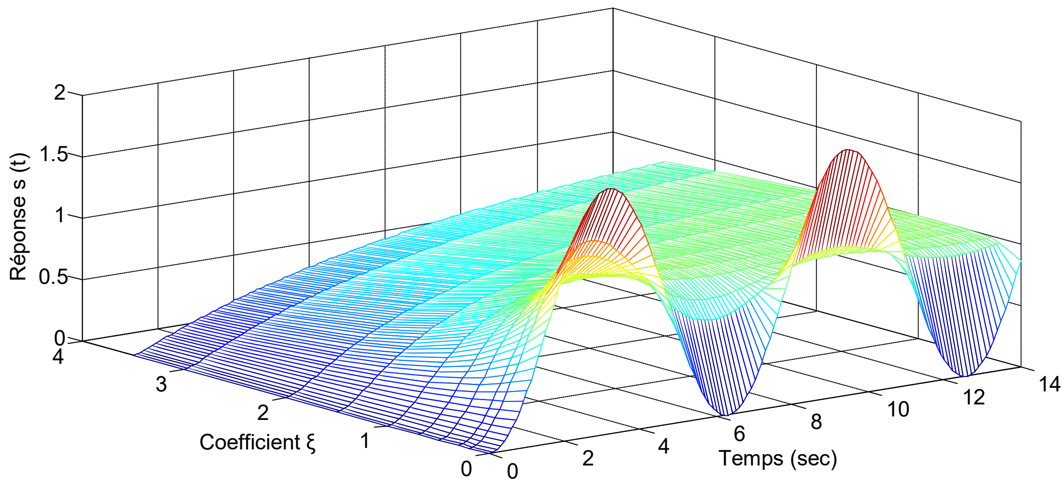


Figure 3.2 Réponse indicielle du système de second ordre en fonction de ξ (avec k=1)

Remarque :

- D'après la figure 3.2 ci-dessus, on constate que plus le coefficient ξ est petit et plus les amplitudes des oscillations de s(t) sont grandes (cas où $0<\xi<1$).

- On notera que les oscillations sont visibles pour $\xi<0.7$. Pratiquement ces oscillations sont invisibles pour $0.7<\xi<1$, et pour $\xi>0.7$ la réponse est la somme de deux exponentielles (réponse apériodique, ou hyper-amortie).

Caractéristiques de la réponse d'un système de second ordre

3.2.3.1 En régime transitoire

A partir de la réponse temporelle (réponse indicielle) d'un système de second ordre on constate que le régime transitoire est évalué selon deux grandeurs qui caractérisent essentiellement la qualité du système à savoir : un bon amortissement et une bonne rapidité.

a) La rapidité (ou la durée du régime transitoire)

Elle est évaluée par le temps de réponse (t_r à $\pm\delta$) et peut être aussi estimée par deux autres valeurs qui sont : le temps de montée (t_m) et le temps de pic (t_p).

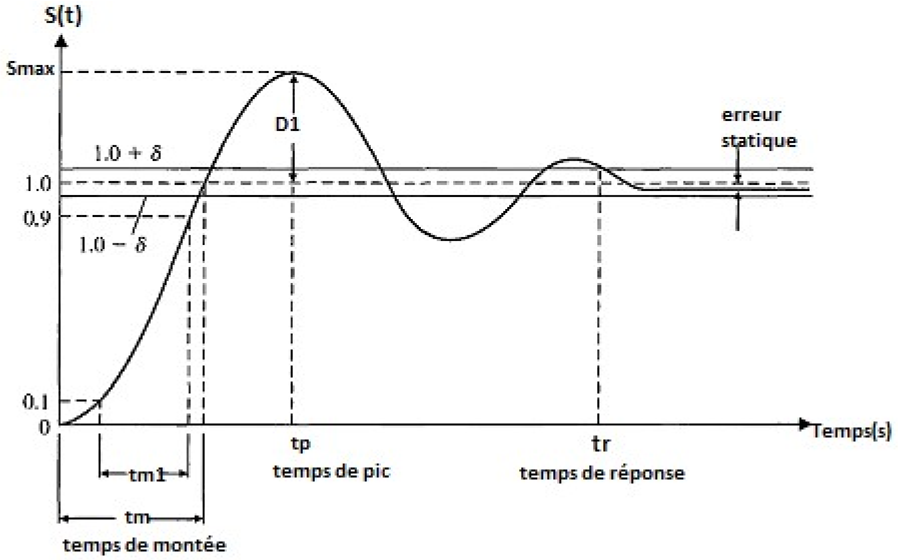


Figure 3.2. Réponse indicielle d'un système de second ordre (cas où $0<\xi<1$ et k=1)

1) Le temps de réponse (t_r)

- **Définition** : C'est le temps au bout duquel la réponse du système a atteint sa valeur définitive à $\delta=\pm5\%$ (ou $\delta=\pm2\%$) près.

