

Objectifs : Maîtriser l'analyse des signaux et systèmes (continu, discret, ...) et la numérisation du signal

Contenu de la matière : Les Chapitres

1- Généralités sur les signaux (3S)	3- Transformée de Laplace : (3S)	5- Corrélation des signaux : (3S)
2- Analyse de Fourier (4S)	4- Produit de Convolution : (2S)	

Références : **1 :** Martin, Jean-Noël Débuter en traitement numérique du signal, **2 :** Jacques Lacoume, Méthodes et techniques de traitement du signal et **3 :** Tanguy, Jean-Pierre, Théorie et pratique du signal

Chapitre 1 – Généralités sur les signaux (3S)

1.1 Introduction, notions de base et signaux

Dans la vie quotidienne, tous les appareils électroniques échangent de l'information sous forme analogique ou numérique. Cette information est émise d'un émetteur et reçue par un récepteur afin d'être traitée et utilisée.

Le signal : C'est une entité (électrique, ondes acoustique ou lumineuse, suite de nombres...) qui véhicule une information (musique, parole, image, température...) via un canal. **Le signal est utile** s'il contient l'information. Il est considéré comme **bruit** s'il est perturbateur qui gêne la perception ou l'interprétation d'un signal utile.

Le canal de transmission : C'est le support du signal. Il constitue une liaison entre un émetteur d'informations et un récepteur. Il occasionne des dégradations telles que : le retard, la distorsion, l'adjonction de bruit

La théorie du signal : Elle s'intéresse à l'étude mathématique des caractéristiques des signaux.

Le traitement du signal : C'est la manipulation de l'information afin d'extraire le maximum d'informations utiles d'un signal perturbé par le bruit, suivie d'une analyse afin d'extraire un caractère particulier du signal.

Les Filtres (filtrage) : Un filtre est un système permettant de conserver une ou plusieurs fréquences (ou bandes) et annuler les autres bandes. Il existe cinq filtres : Passe-bas, Passe-haut, Passe-bande, Coupe-bande.

1.2 Classifications des signaux

1.2.1 Classification temporelle ou phénoménologique (selon leur type d'évolution)

1.2.1.1 Les signaux déterministes : Ce sont des signaux dont l'évolution temporelle est parfaitement définie et peut être prédite par un modèle mathématique approprié.

Les signaux périodiques : Un signal $s(t)$ est périodique de période T si : $s(t) = s(t + T) \forall t \in \mathbb{R}$.

Périodique composite : Il résulte d'une somme de signaux périodiques dont le rapport des périodes est rationnel (répétition à l'infini d'un motif).

Quasi-périodique : C'est la somme de signaux périodiques dont le rapport des périodes n'est pas rationnel.

Pseudopériodique : Il résulte d'un signal périodique dont l'amplitude varie au cours du temps.

Le signal non périodique : Il ne satisfait pas à la relation précédente.

1.2.1.2 Les signaux aléatoires : C'est un signal dont la valeur à un instant t ne peut pas être prédite.

Stationnaires : Ce sont des signaux dont les caractéristiques statistiques ne changent pas au cours du temps.

Non-stationnaires : Signaux dont les caractéristiques statistiques évoluent au cours du temps.

1.2.2 Classifications morphologiques

Un signal est la représentation de l'amplitude en fonction du temps. La classification morphologique se fait selon la nature du temps (*discret ou continu*) et l'amplitude (*discrète ou continue*).

Variable discrète : C'est une variable dont les valeurs sont séparées (ex : $x \in \{1,2,3, \dots\}$)


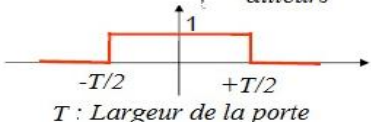
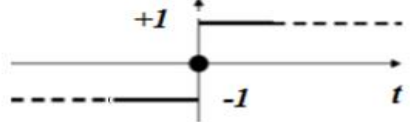
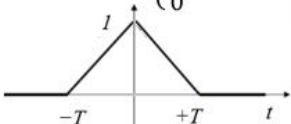
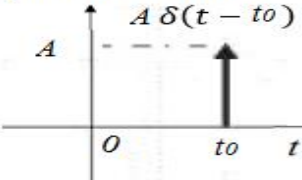
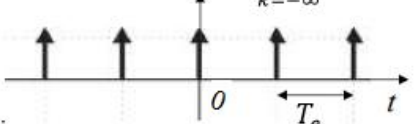
Variable continue : C'est une variable dont les valeurs appartiennent à un intervalle (ex : $x \in [1, 2]$)

