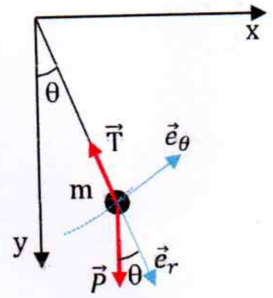
Exercice 4 :

1. **La vitesse de M :**



Dans la base polaire :

Le vecteur position: $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ avec $r = l$

Le vecteur position: $\vec{V} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$$r = l \Rightarrow \vec{V} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

2. **Le bilan des forces : $\vec{P}$, $\vec{T}$**

3. **L'équation horaire du mouvement $\theta(t)$:**

Le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Par projection sur $((\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:

$$\begin{cases} \vec{e}_r: P\cos\theta - T = ma_r \\ \vec{e}_\theta: -P\sin\theta = ma_\theta \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_r = -l\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = l\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r: mg\cos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2 & \rightarrow (1) \\ \vec{e}_\theta: -mg\sin\theta = ml\ddot{\theta} & \rightarrow (2) \end{cases}$$

$$\text{de (2):} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Pour des faibles oscillations on a : $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Equation différentielle du 2$^{\text{ème}}$ ordre sans second membre.

$\ddot{\theta} + w_0\theta = 0$ avec $w_0 = \sqrt{g/l} \Rightarrow$ w_0: pulsation propre

La solution de cette équation est :

$$\theta(t) = A\cos w_0 t + B\sin w_0 t$$

Condition initial : à t = 0 s : $\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_0 = A\cos w_0(0) + B\sin w_0(0) \\ 0 = -A\sin w_0(0) + B\cos w_0(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_0 = A \\ 0 = B \end{cases}$

Donc l'équation horaire est :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\sqrt{g/l}\, t$$