- **Détermination du temps de réponse**: Pour une réponse oscillatoire amortie, l'expression de la réponse si k=1 est donnée par la relation suivante:

$$s(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) \text{ pour } t \geq 0, \text{ où } \varphi = \arccos(\xi) = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

Les courbes $1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t}$ constituent les deux enveloppes qui enferment la réponse indicielle du système (i.e. s(t) demeure toujours à l'intérieur de ces deux enveloppes).

Le temps de réponse pour lequel s(t) reste à ±δ% près de sa valeur finale est déterminé approximativement :

$$\begin{cases} \text{à} \pm 5\% \text{ on a } 1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_r} = 0.95 \Rightarrow e^{-\xi\omega_n t_r} \cong 0.05 \Rightarrow t_r \cong \frac{3}{\xi\omega_n} \\ \text{à} \pm 2\% \text{ on a } 1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_r} = 0.98 \Rightarrow e^{-\xi\omega_n t_r} \cong 0.02 \Rightarrow t_r \cong \frac{4}{\xi\omega_n} \end{cases}$$

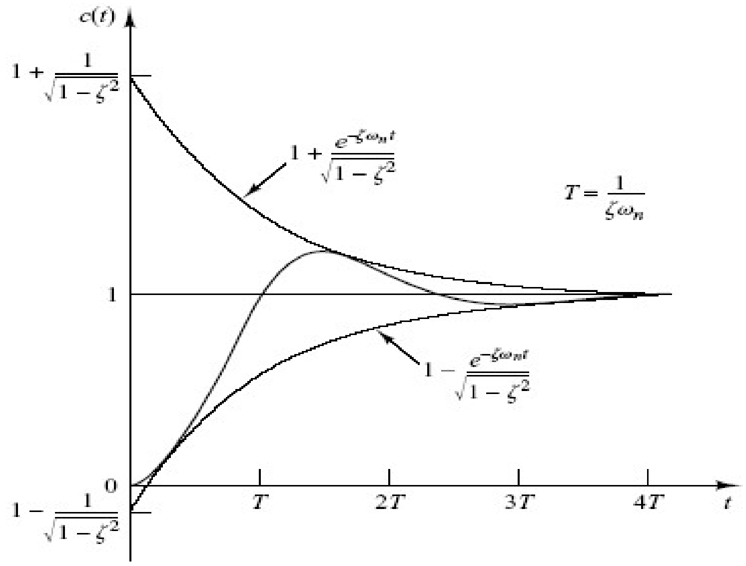


Figure 3.3 Paires des courbes qui enveloppent la réponse indicielle donnée par la figure 3.2 précédente.

2) Le temps de montée

- **Définition** : Il caractérise la durée du passage de la réponse de 10% à 90% de sa valeur définitive si la réponse est hyper amortie, et de 0% à 100% dans le cas de la réponse oscillatoire amortie.

- **Calcul du temps de montée (t_m)**

$$\text{A } t=t_m \text{ on a } s(t)\big|_{t=t_m} = 1 \Rightarrow 1-e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t)\right)\Bigg|_{t=t_m} = 1 \Rightarrow$$

$$e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t)\right) = 0 \quad \text{comme } e^{-\xi\omega_n t} \neq 0 \Rightarrow \cos(\omega_d t)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t) = 0$$

$$\text{Alors} \quad \cos(\omega_d t_m) = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t_m) \quad \text{d'où} \quad \boxed{t_m = \frac{1}{\omega_d}\,\mathrm{arctg}\frac{-\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}$$

$$\text{On peut écrire : } t_m = \frac{1}{\omega_d}\,\mathrm{arctg}\frac{-\omega_d}{\omega_n \xi} = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} \quad \text{où } \beta = \mathrm{arctg}\frac{\omega_d}{\omega_n \xi}$$

3) Le temps de pic (t_p)

- **Définition** : Caractérise la durée de passage de la réponse jusqu'au premier dépassement (maximal).