Temps	Amplitude	
	Continue	Discrète
Continu	Signal analogique	Signal quantifié
Discret	Signal discret	Signal numérique

1.2.3 Classification fréquentielle ou spectrale

Nom d'onde	Plage de fréquence	Domaines et exemples
Très basses fréquences (TBF)	entre 3 KHz et 30 KHz	Ondes des sons audibles
Basses fréquences (BF)	entre 30 KHz et 300 KHz	Ondes radio
Moyennes fréquences (MF)	entre 300 KHz et 3 MHz	Ondes radio AM
Hautes fréquences (HF)	entre 3 MHz et 30 MHz	Ondes radio amateur
Très hautes fréquences (VHF)	entre 30 MHz et 300 MHz	Ondes radio FM et télévision
Ultra hautes fréquences (UHF)	entre 300 MHz et 3 GHz	Télévision, radio mobile, téléphones cellulaires
Super hautes fréquences (SHF)	entre 3 GHz et 30 GHz	Ondes satellites et radars
Extra hautes fréquences (EHF)	entre 30 GHz et 300 GHz	Armée, astronomie, presse, ambassade
Infra-rouge (IR)	entre 300 GHz et 400 Th	Ondes lasers, photographie
Lumière visible	entre 400 THz et 750 THz	Rayonnement dont nos yeux sont sensibles
Ultra-violet (UV)	entre 750 THz et 30 PHz)	Cause le bronzage et les coups de soleil
Rayons X	entre 30 PHz et 30 EHz	Radiographie, photographie
Rayons Gamma	entre 30 EHz 30 ZHz	Emises par des noyaux radioactifs
Rayon cosmiques	>30 ZHz	

1.2.4 Signaux particuliers

<p><i>Echelon</i></p> $x(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$ 	<p><i>Signal porte ou rectangle</i></p> $x(t) = \text{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t < T/2 \\ \text{ailleurs} & \end{cases}$  <p><i>T : Largeur de la porte</i></p>	<p><i>Signal Signe</i></p> $x(t) = \text{Sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$ 
<p><i>Signal triangulaire</i></p> $x(t) = \text{tri}_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{T} & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ 	<p><i>Impulsion de Dirac</i></p> $A \delta(t - t_0)$ 	<p><i>Peigne de Dirac</i></p> $x(t) = \delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$ 

1.3 Classification énergétique

Elle nous informe sur l'énergie et la puissance, si elles sont finies ou infinies.

Energie et puissance instantanée	Energie et puissance moyenne sur (t ₀ , t ₁)	Energie et puissance sur R
$Wi_x = x(t) \cdot x^*(t) = x(t) ^2$ $Pi_x = \frac{dWi_x}{dt} = \frac{d x(t) ^2}{dt}$	$Wm_x = \int_{t_0}^{t_1} x(t) ^2 dt$ $Pm_x = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} x(t) ^2 dt$	$W_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) ^2 dt$ $P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) ^2 dt$

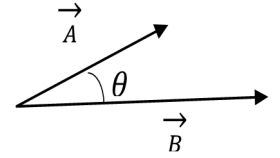
Remarque : L'unité de la puissance ne s'exprime pas en [W], mais en [V²] ou [A²] selon le signal.

2 Analyse de Fourier (4S)

2.1 L'espace des vecteurs et des signaux, la base d'un espace et produit scalaire (rappel)

Soit $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ et $\vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ deux vecteurs qui appartiennent à un espace vectorielle de dimension n . Leur produit scalaire est donné par

$$\langle \vec{A} \cdot \vec{B} \rangle = \vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos(\theta) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \Rightarrow \langle \vec{A} \cdot \vec{A} \rangle = \|\vec{A}\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$$



Si $\langle \vec{A} \cdot \vec{B} \rangle = 0 \Rightarrow$ l'un au moins est nul ou les vecteurs sont indépendants et (orthogonaux ($\vec{A} \perp \vec{B}$))

La distance entre \vec{A} et \vec{B} est $d(\vec{A} - \vec{B}) = \|\vec{A} - \vec{B}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$
 $(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_n)$ Constituent une base orthogonale s'ils sont indépendants et orthogonaux deux à deux :

$$\beta_1 \vec{i}_1 + \beta_2 \vec{i}_2 + \dots + \beta_n \vec{i}_n = \vec{0} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0 \text{ et } \langle \vec{i}_j \cdot \vec{i}_k \rangle \geq 0 \quad \forall j \neq k$$

$$\text{avec } \forall \vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T = a_1 \vec{i}_1 + a_2 \vec{i}_2 + \dots + a_n \vec{i}_n \text{ avec } a_j = \frac{\langle \vec{A} \cdot \vec{i}_j \rangle}{\|\vec{i}_j\|^2}$$

