Analyse fonctionnelle appliquées. Chapitre 1: Espaces normés, espaces de Banach, espaces de Hilbert.

LOMBARKIA Farida

Département de Mathématiques,
Faculté de Mathématiques et informatique,
Université de Batna 2

1er semestre 2020-2021,
Première année Master 1 (MA)

1. Espaces normés
2. Espaces de Banach
3. Espaces de Hilbert

Dans ce chapitre tous les espaces vectoriels considérés seront sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

Soit X un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. L'application $p : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est appelée semi-norme si elle satisfait les propriétés suivantes:

1. $\forall x, y \in X,\ p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.
2. $\forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.
3. $x = 0 \Rightarrow p(x) = 0$.

   On appelle norme toute semi-norme vérifiant de plus
4. $p(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

On appelle espace vectoriel normé tout espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'une norme. Le couple (X, p) est appelé espace normé. On note généralement p par $\|.\|$ ou $\|.\|_X$

Remarque

Tout espace vectoriel normé X est muni d'une distance canonique $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$, $\forall (x, y) \in X \times X$, alors X est un espace métrique, donc X aura une structure topologique, les ouverts de cette topologie sont de la forme

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

Example

Soit $l_\infty = \{(x_n) \subset \mathbb{K} : (x_n) \text{ est bornée}\}$ l'ensemble des suites bornées dans $\mathbb{K}$. On définit sur l_∞ l'application

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_{i \geq 1} |x_i|,$$

on a $\|.\|_\infty$ est une norme sur l_∞. Soit $p \in [1, +\infty[$ et soit $l_p = \{(x_n) \subset \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$. L'application $\|.\|_p$ définie sur l_p, par

$$\|(x_n)\|_p = [\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p]^{\frac{1}{p}},$$

est une norme sur l_p.

Example

Soit $X = C([a,b],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$, tel que $a < b$. Les applications $\|.\|_p$, $\|.\|_\infty$ définies par:

$$\|f\|_p = [\int_a^b |f(x)|^p]^{\frac{1}{p}} dx,$$

avec $p \in [1, +\infty[$ et

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

sont des normes sur X.

Example

Soient $p \geq 1$ fixé et $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On consider l'ensemble $\mathcal{L}^p(a,b) = \{f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, mesurable et $\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty\}$, l'application $\|.\|_p$ définie par

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(a,b)$ car $\|f\|_p = 0$ imlique que $f = 0$ presque partout. On définit sur $\mathcal{L}^p(a,b)$ une relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ par $f\mathfrak{R}g \Leftrightarrow f = g$ presque partout, et on note $L^p(a,b) = \mathcal{L}^p(a,b)/\mathfrak{R} = \{[f] : f \in \mathcal{L}^p(a,b)\}$, l'application

$$\|[f]\|_p = \|f_1\|_p,$$

pour tout $f_1 \in [f]$ est une norme sur $L^p(a,b)$.

Example

On consider l'ensemble $\mathcal{L}^{\infty}(a,b)=\{f:(a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$, mesurable et il existe $c>0/|f(t)|\leq c\ \ p.p\}$, l'application $\|.\|_{\infty}$ définie par

$$\|f\|_{\infty}=ess\ \sup_{t\in(a,b)}|f(t)|,$$

est une semi-norme sur $\mathcal{L}^{\infty}(a,b)$, on note $L^{\infty}(a,b)=\mathcal{L}^{\infty}(a,b)/\mathfrak{R}=\{[f]:f\in\mathcal{L}^{\infty}(a,b)\}$, l'application

$$\|[f]\|_{\infty}=\|f_1\|_{\infty},$$

pour tout $f_1\in[f]$ est une norme sur $L^{\infty}(a,b)$.

Définition

Soient X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ deux normes sur X. On dit qu'elle sont équivalentes

$$\text{s'il existe } \alpha, \beta > 0, \text{ telles que } \forall x \in X,\ \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1.$$

Remarque

- *Deux normes équivalentes définissent deux métriques équivalentes et donc des topologies identiques sur X.*
- *Toutes les normes définies sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.*
- *La boule unité fermée d'un espace normé X est compacte ssi la dimension de X est finie.*

Example

Toutes les normes $\|.\|_p$, $\|.\|_\infty$, définies sur $X = \mathbb{R}^n$, par

$$\|x\|_p = [\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p]^{\frac{1}{p}},$$

avec $p \in [1, +\infty[$ et

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

sont équivalentes.