- **Calcul du temps de pic**:

On assume une réponse oscillatoire amortie, au temps de pic la réponse indicielle s(t) atteint sa valeur maximale, cela veut dire que : $\left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=t_p}=0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[1-e^{-\xi\omega_n t}(\cos\omega_d t_p+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t_p)\right]=0 \Rightarrow e^{-\xi\omega_n t_p}\sin\omega_d t_p\left[\frac{\xi^2\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}+\omega_n\sqrt{1-\xi^2})\right]=0$$

$$\Rightarrow e^{-\xi\omega_n t_p}(\sin\omega_d t_p)\frac{\xi^2\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}=0 \Rightarrow \sin\omega_d t_p=0 \Rightarrow \omega_d t_p=0,\pi,2\pi,3\pi,...$$

D'où au premier dépassement : $\omega_d t_p=\pi \Rightarrow \boxed{t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}}$

b) L'amortissement :

- **Définition** : Il peut être apprécié selon les dépassements successifs de la réponse indicielle. L'estimation se porte généralement sur le premier dépassement (maximal) qui peut être déterminée comme suit : $D_{max}\%=\frac{s_{max}(t)-s(\infty)}{s(\infty)}.100$

- **Calcul du dépassement maximal :**

$$D_{max}=\frac{s_{max}(t)-s(\infty)}{s(\infty)}=\frac{s(t_p)-1}{1}=1-e^{-\xi\omega_n t_p}(\cos\omega_d t_p+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t_p)-1 \text{ où } t_p=\frac{\pi}{\omega_d}$$

Alors $D_{max}=-e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}(\cos\pi+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\pi)=e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ d'où $\boxed{D_{max}\%=e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}.100}$

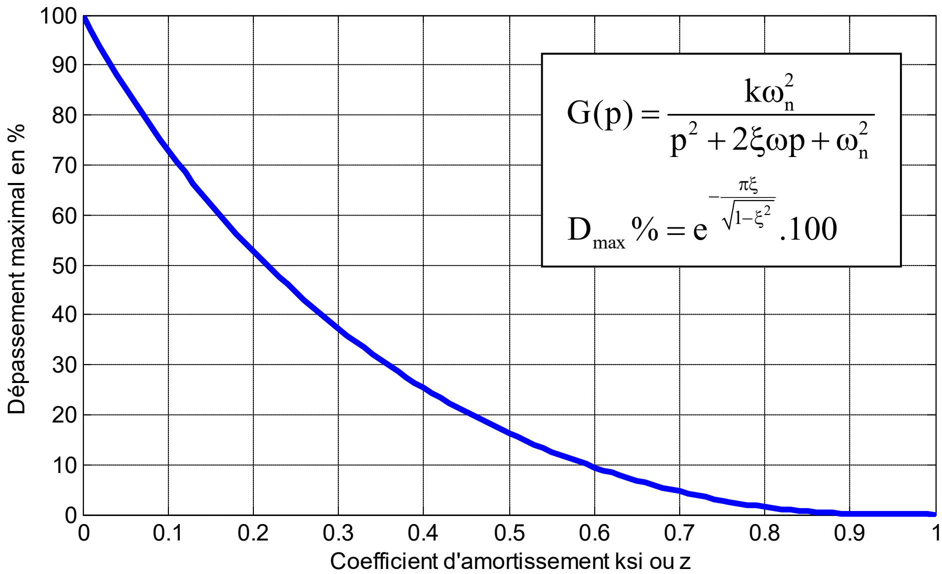


Figure 3.3 Le dépassement maximal (en %) en fonction du coefficient d'amortissement ξ.

A l'exception de certaines applications où les oscillations ne peuvent être tolérées, il est désirable que le régime transitoire doive être suffisamment rapide et suffisamment amorti. Dans le cas d'un système du second ordre où la fonction de transfert est donnée par l'équation (3.8), pour avoir un régime transitoire acceptable, il faut que le coefficient d'amortissement ξ soit compris entre 0.4 et 0.7 (i.e. le dépassement maximal varie entre 25% et 4%). En effet, les valeurs de $\xi<0.4$, provoquent un dépassement excessif dans le régime transitoire, et pour les valeurs de $\xi>0.7$, le système devient très lent (i.e. réponse très lente).

Exemple : Étant donnée sur la figure (3.) ci-dessous, la réponse indicielle d'un système du second ordre dont la fonction du transfert est donnée par : $G(p)=\dfrac{9}{p^2+2*0.25*3*p+9}$

Calculer :

- Le temps de réponse à $\pm5\%$ et le temps de montée;
- Le temps de pic ainsi que le dépassement maximal en %.