Dans l'espace des signaux, le produit scalaire de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sur un intervalle C est défini par :

$$\langle x(t) \cdot y(t) \rangle_C = \int_C x(t) \cdot y^*(t) dt \text{ Avec } y^*(t) \text{ conjugué de } y(t) - \text{Si } x(t) \perp y(t) \Rightarrow \langle x(t) \cdot y(t) \rangle_C = 0$$

2.2 Analyse harmonique

L'analyse temporelle trace d'habitude l'évolution (l'amplitude) d'un signal en fonction du temps. L'analyse harmonique (*fréquentielle ou spectrale*) trace l'amplitude et la phase du même signal en fonction de la fréquence.

2.3 Série de Fourier (développement en série de Fourier)

Le fondement de la série de Fourier est basé sur le principe qu'un signal périodique $x(t)$ de fréquence et de période $T_0 = 1/f_0$ et de puissance finie peut être décomposé en une somme d'ondes sinusoïdales.

<p>La forme somme des harmoniques</p> $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t)$ <p>La forme de cosinus $x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k)$</p> <p>La forme complexe $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{+j2\pi k f_0 t}$</p>	
---	--

Les coefficients de Fourier

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt \text{ valeur moyenne (constante)}$ $a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad k \geq 0$ $b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \quad k \geq 1$	$A_0 = \frac{a_0}{2}$ $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ $\alpha_k = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$	<p>$X(k) = X_r(k) + jX_i(k)$: est complexe, $X_r(k)$ partie réelle, $X_i(k)$ partie imaginaire et $X(k)$ calculé pour $-\infty \leq k \leq +\infty$ par</p> $X(k) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$
---	--	---

La représentation spectrale : On associe à un signal périodique $x(t)$ le **spectre unilatéral** (fréquences positives ou nulles). Il représente l'amplitude A_k et la phase α_k chacune en fonction des fréquences $f = k \cdot f_0$

Spectre bilatéral : Il représente le module $|X(k)|$ et la phase $\arg(X(k))$ en fonction des fréquences $f = k \cdot f_0$

La puissance et la valeur efficace d'un signal périodique calculée dans le domaine temporel ou fréquentiel est donnée selon le **Théorème de Parseval** par l'égalité suivante :

$$P = x_{eff}^2 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) dt = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2} A_k^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X(k)|^2 = P_{dc} + P_{ac} = X_{dc}^2 + X_{ac}^2$$

2.4 Transformée de Fourier

La série de Fourier est utilisée pour des signaux périodiques, tandis que la transformée de Fourier est exploitée pour des signaux non périodique à énergie finie. Les équations de la transformée de Fourier sont données par :

$$X(f) = TF\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = TFI\{X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi ft} df$$

La densité spectrale $X(f)$ est complexe tel que \Rightarrow $\begin{cases} \text{Densité spectrale du module} & |X(f)| = \sqrt{X_r^2(f) + X_i^2(f)} \\ \text{Densité spectrale de la phase} & \arg\{X(f)\} = \alpha(f) = \arctan\left(\frac{X_i(f)}{X_r(f)}\right) \end{cases}$

2.4.1 Propriétés de la transformée de Fourier

Linéarité	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
Décalage	$x(t + t_d)$	$X(f)e^{+j2\pi ft_d}$
Modulation	$x(t)e^{+j2\pi f_0 t}$	$X(f - f_0)$
Dérivation	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
Intégration	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$ avec $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$
Convolution	$h(t) * x(t)$ $h(t) \cdot x(t)$	$H(f) \cdot X(f)$ $H(f) * X(f)$
Énergie	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) ^2 df$
Symétrie	$X(t)$ $X(-t)$	$x(-f)$ $x(f)$
Conjugué	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Contraction du domaine	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
Impulsion de Dirac	$TF\{\delta(t)\} = 1$	$x(t)$ réel $\in \mathfrak{R} \Rightarrow (X_r(f)$ et $ X(f) $ paires) & $(X_i(f)$ et $\arg\{X(f)\}$ impaires)
Sinusoïdes	$TF\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]}{2j}$	$TF\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]}{2}$
Peigne de Dirac	$TF\left\{\sum \delta(t + kT_e)\right\} = f_e \sum \delta(f + kf_e)$ avec $f_e = \frac{1}{T_e}$	