Définition

Soit $(X, \|.\|)$ *un espace normé.*

1. *Une suite* (x_n) *dans* X *est dite de Cauchy si elle vérifie:* $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n, m \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$, *où* d *est la distanse associée à la norme* $\|.\|$.
2. *Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy dans* X *est convergente dans* X.

Définition

Un espace normé $(X, \|.\|)$ *est dit espace de Banach, si l'espace métrique associé est complet.*

Théorème

Un sous espace Y *d'un espace de Banach* X *est complet ssi* Y *est fermé dans* X*.*

Définition

Un espace normé $(X, \|.\|)$ *est dit espace de Banach, si l'espace métrique associé est complet.*

Théorème

Un sous espace Y *d'un espace de Banach* X *est complet ssi* Y *est fermé dans* X.

Example

1. *Les espaces* l_p, l_∞, $L^p(a,b)$ *et* $L^\infty(a,b)$ *définis dans les exemples précédent sont des espaces de Banach (Théorème de Fisher Riesz).*
2. *L'espace* $X = C([a,b],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *est un espace de Banach.*

Example

Soit l'ensemble $\mathbb{Q}$ *des rationnels muni de la norme* $|.|$ *n'est pas complet(*$\mathbb{Q}$ *n'est pas fermé dans* $\mathbb{R}$*).*

Example

1. *Les espaces* l_p, l_∞, $L^p(a,b)$ *et* $L^\infty(a,b)$ *définis dans les exemples précédent sont des espaces de Banach (Théorème de Fisher Riesz).*
2. *L'espace* $X = C([a,b],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *est un espace de Banach.*

Example

Soit l'ensemble $\mathbb{Q}$ *des rationnels muni de la norme* $|.|$ *n'est pas complet(*$\mathbb{Q}$ *n'est pas fermé dans* $\mathbb{R}$*).*

Example

Soit $S = \{(x_n) \subset l_\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $x_n = 0$, $\forall n \geq n_0\}$, alors S est un sous espace vectoiel de l_∞. S n'est pas un espace de Banach. En effet si

$$x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...) \in l_\infty \setminus S.$$

Soit

$$(x_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, 0, 0, ...) \in S,$$

(x_n) est une suite de Cauchy dans S et
$\|x - x_n\|_\infty = \|(0, 0, ..., 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...)\|_\infty = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$, par suite (x_n) converge vers $x \notin S$. Alors S n'est pas complet.

Example

Soit $X = C([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$, soit $(f_n) \subset X$ la suite définie par:

$$f_n(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ nt + (1 - \frac{1}{2}n) & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{array} \right) .$$

$\|f_{n+p} - f_n\|_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p})$, donc $\|f_{n+p} - f_n\|_1 \longrightarrow 0$. D'où $(f_n) \subset X$ est une suite de Cauchy dans X. Supposons que (f_n) converge vers $f \in X$, alors

$$f = 0, \text{ sur } [0, \tfrac{1}{2}] \text{ et } f = 1 \text{ sur } [\tfrac{1}{2}, 1],$$

donc l'espace $X = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_1$ n'est pas complet.

Théorème (Complété des espaces normés)

Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé, alors il existe un espace de Banach $\widehat{X}$ et une application linéaire injective $T : X \to \widehat{X}$ telle que $R(T)$ l'image de T est une partie dense dans $\widehat{X}$ et $\|Tx\|_{\widehat{X}} = \|x\|_X$, pour tout $x \in X$. L'espace $\widehat{X}$ s'appelle le complété de X.

Example

1. Le complété de $(\mathbb{Q}, |.|)$ est $(\mathbb{R}, |.|)$.
2. L'espace complété de $X = C[a, b]$ muni de la norme $\|.\|_p$, $(1 \leq p < \infty)$ est l'espace de Banach $L^p([a, b])$, muni de la norme $\|f\|_p = [\int_{[a,b]} |f(t)|^p dt]^{\frac{1}{p}}$.