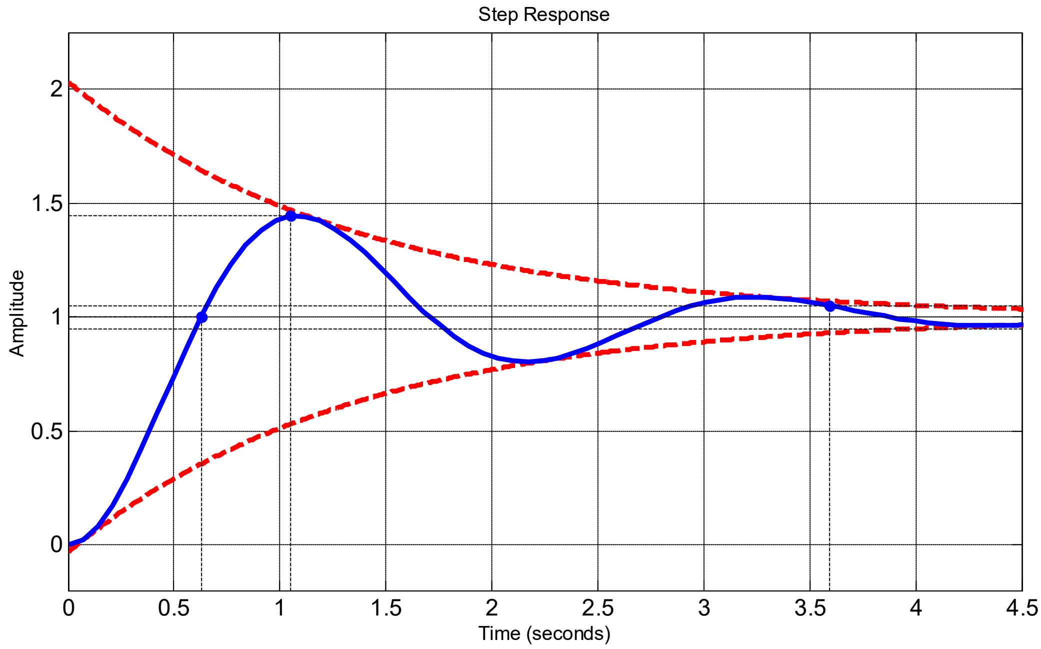


Figure 3.1 Réponse indicielle du système de l'exemple ci-dessus
($k=1$, $\xi=0.25$, $\omega_n=3$rad/s)

- **Calcul du temps de réponse à ±5% près :** $t_r \cong \dfrac{3}{\xi\omega_n}=\dfrac{3}{0.25*3}=4\,\text{sec}$

- **Calcul du temps de montée :** On a : $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=3*\sqrt{1-0.25^2}=2.9047\text{rad/sec}$

  et $\beta=\text{arctg}\dfrac{\omega_d}{\omega_n\xi}=1.3181\text{rad}\Rightarrow t_m=\dfrac{1}{\omega_d}\text{arctg}\dfrac{-\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}=\dfrac{\pi-\beta}{\omega_d}=0.6278$ sec

- **Calcul du temps de pic :** $\omega_d t_p=\pi\Rightarrow t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{\pi}{3\sqrt{1-0.25^2}}=1.0816\,\text{sec}$

- **Calcul du dépassement maximal :** $D_{max}\%=e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}.100=44.4344\ \%$

D'après la figure (3.) ci-dessous, on remarquer que plus la pulsation ω_n augmente plus la réponse devient plus rapide. Alors que, le dépassement est indépendant de ω_n .