3 Transformée de Laplace (3S)

3.1 Transformée de Laplace -Fonction de transfert (généralisation de la transformé de Fourier)

Définition : A chaque fonction (ou signal) $h(t)$ causale ($h(t) = 0$ si $t \in]-\infty, 0[$) de la variable réelle t , on associer la fonction unique $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ de la variable complexe $s = r + j\omega = r + j2\pi f$.

$$H(s) = TL\{h(t)\} = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^{+\infty} h(t)e^{-st} dt \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } s \in \mathbb{C}$$

$$h(t) = TL^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} H(s)e^{st} ds \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } s \in \mathbb{C}$$

On remarque que si $s = j\omega = j2\pi f$ on obtient la transformée de Fourier $TF\{h(t)\} = H(j\omega) = H(j2\pi f)$.

3.2 Principales propriétés de la transformée de Laplace

a) Linéarité	$ag(t) + bh(t)$	$aG(s) + bH(s)$
b) Décalage	$h(t + t_d)$	$H(s)e^{+st_d}$
c) Amortissement	$h(t)e^{at}$	$H(s - a)$
d) Dérivation	$\frac{d^n h(t)}{dt^n}$	$s^n H(s) - s^{n-1}h(0) - s^{n-2} \left. \frac{dh(t)}{dt} \right _0 - \dots - \left. \frac{d^{n-1}h(t)}{dt^{n-1}} \right _0$
e) Intégration	$\int_0^t h(\tau) d\tau$	$\frac{H(s)}{s} + \frac{1}{2}H(0)\delta(s)$ avec $H(0) = \int_0^{+\infty} h(t)dt$
f) Théorème de la valeur initiale $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot X(s)$ et finale $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$		

Table des transformées de Laplace

Signal $x(t)$	$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$	Signal $x(t)$	$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$
$\delta(t)$	1	e^{-at}	$\frac{1}{(s + a)}$
$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$U(s) = \frac{1}{s}$	te^{-at}	$\frac{1}{(s + a)^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{t^2}{2}e^{-at}$	$\frac{1}{(s + a)^3}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$e^{-at} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$

3.3 Représentation temporelle et fréquentielle d'un Système Linéaire Invariant dans le Temps (SLIT)

Un (SLIT) continu dont l'entrée $x(t)$ donne une sortie $y(t)$ est toujours décrit par une équation différentielle

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

L'application sur cette équation la propriété de dérivation (*Table de Laplace*) avec conditions initiales nulles:

$$\text{La fonction de transfert } H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s^1 + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s^1 + \dots + a_n s^n} = \frac{Q(s)}{D(s)} = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

où K : constante, z_j : zéros du système avec $Q(z_j) = 0$ et p_i : pôles du système avec $D(p_i) = 0$

$$\text{La sortie } y(t) \text{ à une entrée donnée } x(t) \text{ est: } y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot X(s)\}$$

3.4 Réponse harmonique ou fréquentielle d'un système SLIT

La réponse harmonique d'un système représente la variation de l'amplitude et de la phase causée par le SLIT sur une entrée sinusoïdale $x(t) = A_x \sin(2\pi ft + \varphi_x) = A_x \sin(\omega t + \varphi_x)$. La fonction de transfert du SLIT est

$$H(j\omega) \text{ Complexe avec } \begin{cases} A(\omega) = |H(j\omega)| \\ \theta(\omega) = \arg\{H(j\omega)\} \end{cases}$$

La sortie $y(t)$ du SLIT correspond à l'entrée $x(t)$ amplifiée d'un gain $A(\omega)$ et déphasée d'un angle $\theta(\omega)$:

$$y(t) = A_y \sin(2\pi ft + \varphi_y) = A(\omega)A_x \sin(2\pi ft + \varphi_x + \theta(\omega)) \text{ avec } A_y = A(\omega)A_x \text{ et } \varphi_y = \varphi_x + \theta(\omega)$$

Le diagramme de Bode décrit le gain d'amplitude $A(\omega)$ (en décibels) et la phase $\theta(\omega)$ (en degrés ou radians).

$$H(j\omega) \begin{cases} \text{Gain en décibels (dB)} = A_{dB}(\omega) = 20 \ln_{10}(A(\omega)) = 20 \log(A(\omega)) \\ \text{Phase } \theta(\omega) = \arg\{H(j\omega)\} \text{ en degrés } (^\circ) \text{ ou radians} \end{cases}$$

Les Filtrés Analogiques : Un filtre dont la fonction de transfert $H(j\omega)$ permet de transmettre une partie du spectre (bande passante $|G(j\omega)| = k$) et bloque toutes les autres parties (bande coupée $|G(j\omega)| = 0$). Cinq types de filtres: Passe-bas, Passe-haut, Passe-bande (Sélective), Coupe-bande (Rejecteur) et Passe-tout (Déphaseur).