Théorème (Complété des espaces normés)

Soit $(X, \|.\|)$ *un espace normé, alors il existe un espace de Banach* $\widehat{X}$ *et une application linéaire injective* $T : X \to \widehat{X}$ *telle que* $R(T)$ *l'image de* T *est une partie dense dans* $\widehat{X}$ *et* $\|Tx\|_{\widehat{X}} = \|x\|_X$*, pour tout* $x \in X$*. L'espace* $\widehat{X}$ *s'appelle le complété de* X*.*

Example

1. Le complété de $(\mathbb{Q}, |.|)$ est $(\mathbb{R}, |.|)$.
2. L'espace complété de $X = C[a, b]$ muni de la norme $\|.\|_p$, $(1 \leq p < \infty)$ est l'espace de Banach $L^p([a, b])$, muni de la norme $\|f\|_p = [\int_{[a,b]} |f(t)|^p dt]^{\frac{1}{p}}$.

Définition(Produit scalaire)

Soit H un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle produit scalaire sur H, toute application $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les axiomes suivantes:

1. $\forall x \in H$, $\langle x, x \rangle \geq 0$ *et* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\forall x, y, z \in H$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$.
3. $\forall x, y \in H$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.*(symétrie hermitienne)*

Remarque

1. *Soit H un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{K}$ *et* $\langle .,. \rangle$ *est un produit scalaire sur H, alors on a* $\forall x, y, z \in H$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \overline{\mu} \langle x, z \rangle$.
2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *alors le produit scalaire est une application bilinéaire.*

Définition

On appelle espace préhilbertien tout espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et on note $(H, \langle .,. \rangle)$.

Proposition

Soit H un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur H, alors on a les propriétés suivantes

1. $\langle x, y \rangle = 0, \forall x \in H$ *implique que* $y = 0$.
2. $\forall x, y \in H, \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2Re\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$.
3. *L'application* $\|.\| : H \to \mathbb{R}^+$ *définie par* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ *est une norme sur* H.

Définition

Soient H un espace préhilbertien et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire. Si H est complet pour la norme $\|.\|$, alors H est dit un espace de Hilbert.

Remarque

1. *Un espace préhilbertien est un espace normé.*
2. *Un espace de Hilbert est un espace de Banach.*

Définition

Soient H un espace préhilbertien et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire. Si H est complet pour la norme $\|.\|$, alors H est dit un espace de Hilbert.

Remarque

1. *Un espace préhilbertien est un espace normé.*
2. *Un espace de Hilbert est un espace de Banach.*

Example

1. *L'application* $u : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par*

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \overline{y_i}$$

est un produit scalaire sur $H = \mathbb{C}^n$*, qui est complet, alors* $(\mathbb{C}^n, u)$ *est un espace de Hilbert.*

2. *Soit* $H = l^2$*, l'application* $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par*

$$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

est un produit scalaire sur H*, qui est complet, alors* $(H, \langle .,. \rangle)$ *est un espace de Hilbert.*

Example

Soit $H = L^2(a, b)$ *tel que* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, *L'application* $\langle ., . \rangle : L^2(a, b) \times L^2(a, b) \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt,$$

est un produit scalaire sur H *et* $L^2(a, b)$ *est complet (Théorème de Fisher Riesz), alors* $(H, \langle ., . \rangle)$ *est un espace de Hilbert.*

Example

Soit $H = L^2(0,1)$ *et soit le sous espace* $\mathcal{Z} = \{f \in L^2(0,1),\ \ f$ *est absolument continue sur* $(0,1)$*avec* $\frac{df}{dt} \in L^2(0,1)$*et* $f(0) = 0\}$. *L'espace* $\mathcal{Z}$ *muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \langle f', g'\rangle_{L^2(0,1)},$$

est un espace de Hilbert

Définition

Une fonction F *sur* $[a, b]$ *est absolument continue si et seulement si* $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, *pour certain fonction intégrable* f, *de plus* F *est différentiable presque partout et* $F' = f$ *p.p.*

Proposition

Soit H un espace de Hilbert, alors on a

1. $\forall x, y \in H$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.*(inégalité de Cauchy schwartz)*
2. *(Loi de parallélograme)*
$$\forall x, y \in H, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$
3. *(Loi de polarisation)*
$$\forall x, y \in H, \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2).$$
4. *Si (x_n) et (y_n) sont deux suites dans H et $x, y \in H$ telles que $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$, alors $\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$ dans $\mathbb{C}$.*