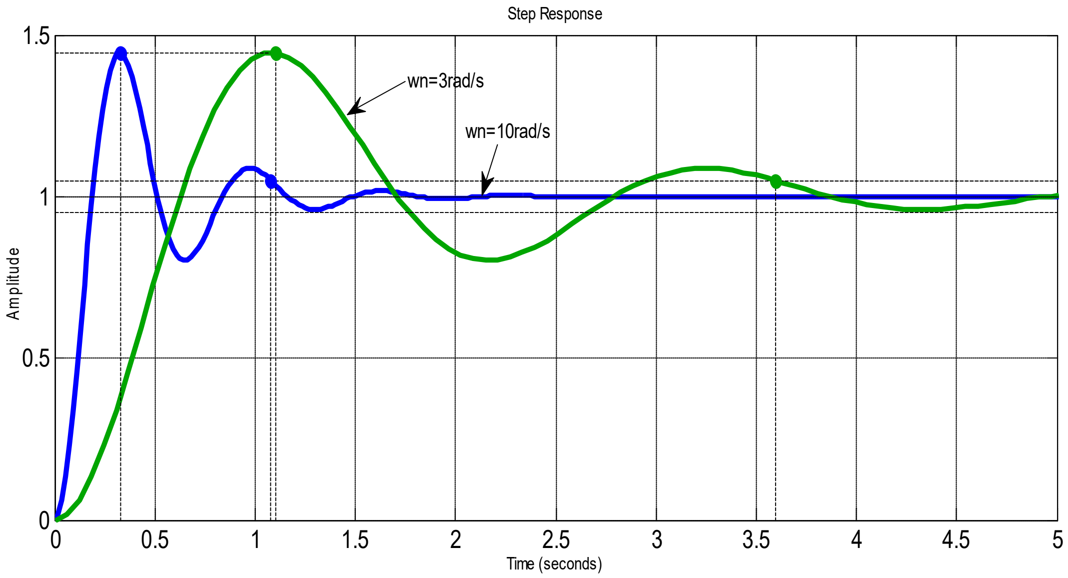


Figure 3.3 Réponse indicielle du système de l'exemple ci-dessus avec variation de la pulsation ω_n.

Les performances des systèmes de commande se jugent par la qualité de leur régime transitoire et de leur régime définitif (permanent). Le tableau 3.1 ci-dessus résume les conditions généralement imposées, qui apparaissent comme des critères de performances.

Tableau 3.1 Récapitulatif des performances imposées

Type d'entrée	**Conditions généralement imposées à la réponse**	
	Régime transitoire	**Régime permanent**
Échelon	Amorti : dépassement faible Rapide : Temps de réponse faible (fréquence propre élevée)	Erreur de position nulle
Échelon de vitesse		Erreur de trainage faible
Impulsion		

N.B/ Dans le cas d'un système à retour (i.e. en boucle fermée), il y'aura lieu d'adjoindre à ces critères de performances une condition supplémentaire, relative à la **stabilité**. La stabilité et la précision vont être traitées en détail dans le dernier chapitre de ce polycopié.

3.2.3. Systèmes d'ordre supérieur

Nous avons vu précédemment que la forme de la réponse d'un système dépend de l'ordre du système, et plus particulièrement de la valeur et donc de la position de ses pôles dans le plan complexe (i.e. de la valeur de ω_n et ξ).

Un système d'ordre élevé comprend un grand nombre de paramètres et étudier ses réponses peut se révéler fastidieux si on l'effectue de la même façon que précédemment. L'étude d'un tel système, tout en considérant un nombre restreint de paramètres, (système relativement simple) permettra de déterminer son comportement en fonction de ses réponses temporelles.

Dans cette section on présentera l'analyse de la réponse transitoire d'un système d'ordre supérieur d'une manière générale. Il est à noter que la réponse d'un tel système est égale à la somme des réponses des systèmes de premier et second ordre.

<u>Exemple</u> : Considérons le système d'ordre 3 dont la fonction du transfert est donnée par : $G(p) = \dfrac{1}{(p+1)(\frac{p}{6}+1)(\frac{p}{22}+1)}$. Ce système possède 3 pôles réels :-1, -6 et -22.