Représentations élémentaires de Bode $G(j\omega)$, $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(|G(j\omega)|)$ et $\theta(\omega) = \text{Arg}(G(j\omega))$

<p>$G(j\omega) = k$</p>	<p>$G(j\omega) = j \frac{\omega}{\omega_0}$</p>	<p>$G(j\omega) = \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^n$</p>
<p>$G(j\omega) = \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_0}}$</p>	<p>$G(j\omega) = \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)$</p>	<p>$G(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$</p>
<p>$G(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j2\alpha \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$ Avec $\alpha < 1$</p>		

4 Convolution (2S)

4.1 Système Linéaire Invariant dans le Temps (SLIT)

Un système S (SLIT) reçoit un signal d'entrée $x(t)$ et délivre un signal de sortie (réponse) $y(t)$. Comme déjà vue précédemment la sortie est calculée en résolvant l'équation différentielle ou par la transformé de Laplace. Une troisième méthode d'avoir $y(t)$ est la convolution en utilisant la réponse impulsionnelle du système. La réponse du système à l'application d'une impulsion de DIRAC $\delta(t)$ à l'entrée s'appelle la *réponse impulsionnelle* (RI). Elle est souvent notée $h(t)$ et caractérisée par une énergie finie pour un système réalisable



4.2 Produit de convolution

Pour un signal d'entrée $x(t)$ réelle, la réponse réelle $y(t)$ d'un SLIT est donnée par le produit de convolution noté $*$ de l'entrée et de la réponse impulsionnelle réelle $h(t)$ du système. On écrit pour des signaux à énergie finie :

$$y(t) = \Phi_{xh}(t) = \Phi_{hx}(t) = x(t) * h(t) = \langle x(\tau) \cdot h(t - \tau) \rangle_{\mathcal{R}} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

$$\text{Si } x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = \delta(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) h(t - \tau) d\tau = h(t)$$

Le produit de convolution représente l'évolution de la surface contenue sous le produit des deux signaux en fonction du temps. Il exprime la quantité de recouvrement de $x(t)$ lorsqu'on le déplace sur la fonction $h(t)$.

Convolution des signaux de puissance finie ou périodiques. Pour deux signaux de puissance finie ou périodiques réels $x(t)$ et $g(t)$ de période T_0 , on définit la convolution de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Signaux à puissance finie: } \Phi_{xg}(t) = x(t) * g(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ \text{Signaux périodiques de période } T_0: \Phi_{xg}(t) = x(t) * g(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(\tau) g(t - \tau) d\tau \end{array} \right.$$

4.3 Les principales propriétés de la convolution entre deux signaux d'énergie finie

Commutativité	$g(t) * h(t) = h(t) * g(t)$
Associativité	$[g(t) * h(t)] * z(t) = h(t) * [g(t) * z(t)]$
Distributivité	$[ag(t) + bh(t)] * z(t) = a[g(t) * z(t)] + b[h(t) * z(t)]$
Invariance au décalage	$g(t - t_d) * h(t) = g(t) * h(t - t_d)$
Identité	$g(t) * \delta(t) = \delta(t) * g(t) = g(t)$
Dérivée	$\frac{d(g(t) * h(t))}{dt} = g(t) * \frac{dh(t)}{dt} = \frac{dg(t)}{dt} * h(t)$
Transformé de Laplace	$h(t) * x(t) \Rightarrow H(s) \cdot X(s)$ $h(t) \cdot x(t) \Rightarrow H(s) * X(s)$

5 - Corrélation et intercorrélation (2S)

5.1 Ressemblance dans l'espace des vecteurs et des signaux

On définit le degré de ressemblance entre deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} par le cosinus de l'angle entre eux exprimée par :

$$S_{A,B} = \frac{\langle \vec{A} \cdot \vec{B} \rangle}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|} = \frac{\langle \vec{A} \cdot \vec{B} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{A} \cdot \vec{A} \rangle \cdot \langle \vec{B} \cdot \vec{B} \rangle}} = \frac{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos(\theta)}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|} = \cos(\theta) \quad \text{avec} \quad -1 \leq S_{A,B} \leq 1$$

Si la valeur $S_{A,B} = \cos(\theta) = -1$ indique que les deux vecteurs sont linéairement opposés.

