Le rayon de courbure à $t = 1s$

$$R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{4(1+t^2)}{\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}} = \frac{2(1+t^2)}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$$

$$= 2(1+t^2)(\sqrt{1+t^2})$$

$$= 2(1+t^2)(1+t^2)^{\frac{1}{2}} = 2(1+t^2)^{\frac{3}{2}}$$

$t = 1s$: $R = 2(2)^{\frac{3}{2}} = 5,656m$

Exo4 :

$$r = \frac{t^2}{4} \quad , \quad \theta(t) = \frac{\pi}{4} t \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\pi}{4}$$

1) Le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} = \frac{t^2}{4}\overrightarrow{e_r}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{2t}{4}\overrightarrow{e_r} + \frac{t^2}{4}\left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)$$

$$= \frac{t}{2}\overrightarrow{e_r} + \frac{t^2}{4}(\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta})$$

$$= \frac{t}{2}\overrightarrow{e_r} + \frac{t^2}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\vec{V} = \frac{t}{2}\overrightarrow{e_r} + \frac{\pi t^2}{16}\overrightarrow{e_\theta}$$

2) Le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \cancel{\frac{1}{2}\overrightarrow{e_r} + \frac{2\pi}{16}t\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\pi t^2}{16}\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}}$$

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_r} + \frac{t}{2}\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} + \frac{2\pi t}{16}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\pi t^2}{16}\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{e_r} + \frac{t}{2}(\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) + \frac{\pi}{8}t\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\pi t^2}{16}(-\dot{\theta}\overrightarrow{e_r})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{e_r} + \frac{t}{2}\left(\frac{\pi}{4}\overrightarrow{e_\theta}\right) + \frac{\pi}{8}t\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\pi t^2}{16}\left(-\frac{\pi}{4}\overrightarrow{e_r}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{e_r} + \frac{\pi t}{8}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\pi t}{8}\overrightarrow{e_\theta} - \frac{\pi^2 t^2}{64}\overrightarrow{e_r}$$

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_r} + \frac{\pi}{4}t\overrightarrow{e_\theta} - \frac{\pi^2 t^2}{64}\overrightarrow{e_r}$$

$$\vec{a} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2 t^2}{64}\right)e_r + \frac{\pi}{4}t\overrightarrow{e_\theta}$$

- Le module de la vitesse :

$$|\vec{V}| = \sqrt{\frac{t^2}{4} + \frac{\pi^2 t^4}{(16)^2}} \qquad t = 6s$$

Le module de l'accélération

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2 t^2}{64}\right)^2 + \left(\frac{\pi t}{4}\right)^2} \qquad t = 6$$

3) Les coordonnées cartésiennes

$$x = r\cos\theta = \frac{t^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

$$y = r\sin\theta = \frac{t^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

4) L'expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

- $V_x = \frac{t}{2}\cos\frac{\pi}{4}t - \frac{t^2}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

$$V_x = \frac{t}{2}\cos\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi t^2}{16}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

- $V_y = \frac{t}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{t^2}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

$$= \frac{t}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{\pi t^2}{16}\cos\frac{\pi}{4}t$$