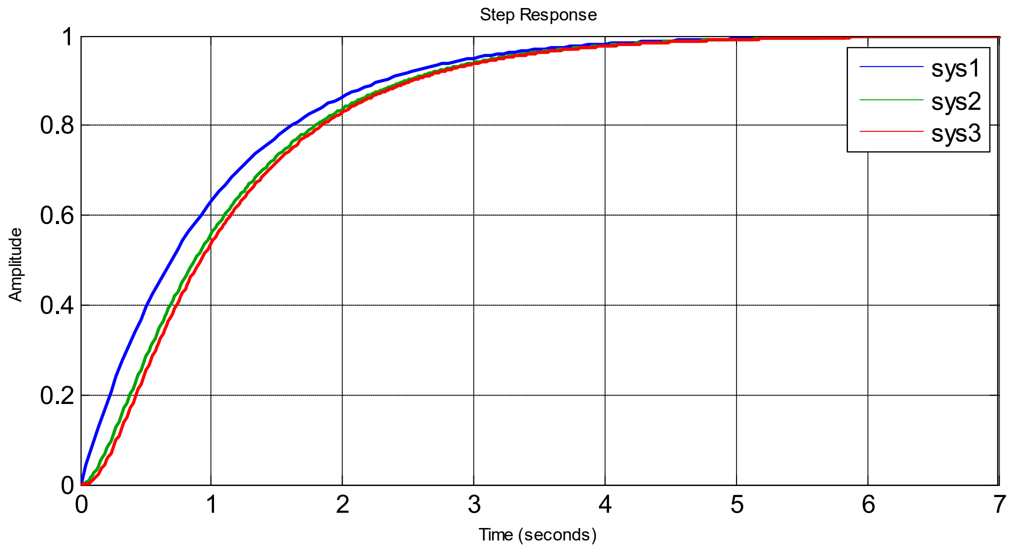


Figure 3.* Réponses indicielles et pôles dominants

Sur la figure ci-dessus on a tracé les réponses indicielles respectivement, des systèmes d'ordre 1 (sys1: $\dfrac{1}{p+1}$), d'ordre 2 (sys2 : $\dfrac{1}{(p+1)(\frac{p}{6}+1)}$) et d'ordre 3 (sys3 : G(p)).

Les pôles les plus proches de l'origine du plan complexe appelés **pôles dominants** conservent plus longtemps leur influence sur l'allure de la réponse temporelle. Dans ce cas : -1 est le pôle lent et -6 et -22 sont les pôles rapides. En revanche, les pôles les plus éloignés n'influent que sur la forme du début du régime transitoire comme le montre la figure (3.*). On remarque qu'il n'y a pas de différence en régime permanent. Ainsi, la forme de la réponse dépend essentiellement des pôles dominants comme le montre la figure (3.*).

Le résultat mis en évidence par cet exemple nous a permet de conclure ce qui suit :

- ✓ Un système d'ordre élevé possède, la plupart du temps, un ou deux pôles dominants et se comporte comme un système de 1^{er} ou du $2^{ème}$ ordre.
- ✓ On peut réduire la fonction du transfert d'un système d'ordre supérieur à un système de 1^{er} ou du $2^{ème}$ ordre si nous conservons que le (ou les) pole(s) dominant(s).
- ✓ En pratique, un pôle peut être négligé dès qu'il est 3 à 4 fois supérieur au précédent.

3.4. Influence des pôles et zéros sur la réponse d'un système

Un système d'ordre élevé peut comporter un grand nombre de pôles et de zéros (réels ou complexes conjugués) et tous ces derniers n'ont pas la même influence sur la réponse temporelle du système. Selon la figure (3.) ci-dessous on constate que les pôles les plus proches de l'origine (pôles dominants) ont une influence prépondérante sur la réponse du système.