Lemme

Soit H un espace normé, alors H est préhilbertien si et seulement si on a $\forall x, y \in H, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$

Example

L'espace l^p avec $p \neq 2$ n'est pas un espace préhilbertien. En effet soient $x = (1, 1, 0, 0, ..) \in l^p$ *et* $y = (1, -1, 0, 0, ..) \in l^p$,
$\|x\| = \|y\| = 2^{\frac{1}{p}}$ *et* $\|x+y\| = \|x-y\| = 2.$

Example

L'espace $C([0,1])$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

n'est pas un espace préhilbertien. En effet soient

$$f_1(t) = 1, \quad et \quad f_2(t) = t,$$

on a $\|f_1\|_\infty = 1$, $\|f_2\|_\infty = 1$ *et* $\|f_1 + f_2\|_\infty = 2$, $\|f_1 - f_2\|_\infty = 1$.

1. Espaces normés
2. Espaces de Banach
3. Espaces de Hilbert

Définition

Soit H un espace préhilbertien, un ensemble A de H est dit orthogonal à un ensemble B de H, si $x \perp y$, $\forall x \in A$ et $\forall y \in B$.
L'orthogonal de A est l'ensemble

$$A^{\perp} = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in A\}.$$

Proposition

Soit H un espace préhilbertien et A et B deux parties non vide de H, alors on a les propriétés suivantes:

1. $A^{\perp}$ *est un sous espace vectoriel fermé de* H,
2. $B \subset A \Longrightarrow A^{\perp} \subset B^{\perp}$,
3. $A \subset A^{\perp\perp}$,
4. $\overline{A} = A^{\perp\perp}$. *En particulier, si A est fermé de H, alors $A = A^{\perp\perp}$.*

Proposition

Soit H un espace de Hilbert et M un sous espace fermé de H, alors $H = M \oplus M^{\perp}$, appelée décomposition directe orthogonale de H.

Théorème de Projection

Soit A un sous espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H. Alors pour chaque $x \in H$, il existe un unique $y \in A$ tel que

$$\|x - y\| = d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

De plus on a

$$Re\langle x - y, z - y\rangle \leq 0, \text{ pour tout } z \in A.$$

Proposition

Soit H un espace de Hilbert et M un sous espace fermé de H, alors $H = M \oplus M^{\perp}$, appelée décomposition directe orthogonale de H.

Théorème de Projection

Soit A un sous espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H. Alors pour chaque $x \in H$, il existe un unique $y \in A$ tel que

$$\|x - y\| = d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

De plus on a

$$Re\langle x - y, z - y\rangle \leq 0, \text{ pour tout } z \in A.$$

Définition

Soit H un espace de Hilbert.

1. *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de H est dite orthogonale si $\forall i, j \in I$, $i \neq j$, alors $\langle x_i, x_j\rangle = 0$.*
2. *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de H est dite orthonormé si $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale et $\forall i \in I$, $\|x_i\| = 1$.*

Définition

Soit $\{e_i / i \in I\}$ *une famille de vecteurs de* H *un espace de Hilbert*

1. *On dit que la famille* (e_i) *est totale (maximale) si le sous espace vectoriel engendré par* (e_i) *est dense dans* H $(\overline{vect\{e_i / i \in I\}} = H)$.
2. *Si* $\{e_i / i \in I\}$ *est une famille orthonormale total dans* H, *alors* $\{e_i / i \in I\}$ *est dite une base orthonormale de* H.

Remarque

Soit H un espace de Hilbert

1. *Si $\{e_i / i \in I\}$ est une famille orthogonale, alors la famille $\{f_i / i \in I\}$, avec $f_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$ est orthonormale.*
2. *Tout système orthogonal dans H ne contenant pas le vecteur nul est libre.*
3. *Si $dim H = n$ et $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est un système orthonormé, alors c'est une base de H, appelée base orthonormé et on a pour tout $x \in H$, $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ et $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2$.*
4. *Soit $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un système orthogonal, alors on a: $\| \sum_{k=1}^{n} x_k \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$.*

Définition

Un espace de Hilbert H est dit séparable s'il existe une suite (donc un ensemble dénombrable) totale dans H.