Si la valeur $S_{A,B} = \cos(\theta) = 0 \Rightarrow$ l'un au moins est nul ou $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow$ alors, ils sont indépendants (pas de similitude)

Si la valeur $S_{A,B} = \cos(\theta) = 1$ indique que les vecteurs sont linéairement similaires (colinéaires positifs).

Les valeurs intermédiaires de $S_{A,B}$ permettent d'évaluer le degré de similarité.

Par analogie avec les vecteurs, on déduit ce qui suit pour les signaux sur l'intervalle C :

$$S_{x,y} = \frac{\langle x(t) \cdot y(t) \rangle_C}{\|x(t)\| \cdot \|y(t)\|} = \frac{\langle x(t) \cdot y(t) \rangle_C}{\sqrt{\langle x(t) \cdot x(t) \rangle_C \cdot \langle y(t) \cdot y(t) \rangle_C}} \quad \text{avec} \quad -1 \leq S_{x,y} \leq 1$$

La valeur $S_{x,y} = -1$ indique que les deux signaux sont opposés sur l'intervalle C .

La valeur $S_{x,y} = 0$ les deux sont indépendants (pas de similitude ou $x(t) \perp y(t)$) ou l'un au moins des est nul.

La valeur $S_{x,y} = 1$ indique que les vecteurs sont similaires (colinéaires positifs).

Les valeurs intermédiaires permettent d'évaluer le degré de similarité.

5.2 Corrélation

L'opération de corrélation, notée \otimes , permet de mesurer la similarité ou la ressemblance entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ en fonction d'un paramètre de translation τ . Elle est appelée aussi fonction d'intercorrélation est définie

$$\psi_{x,y}(\tau) = x(t) \otimes y(t) = x(t) * y^*(-t) = \langle x(t) \cdot y(t + \tau) \rangle_{\mathcal{R}} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t + \tau) dt$$

On appelle autocorrélation la corrélation du signal $x(t)$ avec lui-même :

$$\psi_{x,x}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t + \tau) dt \quad \text{le maximum est } \psi_{x,x}(\tau)|_{\tau=0} = \psi_{x,x}(0) = \psi_x = W_x$$

$$\text{Coefficient de corrélation linéaire (ou de ressemblance) } R_{x,y}(\tau) \text{ est : } -1 \leq R_{x,y}(\tau) = \frac{\psi_{x,y}(\tau)}{\sqrt{\psi_x \cdot \psi_y}} \leq 1$$

La valeur $R_{x,y}(\tau_1) = -1$ indique que les deux signaux sont opposés si on retarde $y(t)$ par τ_1 ($y(t + \tau_1)$).

$R_{x,y}(\tau_1) = 0$ les deux sont indépendants (pas de similitude ou $x(t) \perp y(t + \tau_1)$) quand le retard est égal à τ_1

La valeur $R_{x,y}(\tau_1) = 1$ indique que les vecteurs sont similaires (colinéaires positifs) si le retard est égal à τ_1 .

Les valeurs intermédiaires permettent d'évaluer le degré de similarité.

5.3 Corrélation des signaux de puissance finie ou périodiques (Théorème de Wiener-Khintchine).

\Rightarrow la $TF\{\psi_{x,y}(\tau)\} = TF\{x(t) * y^*(-t)\} = X(f) \cdot Y^*(f)$: est la densité interspectrale d'énergie

\Rightarrow la $TF\{\psi_{x,x}(\tau)\} = TF\{x(t) * x^*(-t)\} = X(f) * X^*(f) = \|X(f)\|^2$: est la densité spectrale d'énergie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Puissance finie: } \psi_{x,y}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) y^*(t + \tau) dt \quad \text{Si Périodiques: } \psi_{x,y}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) y^*(t + \tau) dt \\ \text{Soit } x_T(t) = x(t) \cdot \left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] \Rightarrow \psi_x = P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \|x(t)\|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \|X_T(f)\|^2 df \\ \Rightarrow \text{Pour deux signaux } TF\{\psi_{x,y}(\tau)\} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{X_T(f) \cdot Y_T^*(f)}{T} \text{ la densité interspectrale de puissance} \end{array} \right.$$