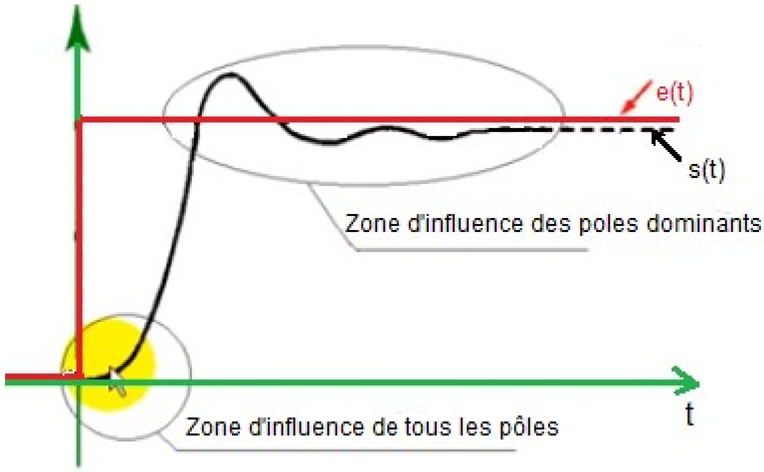
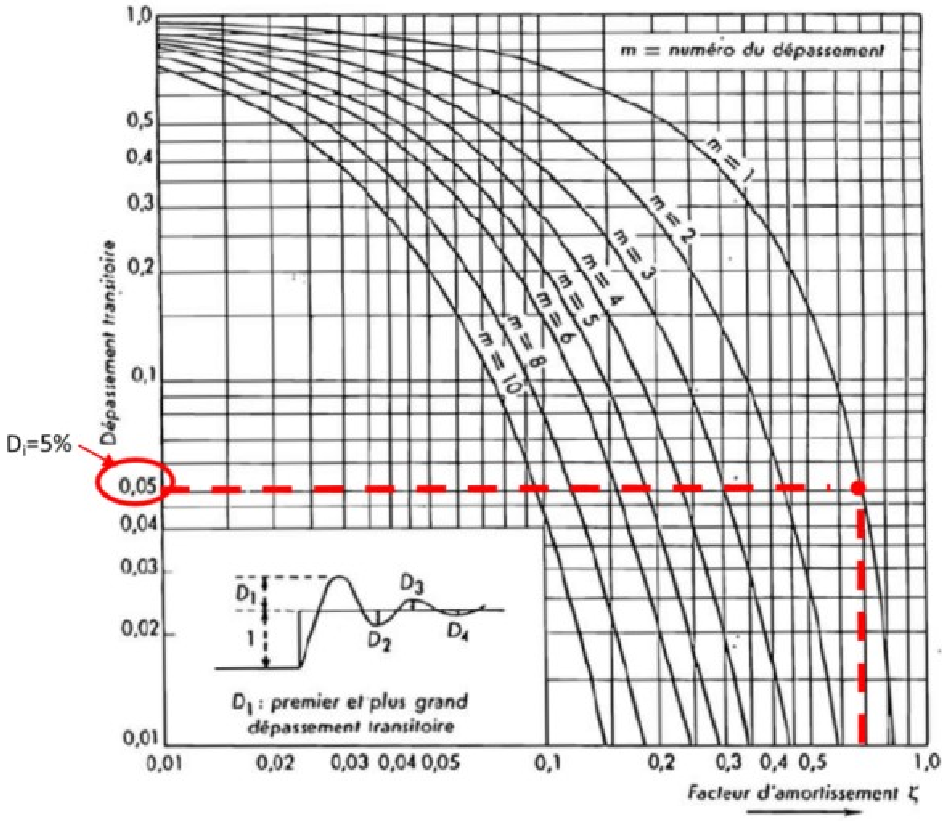


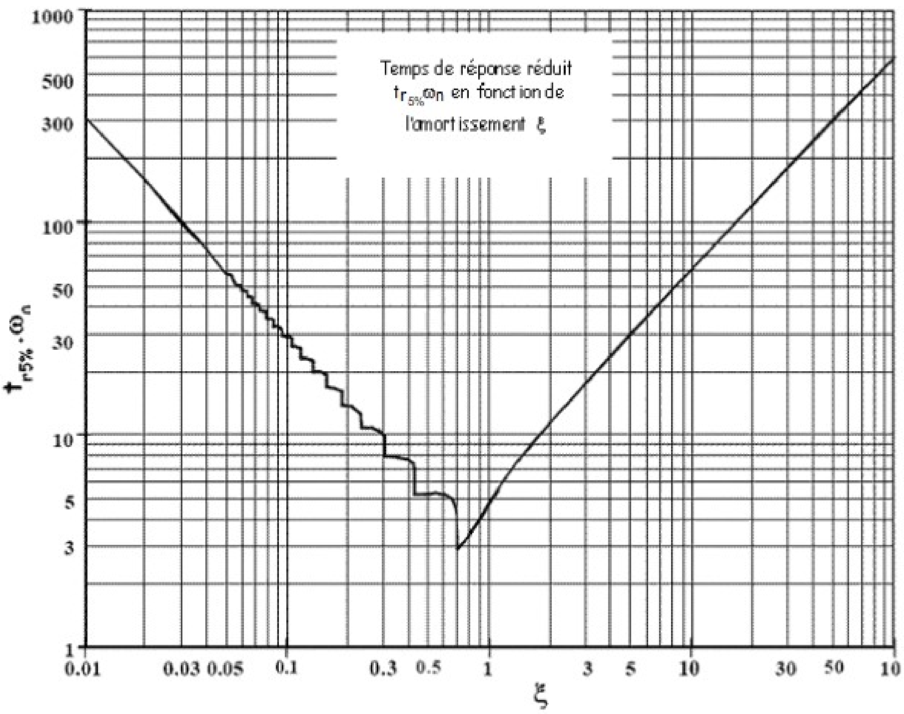
Figure 3.1 Influences des pôles sur la réponse d'un système

