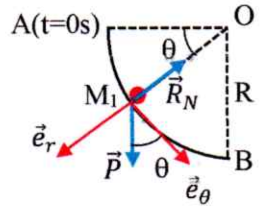
Exercice 5 :

1. La vitesse au point M_1 :

D'après le principe fondamental de la dynamique :



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$$

En coordonnées polaires

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r \;\Rightarrow\; \vec{V} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \;\Rightarrow\; \vec{a} = \underbrace{R\ddot{\theta}}_{a_\theta}\,\vec{e}_\theta \underbrace{-R\dot{\theta}^2}_{a_r}\,\vec{e}_r$$

Par projection sur les axes :

$$\begin{cases} \vec{e}_r:\ P\sin\theta - R_N = ma_r = -m\,R\dot{\theta}^2 & \rightarrow (1) \\ \vec{e}_\theta:\ P\cos\theta = ma_\theta = m\,R\ddot{\theta} & \rightarrow (2) \end{cases}$$

$$\text{de (2)}:\quad mg\cos\theta = m\,R\ddot{\theta} \;\Rightarrow g\cos\theta = R\frac{d\dot{\theta}}{dt}$$

En multipliant le deuxième terme par : $\dfrac{d\theta}{d\theta}$

$$\Rightarrow g\cos\theta = R\,\frac{d\dot{\theta}}{dt} = R\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\times\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}} = R\,\dot{\theta}\,\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}d\dot{\theta} = \frac{g}{R}\cos\theta\ d\theta \;\Rightarrow\; \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}}\dot{\theta}d\dot{\theta} = \frac{g}{R}\int_0^{\theta}\cos\theta\ d\theta \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}[\theta^2]_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} = \frac{g}{R}[\sin\theta]_0^{\theta}$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2\right) = \frac{g}{R}\,\sin\theta$$

La relation entre la vitesse linière et la vitesse angulaire est donné par la formule :

$$\dot{\theta} = \frac{V}{R} \quad\Rightarrow\quad \dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{R^2} \quad\Rightarrow (V^2 - V_0^2) = 2\,\frac{gR^2}{R}\,\sin\theta \;\Rightarrow\; V^2 = 2\,gR\sin\theta + V_0^2$$

$$\Rightarrow\; V(M_1) = \sqrt{2\,gR\sin\theta + V_0^2}$$

2. La vitesse au point M_2 :

En appliquant du principe fondamental de la dynamique dans la partie BC :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_f = m\vec{a}$$