Proposition

Soit H un espace de Hilbert.

1. *Les espaces normés de dimension finies sont séparable.*
2. *Un espace de Hilbert H de dimension infini est séparable ssi H admet une base orthonormale.*

Définition

Un espace de Hilbert H est dit séparable s'il existe une suite (donc un ensemble dénombrable) totale dans H.

Proposition

Soit H un espace de Hilbert.

1. *Les espaces normés de dimension finies sont séparable.*
2. *Un espace de Hilbert H de dimension infini est séparable ssi H admet une base orthonormale.*

Example

1. *L'espace de Hilbert* l^2 *est séparable.*
2. *L'espace de Hilbert* $L^2(a, b)$ *est séparable.*

Théorème

Soit $\{e_n\}_{n\geq 1}$ *un ensemble orthonormal de* H*, alors pour tout* $x \in H$*on a*

1. *La série* $\sum_{k\geq 1}\langle x, e_k\rangle e_k$ *converge.*
2. *la série* $\sum_{k\geq 1} \lambda_k e_k$ *converge si et seulement si* $\sum_{k\geq 1} |\lambda_k|^2 < \infty$ *c.à.d* $(\lambda_k) \in l^2$
3. *Si* $y = \sum_{k\geq 1} \lambda_k e_k$*, alors* $\lambda_k = \langle y, e_k\rangle$.
4. $\sum_{k\geq 1} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$*(inégalité de Bessel).*

Théorème

Soit $\{e_n\}_{n\geq 1}$ *un ensemble orthonormal de* H*, alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. $\{e_n\}_{n\geq 1}$ *est une base orthonormale dans* H $(\overline{vect\{e_n\}_{n\geq 1}} = H)$.
2. *Si* $\langle x, e_k\rangle = 0, \forall k \geq 1$*, alors* $x = 0$.
3. $\forall x \in H, \|x\|^2 = \sum_{k\geq 1} |\langle x, e_k\rangle|^2$ *(identité de Parseval).*
4. $\forall x, y \in H, \langle x, y\rangle = \sum_{k\geq 1}\langle x, e_k\rangle\overline{\langle y, e_k\rangle}$ *(Formule de Plancherel).*

Remarque

Si $\{e_n\}_{n\geq 1}$ *est une base orthonormale dans* H, *alors* $\forall y \in H$, $\exists \lambda_k \in \mathbb{C}$ *tel que* $y = \sum_{k\geq 1} \lambda_k e_k$, *alors* $\lambda_k = \langle y, e_k \rangle$.

Example

Dans $H = l^2$ *muni du produit scalaire* $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$, *les vecteurs* $e_1 = (1, 0, 0, ...)$, $e_2 = (0, 1, 0, ...)$, $.....e_n = (0, 0, 0, ..., 1, ...)$, *on a* $\{e_n\}$ *est une famille orthonormé,* $\{e_n\}$ *est une base de* l^2, *car* $\{e_n\}$ *est total. En effet*

$$\langle x, e_n \rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ alors } x = 0.$$

Remarque

Si $\{e_n\}_{n\geq 1}$ *est une base orthonormale dans* H, *alors* $\forall y \in H$, $\exists \lambda_k \in \mathbb{C}$ *tel que* $y = \sum_{k\geq 1} \lambda_k e_k$, *alors* $\lambda_k = \langle y, e_k \rangle$.

Example

Dans $H = l^2$ *muni du produit scalaire* $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$, *les vecteurs* $e_1 = (1, 0, 0, ...)$, $e_2 = (0, 1, 0, ...)$, $.....e_n = (0, 0, 0, ..., 1, ...)$, *on a* $\{e_n\}$ *est une famille orthonormé,* $\{e_n\}$ *est une base de* l^2, *car* $\{e_n\}$ *est total. En effet*

$$\langle x, e_n \rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ alors } x = 0.$$

Example

La suite $C = \{c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\Pi}}, c_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\Pi}} \cos nx, n \in \mathbb{N}\}$ *est une base orthonormale de* $L^2[0, \Pi]$. *La suite* $S = \{s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\Pi}} \sin nx, n \in \mathbb{N}\}$ *est une base orthonormale de* $L^2[0, \Pi]$.