1. Évolution des dépassements en fonction de l'amortissement



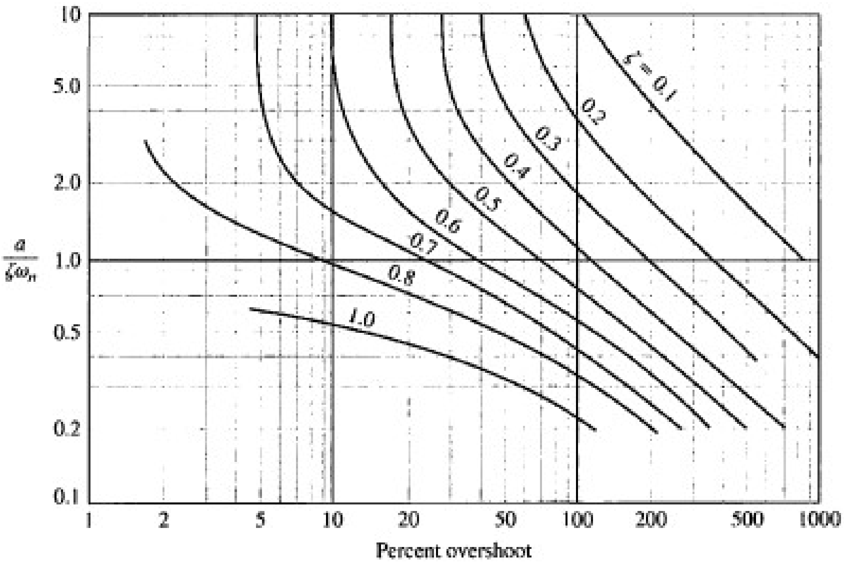
2. Temps de réponse d'un système de second ordre

Il n'existe pas de formule simple pour calculer le temps de réponse à 5% car il dépend de la valeur du coefficient d'amortissement ξ et de la pulsation propre non amortie $\boldsymbol{\omega_n}$ du système. On utilise alors un abaque donnant la valeur du temps de réponse réduit $\mathbf{tr_{5\%}.\omega_n}$ en fonction du coefficient d'amortissement ξ.

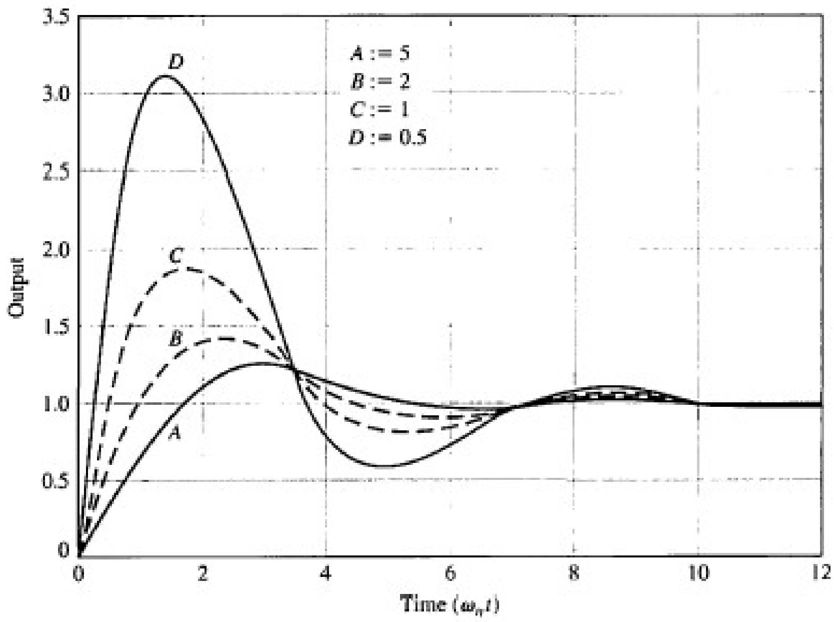


Abaque temps de réponse réduit pour second ordre

Remarque : *Il est important de noter que les expressions permettant de calculer les temps : de pic, de réponse et de montée ainsi que le dépassement maximal, sont valables uniquement pour le cas d'un système du second ordre défini par la fonction de transfert standard donnée par l'équation (3.8). Si le système possède un ou deux zéros, la forme de la réponse indicielle va être assez différente de celle obtenue précédemment (figure 3.).*



(a)



(b) Réponse indicielle

Figure 3.3 Système du second ordre où la fonction du transfert admet deux pôles et un zéro. **(a)** Le pourcentage du dépassement en fonction de **(b)** La réponse indicielle obtenue pour quatre valeurs distinctes du rapport a/ksi*wn : 5, 2, 1 et 0.5 avec ksi=0.45.

G(p)=(p+a)/p^2+2*z*wn*p+wn^2